

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 53.01

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

О КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ ОПИСАНИИ СЕЧЕНИЯ РЕКОМБИНАЦИИ
ЧАСТИЦЫ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Научный руководитель

_____ К. М. Белоцкий

Выполнил

_____ Д. С. Калашников

Москва 2020

Содержание

Содержание	1
1 Введение	2
1.1 Рекомбинация.	2
1.2 Принцип соответствия.	2
2 Задачи:	3
3 Формула для классического сечения рекомбинации	4
3.1 Вывод классического сечения в статье Елютина	4
3.2 Вывод классической формулы в теории поля Ландау	4
3.3 Оценка характерного размера системы	6
4 Формула Крамерса	7
4.1 Вывод формулы из статьи Крамерса	7
4.2 Вывод общей формулы рекомбинации в статье Мильштейна	7
5 Сравнение пределов применимости формул	8
6 Заключение	9

1 Введение

В настоящей работе проводилось исследование сечения рекомбинации электронов в поле кулоновского потенциала притяжения ядра. В дипольном приближении для расчета сечения рекомбинации используются две формулы: основанная на классической физике (1) и формула Крамерса (2). Необходимо четко определить пределы применимости данных формул, а также определить, как квантовая формула переходит в классический случай, исходя из принципа соответствия.

$$\sigma_{cl} = (4\pi)^{2/5} \pi \frac{\alpha^2}{\mu^2} \frac{1}{v^{14/5}}, \quad (1)$$

$$\sigma_q = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^3 \ln(v^{-1})}{\mu^2 v^2}. \quad (2)$$

1.1 Рекомбинация.

Рекомбинация как термин имеет несколько областей применения:

1. **Космология.** Эпоха развития Вселенной при $z \approx 1100$, когда плазма остыла до температур, при которых возможно образование протонов. После этого становится возможным образование электрически нейтральных атомов водорода. Количество заряженных ионов резко уменьшилась, что привело к увеличению длины свободного пробега фотонов. После рекомбинации фотоны могут свободно перемещаться не взаимодействуя с веществом.
2. **Плазма.** Рекомбинация представляет собой процесс присоединения электрона к иону, приводящий к снижению заряда иона на единицу рекомбинация. В нашей задаче характерным отличием от рекомбинации в плазме является то, что в реальной плазме количество связанных состояний, на которые может рекомбинировать электрон ограничено.
3. **В текущей задаче.** Рекомбинация – процесс перехода свободного электрона в связанное состояние в поле водородоподобного ядра.

1.2 Принцип соответствия.

Принцип соответствия – это фундаментальный принцип лежащий в построении любой современной научной теории. Он заключается в следующем: любая новая научная теория, должна включать старую теорию и ее результаты, как частный случай. При условии, что эти результаты были корректны и соответствовали получаемым экспериментальным данным.

Принцип соответствия опирается на общую логику построения теории, поэтому может использоваться как сильный инструмент в любой научной теории. Примером использования принципа соответствия является переход формул для преобразования координат и времени при малых скоростях к формулам преобразования Галилея.

В данной работе мы рассматриваем принцип соответствия между квантовым и классическим описанием сечения рекомбинации.

2 Задачи:

1. Ознакомление со статьей [3], в которой было получено ограничение на начальную относительную скорость движения частиц, при котором применима классическая формула.
2. Ознакомление с выводом классической формулы (1), полученным в статье [4] Елютиным. Получение условий, при которых применима данная формула.
3. Ознакомление с выводом классической формулы (1), полученным в учебнике по Теории поля Ландау и Лифшица [12]. Получение условий, при которых этот вывод применим.
4. Оценка пределов применимости формулы классического сечения рекомбинации.
5. Ознакомление с выводом формулы Крамерса (2), полученным в статье [6]. Определение пределов ее применимости с учетом вывода.
6. Ознакомление с выводом формулы Крамерса (2), исходя из статьи Мильштейн А. И. [5].
7. Сопоставить пределы применимости формул (1) и (2).

3 Формула для классического сечения рекомбинации

3.1 Вывод классического сечения в статье Елютина

Чтобы определить пределы применимости классического сечения рекомбинации, необходимо понимать физические приближения, использованные при его выводе. Первоначально был рассмотрен вывод классического сечения рекомбинации, произведенный в работе [4].

В выводе активно используется понятие дипольного излучения: в данной модели условием падения является переход кинетической энергии налетающей частицы в дипольное излучение за время ее движения. Для дипольного излучения использовалась формула Лармора (3):

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} (\ddot{r})^2. \quad (3)$$

Это представление применимо при характерном размере системы много меньше длины излучаемой волны и скорости много меньшей скорости света:

1. $\lambda \ll r$,
2. $v \ll 1$.

Иначе это условие можно охарактеризовать так: излучаемый свет может быть рассмотрен как плоская волна.

Также при вычислении интеграла (4), соответствующего потере энергии на излучение, было произведено пренебрежение изменением траектории частицы от параболической.

$$E_- = -\beta^2 \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{r^4(t)}. \quad (4)$$

Условие на скорость выполняется как для классического, так и для квантового сечения рекомбинации, скорость налета частиц много меньше скорости света. По этому условию классическая формула сечения рекомбинации будет применима тогда же, когда и формула для квантового приближения. Из данных выкладок можно сделать вывод: применимость классической формулы (1) будет зависеть от характерного размера системы зарядов, а также от длины волны излучаемого света.

3.2 Вывод классической формулы в теории поля Ландау

Классическую формулу (1) также можно получить исходя из рассуждений, представленных в [12]. Для проверки представленных выше выкладок, необходимо провести оценку условий применимости этих рассуждений.

Рассматривается поле системы зарядов на расстояниях, далеких от самой системы. $\mathbf{R} \approx R_0 - \mathbf{nr}$. Для этого необходимо выполнение двух условий: $a_0 \ll r$, $\lambda \ll r$. Поле, создаваемое движущимися зарядами, может быть описано с помощью формул для запаздывающих потенци-

алов:

$$\phi = \frac{1}{R_0} \int \rho_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c} dV$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c} dV$$

Также пренебрежем временем $\frac{\mathbf{rn}}{c}$ в подынтегральном выражении. Это можно сделать, если характерные размеры системы будут меньше длины излучаемого света. Это условие можно представить иначе: $v \ll c$. Данное приближение называется *дипольным* и для него характерна простая форма записи магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 R_0} \frac{d}{dt} \int \rho_{t-R_0/c} \mathbf{v} dV = \frac{1}{c^2 R_0} \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{v} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]$$

В этом приближении находят вектор Пойнтинга в плоской волне $\mathbf{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \mathbf{n}$. Интенсивность излучения dI на элемент телесного угла do определяется как количество энергии, проходящей через элемент шаровой поверхности $df = R_0^2 do$ с центром в начале координат и радиуса R_0 . То есть интенсивность:

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 do.$$

Далее в полученную формулу подставляем поле и векторный потенциал (3.2) нашей системы зарядов, интегрируем по телесному углу:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2. \quad (5)$$

При столкновении двух заряженных частиц:

$$\Delta E = \frac{\mu v_0^5}{3c^3 Z e^2} t g^3 \frac{\chi}{2} G(\chi) \left(\frac{e}{m} - \frac{Ze}{m_{nuc}} \right)^2 \quad (6)$$

$$G(\chi) = (\pi + \chi) \left(1 + 3t g^2 \frac{\chi}{2} \right) + 6t g \frac{\chi}{2}$$

Где под χ понимается положительный угол, определяемый из соотношения $\text{ctg} \frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \rho}{Ze^2}$, m_{nuc} — масса ядра (Кулоновского центра), $\mu = \frac{m \cdot m_{nuc}}{m + m_{nuc}} \approx m$ — приведённая масса, ρ — прицельный параметр налетающего электрона, v_0 — скорость в системе центра масс.

Учитывая, что масса электрона много меньше массы ядра, то $v_0 = v$ можно считать скоростью налетающего электрона, а слагаемым $\frac{Ze}{m_{nuc}}$ в формуле (6) можно пренебречь. Если устремить v к нулю, то и $\text{ctg} \frac{\chi}{2}$ будет стремиться к нулю, тогда $\chi \rightarrow \pi$.

В данном пределе получаем $G(\chi) \approx 6\pi t g^5 \frac{\chi}{2}$. Далее необходимо положить $\Delta E = \frac{mv^2}{2}$, и после элементарных преобразований опять получаем формулу (1).

Как показано в работах [3; 4] область применения классической формулы будет задаваться

неравенством:

$$Z^4 \left(\frac{c}{v}\right)^2 \gg \alpha^{-5}. \quad (7)$$

Ограничения на эти выкладки такие же, как в статье [4]. Скорость меньше скорости света. Также присутствует условие на измерение поля в волновой зоне, которому в данной работе применения найдено не было.

Данные выкладки показывают, что применимость данной формулы сильно ограничена: не учитываются поправки в излучение, связанные магнитным моментом, квадрупольным моментом, которые при близких расстояниях будут играть важную роль. Также не позволит использовать формулу (1) для релятивистских частиц ограничение на скорость налетающих частиц.

3.3 Оценка характерного размера системы

Чтобы рассмотреть первое условие, определим характерный размер системы. Поле Кулона является дальнедействующим полем и не имеет характерную длину, поэтому характерный размер необходимо подобрать иначе, чем радиус взаимодействия. Будем рассматривать нашу систему как диполь, тогда ее характерный размер a_0 — расстояние между частицами l , когда поле притяжения оказывает влияние на частицу соизмеримое с кинетической энергией $E_k \sim \alpha_y / r$. Из закона сохранения энергии и этого соотношения получаем оценку для размера системы:

$$a_0 = \frac{2\alpha}{mv^2}. \quad (8)$$

Данный характерный размер системы является размерным коэффициентом в формуле Резерфорда.

4 Формула Крамерса

4.1 Вывод формулы из статьи Крамерса

Вывод в статье Крамерса основан на классической формуле потерь энергии свободного электрона, падающего на положительно заряженное ядро. Для эллиптической траектории рассчитываются компоненты ускорения электрона при падении, эти компоненты подставляются в формулу для дипольного излучения (5). Далее полагается, что потеря энергии электрона происходит посредством выброса кванта монохроматического света $h\nu$. Электрон при этом либо продолжит свободное движение, либо перейдет в связанное с ядром состояние, описанное теорией Бора. Полагается, что определенные интервалы частот в излученном свете в классической формуле соотносятся с процессами, в которых электрон переходит в определенное стационарное состояние. Определяется разность частот между двумя близкими состояниями:

$$\Delta\nu \sim \frac{2\pi^2 N^2 e^4 m}{h^3} \left(\frac{1}{(n-1/2)^2} - \frac{1}{(n+1/2)^2} \right) \sim \frac{4\pi^2 N^2 e^4 m}{n^3 h^3}$$

В статье Крамерса [6] не дается формула (2) в таком виде. В статье приведены положения, которые могут быть использованы для получения искомой формулы. Исходя из выражения для σ_n – сечение рекомбинации определенным уровнем (на определенный уровень):

$$\sigma_n = \frac{32\pi\alpha^3 a_0^2}{3\sqrt{3}} \frac{\omega_0}{\omega(\omega - \omega_0 n^{-2})} \frac{1}{n^3}$$

Заменив суммирование по n интегрированием от 1 до $+\infty$ можно получить полное сечение рекомбинации. В данной формуле ω – частота фотона, выпущенного при рекомбинации, а ω_0 – деленная на \hbar , – энергия связи основного состояния.

$$\sigma_q = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \alpha r_0^2 Z^2 c^2 \cdot \frac{\ln \frac{Zc\alpha}{v}}{v^2}$$

В статье указаны следующие условия: отклонение момента частицы от классической траектории должно быть мало, скорость налетающего электрона много меньше скорости света. Также в статье указано, что частота излучаемого света должна соответствовать частоте перехода между связанными состояниями.

4.2 Вывод общей формулы рекомбинации в статье Мильштейна

В работе [5] проводят исследование излучательной рекомбинации. В ней представлены исследование сечений рекомбинации в связанные состояния с различным квантовым числом n , а также суммарное по всем уровням сечение рекомбинации. В данной работе приведена следующая формула для суммарного сечения рекомбинации:

$$\sigma_{rr} = \frac{16}{3} \pi^2 \alpha^3 a_B^2 \eta^2 \left[\int_0^\infty \frac{\eta'^2 \sinh(\varepsilon' - \varepsilon)}{\eta' |\eta^2 - \eta'^2| \sinh(\pi\eta) \sinh(\pi\eta')} \left(\xi \frac{d}{d\xi} |F(\xi)|^2 \right) d\eta' - \coth \pi\eta + 1 \frac{1}{\pi\eta} \right], \quad (9)$$

где $\eta = \sqrt{J/\varepsilon} = Ze^2/\hbar v$ – безразмерный параметр, связанный с моментом частицы и ее энергией(определяется начальными условиями). Для $\eta \gg 1$ или $Ze^2/c\hbar \gg v/c$ в статье приведено асимптотическое выражение (9):

$$\sigma_{rr} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\alpha^3 a_B^2 \eta^2 \ln \eta. \quad (10)$$

Это выражение с логарифмической точностью совпадает с (2).

5 Сравнение пределов применимости формул

Полученные ограничения на скорость для формул (1) и (2):

$$\begin{aligned} Z^2 \alpha^{5/2} &\gg \frac{v}{c} \\ Z \alpha &\gg \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (1) и (2) отличаются существенным образом: при выполнении условия (7) сечения отличаются на несколько порядков. Классическое сечение имеет не характерную ($\frac{1}{v^2} \ln \frac{const}{v}$) зависимость от скорости для медленных частиц в Кулоновском поле; в формулы (1) и (2) постоянная тонкой структуры входит в разных степенях, сечения по-разному зависят от заряда ядра.

6 Заключение

Была изучена литература, посвященная выводу формулы в классическом приближении (1): [3] – работа, где ограничение на скорость было получено из действия, [4] – работа Елютина, где ограничение на скорость получено, как ограничение на момент.

Были изучены источники, посвященные выводу формулы в квантовом приближении (2): [6] – в котором впервые была сформулирована формула исходя из полуклассических принципов, [10; 11; 13] – учебники по квантовой механике, в которых приведен метод квантовомеханического расчета сечения неупругих реакций, [5] – в котором проводилось исследование суммарного сечения рекомбинации в различных пределах.

В работе было получено ограничение на пределы применимости формул для сечения рекомбинации (11).

Обе формулы работают при близких пределах на скорость, в большинстве работ по физике частиц и плазмы [1; 2; 7; 8] используют Крамерса. В работах [4; 9] существует явное упоминание возможности классического расчета сечения рекомбинации. При низких энергиях, характерных для проблем космологии классическая формула тоже имеет место быть, но не хватает экспериментальных данных, чтобы проверить ее соответствие эксперименту.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Atomic dark matter / D. E. Kaplan [и др.] // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2010. — Т. 2010, — С. 021.
2. *Bates D. R.* Atomic and molecular processes. Т. 13. — Elsevier, 2012.
3. *Belotsky K., Esipova E., Kirillov A.* On the classical description of the recombination of dark matter particles with a Coulomb-like interaction // *Physics Letters B*. — 2016. — Окт. — С. 81—86.
4. *Elyutin P. V.* Classical recombination cross section // *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*. — 1978. — Т. 34, — С. 180—184.
5. *Kotelnikov I., Milstein A.* Electron radiative recombination with a hydrogen-like ion. — 2018. — Окт.
6. *Kramers H. A.* XCIII. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum // *Philosophical Magazine Series 6*. — 1923. — Т. 46,
7. *Vajnshtejn L. I.* Sobelman, E.A. Ukov, Excitation of Atoms and Spectral Lines Broadening, 253P // *The Science*. — 1979.
8. *Von Harling B., Petraki K.* Bound-state formation for thermal relic dark matter and unitarity // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2014. — Т. 2014, — С. 033.
9. *Zeldovich Y. B., Khlopov M. Y.* On the concentration of relic magnetic monopoles in the universe // *Physics Letters B*. — 1978. — Т. 79, — С. 239—241.
10. *Бете Г. А.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М. : Физматлит, 1960.
11. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М. : Физматлит, 2004.
12. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля. — М. : Физматлит, 2012.
13. *Мессиа А.* Квантовая механика. — Наука, 1978.