

ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

О КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ ОПИСАНИИ СЕЧЕНИЯ РЕКОМБИНАЦИИ ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Научный руководитель

К. М. Белоцкий

Выполнил

Д. С. Калашников

Москва 2020

В текущей задаче. Рекомбинация – процесс перехода свободного электрона в связанное состояние в поле водородоподобного ядра.

$$v \ll \alpha^{5/2}$$

$$\sigma_{cl} = (4\pi)^{\frac{2}{5}} \pi \frac{\alpha^2}{\mu^2} \frac{1}{v^{\frac{14}{5}}}, \quad (1)$$

$$\sigma_{qu} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^3}{\mu^2} \frac{\ln(v^{-1})}{v^2}. \quad (2)$$

Цель – исследовать пределы применимости классической и квантовой формулы, найти пределы, в которых выполняется принцип соответствия.

- 1 Ознакомление со статьей [2], в которой было получено ограничение на начальную относительную скорость движения частиц, при котором применима классическая формула.
- 2 Ознакомление с выводом классической формулы (1), полученным в статье [3] Елютиным. Получение условий, при которых применима данная формула.
- 3 Ознакомление с выводом классической формулы (1), полученным в учебнике по Теории поля Ландау и Лифшица [12]. Получение условий, при которых этот вывод применим.

- 1 Оценка пределов применимости формулы классического сечения рекомбинации.
- 2 Ознакомление с выводом формулы Крамерса (2), полученным в статье [6]. Определение пределов ее применимости с учетом вывода.
- 3 Ознакомление с выводом формулы Крамерса (2), исходя из статьи Мильштейн А. И. [5].
- 4 Сопоставить пределы применимости формул (1) и (2).

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}(\ddot{r})^2. \quad (3)$$

В выводе были использованы приближения, которые накладывают следующие ограничения:

- 1 $M \gg \hbar$
- 2 $v \ll c$, начальная относительная скорость движения частиц много меньше скорости света.

Пределы применимости дипольного излучения во 2 томе Ландау

Излучаемую волну можно представить как плоскую, а также скорость частиц, должна быть меньше скорости света $\lambda \ll r$ и $\sigma_0 \ll r$, характерный размер системы и длины излучаемой волны много меньше расстояний, на которых измеряется поле (то есть волновая зона).

Применимость классической формулы сильно ограничена: не учитываются поправки в излучение, связанные магнитным моментом, квадрупольным моментом, которые при близких расстояниях будут играть важную роль. Также не позволит использовать формулу (1) для релятивистских частиц ограничение на скорость налетающих частиц.

Закон сохранения энергии (4):

$$\frac{\mu V'^2}{2} + \frac{\alpha}{a_0} = \frac{\mu V^2}{2}. \quad (4)$$

Условие нахождения характерного размера системы (5):

$$\frac{\mu V'^2}{2} \sim \frac{2\alpha}{a_0}. \quad (5)$$

Получим оценку на a_0 подставив (5) в (4):

$$a_0 \sim \frac{\alpha}{\mu V^2}. \quad (6)$$

Вывод формулы в квантовом приближении. Изучение статьи Крамерса.

Вывод в статье Крамерса основан на классической формуле потерь энергии свободного электрона, падающего на положительно заряженное ядро. Полагается, что потеря энергии электрона происходит посредством выброса кванта монохроматического света $h\nu$. Электрон при этом либо продолжит свободное движение, либо перейдет в связанное с ядром состояние, описанное теорией Бора.

Вывод формулы в квантовом приближении. Изучение статьи Крамерса.

В статье Крамерса [6] не дается формула (2) в таком виде. В статье приведены положения, которые могут быть использованы для получения искомой формулы. Исходя из выражения для σ_n – сечение рекомбинации определенным уровнем (на определенный уровень):

$$\sigma_n = \frac{32\pi\alpha^3 a_0^2}{3\sqrt{3}} \frac{\omega_0}{\omega(\omega - \omega_0 n^{-2})} \frac{1}{n^3} \quad (7)$$

Вывод формулы в квантовом приближении. Изучение статьи Крамерса.

Просуммировав по всем связанным состояниям и заменив суммирование интегрированием получаем формулу:

$$\sigma_q = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \alpha r_0^2 Z^2 c^2 \cdot \frac{\ln \frac{Zc\alpha}{v}}{v^2}.$$

Вывод общей формулы рекомбинации в статье Мильштейна

В данной работе приведена следующая формула для суммарного сечения рекомбинации:

$$\sigma_{rr} = \frac{16}{3} \pi^2 \alpha^3 a_B^2 \eta^2 \left[\int_0^{\infty} \frac{\eta'^2 \sinh(\varepsilon' - \varepsilon)}{\eta' |\eta^2 - \eta'^2| \sinh(\pi\eta) \sinh(\pi\eta')} \times \right. \\ \left. \times \left(\xi \frac{d}{d\xi} |F(\xi)|^2 \right) d\eta' - \coth \pi\eta + 1 \frac{1}{\pi\eta} \right], \quad (8)$$

Вывод общей формулы рекомбинации в статье Мильштейна

$$\eta = \sqrt{J/\varepsilon} = Ze^2/\hbar v$$

Для $\eta \gg 1$ или $Ze^2/c\hbar \gg v/c$ в статье приведено асимптотическое выражение (8):

$$\sigma_{rr} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\alpha^3\alpha_B^2\eta^2 \ln \eta. \quad (9)$$

Это выражение с логарифмической точностью совпадает с (2).

$$\begin{aligned}\alpha^{5/2} &\gg \frac{v}{c} \\ \alpha &\gg \frac{v}{c}\end{aligned}\tag{10}$$

Формулы (1) и (2) отличаются существенным образом: при выполнении условия (10) сечения отличаются на несколько порядков. Классическое сечение имеет не характерную $(\frac{1}{v^2} \ln \frac{const}{v})$ зависимость от скорости для медленных частиц в Кулоновском поле; в формулы (1) и (2) постоянная тонкой структуры входит в разных степенях, сечения по-разному зависят от заряда ядра.

- 1 Была изучена литература, посвященная выводу формулы в классическом приближении (1): [2] – работа, где ограничение на скорость было получено из действия, [3] – работа Елютина, где ограничение на скорость получено, как ограничение на момент.
- 2 Была изучена литература, посвященная выводу формулы в квантовом приближении (2): [6] – в котором впервые была сформулирована формула исходя из полуклассических принципов, [11, 13, 10] – учебники по квантовой механике, в которых приведен метод квантовомеханического расчета сечения неупругих реакций, [5] – в котором проводилось исследование суммарного сечения рекомбинации в различных пределах.
- 3 В работе было получено ограничение на пределы применимости формул для сечения рекомбинации (10).

Обе формулы работают при близких пределах на скорость, в большинстве работ по физике частиц и плазмы [1, 4, 7, 8] используют Крамерса. В работах [3, 9] существует явное упоминание возможности классического расчета сечения рекомбинации. При низких энергиях, характерных для проблем космологии классическая формула тоже имеет место быть, но не хватает экспериментальных данных, чтобы проверить ее соответствие эксперименту.

Спасибо за внимание!

Список литературы

-  D. R. Bates. Atomic and molecular processes. т. 13. Elsevier, 2012.
-  К.М. Belotsky, Е.А. Esipova и А.А. Kirillov. "On the classical description of the recombination of dark matter particles with a Coulomb-like interaction". в: Physics Letters B (окт. 2016), с. 81–86. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.08.009.
-  Pavel Vyacheslavovich Elyutin. "Classical recombination cross section". в: Теоретическая и Математическая Физика 34.2 (1978), с. 180–184.
-  D. E. Kaplan и др. "Atomic dark matter". в: Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 2010.05 (2010), с. 021.
-  Igor Kotelnikov и А. Milstein. "Electron radiative recombination with a hydrogen-like ion". в: (окт. 2018).
-  Н. А. Kramers. "XСIII. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum". англ. в: Philosophical Magazine Series 6 46.275 (1923). ISSN: 1941-5982; 1941-5990.
-  LA Vajnshtejn. "I.I. Sobelman, E.A. Ukov, Excitation of Atoms and Spectral Lines Broadening, 253P". в: The Science (1979).
-  Benedict Von Harling и Kalliopi Petraki. "Bound-state formation for thermal relic dark matter and unitarity". в: Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 2014.12 (2014), с. 033.
-  Ya. B. Zeldovich и M. Yu. Khlopov. "On the concentration of relic magnetic monopoles in the universe". в: Physics Letters B 79.3 (1978), с. 239–241.
-  Г. А. Бете. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматлит, 1960.
-  Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2004.
-  Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Теория поля. М.: Физматлит, 2012.
-  А. Мессиа. Квантовая механика. Наука, 1978.