

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 53.01

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

Исследование возможности получения ограничения на плотность  
черных дыр в случае их захвата звездным скоплением.

Научный руководитель \_\_\_\_\_ К. М. Белоцкий

Выполнил \_\_\_\_\_ М. А. Краснов

Москва 2020

# Содержание

1	Введение . . . . .	3
1.1	Что такое ПЧД? . . . . .	3
1.2	Роль ПЧД в данной работе . . . . .	4
2	Карликовая галактика Эриданус II . . . . .	5
3	Захват ПЧД скоплением . . . . .	8
4	Заключение . . . . .	12

# 1 Введение

## 1.1 Что такое ПЧД?

Массивные компактные объекты, черные дыры, могут иметь разное происхождение. Разделяют астрофизическое и первичное происхождение черных дыр. Астрофизическими называют черные дыры, которые образовались в результате коллапса достаточно массивной звезды. С ПЧД всё намного сложнее. Первичные черные дыры (ПЧД) были источником пристального интереса в течение почти 50 лет, несмотря на то, что до недавнего времени не было явных свидетельств доказывающих их существование. Причина такого интереса связана с тем, что ничего не запрещает таким черным дырам рождаться в ранней вселенной. Другой причиной интереса является то, что такие черные дыры могут рождаться в очень широком диапазоне масс. В частности, они могут быть настолько легкими, чтобы излучение Хокинга было существенным [1]. Это еще не подтверждено экспериментально, и остаются основные концептуальные загадки, связанные с этим процессом, и сам Хокинг пытался их решить. Тем не менее, это открытие общепризнано как одно из ключевых достижений физики 20 века, поскольку оно прекрасно объединяет общую теорию относительности, квантовую механику и термодинамику. Тот факт, что Хокинг пришел к этому открытию только благодаря рассмотрению свойств ПЧД показывает, что изучение чего-либо может быть полезным, даже если оно и не существует!

На плотность ПЧД наложен ряд ограничений в зависимости от их массы, в том числе за счет эффекта Хокинга. Но среди ограничений на ПЧД есть так называемые динамические ограничения — за счет гравитационного взаимодействия с другими объектами. К числу таких ограничений относится полученное на основе рассмотрения процесса захвата ПЧД звездным скоплением и возможным последующим разрушением этого скопления. Так же это может приводить к образованию черной дыры промежуточной массы за счет аккреции захватившейся ПЧД. До сих пор о существовании черных дыр промежуточных масс нет однозначных свидетельств [2]. Это может быть источником дополнительного ограничения на ПЧД.

Ограничения могут быть пересмотрены в случае модели кластера ПЧД [3]. В случае захвата кластера ПЧД скоплением звезд ситуация может оказаться нетривиальной. В настоящей работе предпринимается попытка проанализировать возможные динамические эффекты прохождения сквозь скопление звезд как кластера ПЧД, так и одиночных.

ПЧД могли образоваться в ранней Вселенной. Скорее всего благодаря высокой плотности энергии в ранние времена. Поэтому можно дать грубое предположение о массе ПЧД. Верхней оценкой, конечно, будет масса горизонта.

$$M \sim \frac{c^3 t}{G} \sim 10^{15} \left( \frac{t}{10^{-23} c} \right) \text{ г} \quad (1)$$

Отсюда понятно, что с возрастом Вселенной верхняя граница массы ПЧД растет, например, ПЧД родившаяся через время Планка после рождения Вселенной, не может

быть тяжелее  $10^{-5}$ г. Высокая плотность ранней Вселенной является необходимым, но не достаточным условием для образования ПЧД. Одной возможностью является наличие первичных неоднородностей в ранней Вселенной, такие, что сверхплотные участки могли остановить расширение и реколлапсировать.

Каким бы ни был источник неоднородностей, образование ПЧД увеличилось бы, если бы произошло резкое уменьшение давления - например, в эпоху КХД. Другая возможность заключается в том, что ПЧД могли образоваться спонтанно на каком-то своего рода фазовый переход, даже если не было предшествующих неоднородностей, например, от столкновений пузырьков или от коллапса космических струн, ожерелий или доменных стенок.

Существует множество различных моделей распределения ПЧД по их массам. Самая популярная - логнормальное распределение. см статью сделать здесь ссылку!

ПЧД в течение своей жизни испаряются. Из-за излучения Хокинга. Масштабы времени, на которых происходит испарение ПЧД -  $\tau \propto M^3$ , где  $M$  - начальная масса ПЧД. Возникает закономерный вопрос : ПЧД какой начальной массы, образовавшиеся в ранней Вселенной на текущий момент испарились полностью? Тогда  $\tau$  надо приравнять возрасту Вселенной и получится оценка  $M_* \approx 5 \times 10^{14}$ г. Хотя это и не исключает возможность наблюдения таких легких ПЧД, но точно говорит об их сравнительно небольшом количестве по сравнению с количеством более тяжелых ПЧД, так как образование легких ПЧД наиболее вероятно именно в ранней Вселенной.

## 1.2 Роль ПЧД в данной работе

Темная материя, которая скорее всего существует, хотя её существование ещё не доказано, вполне может хотя бы частично состоять из ПЧД. В этой работе будет рассмотрено влияние ПЧД на эволюцию звёздных скоплений. Очень важная характеристика

ПЧД - ограничение на их долю в темной материи. А именно  $f_{\text{РВН}} = \frac{\rho_{\text{РВН}}}{\rho_{\text{DM}}}$ , что мож-

но трактовать как плотность ПЧД, конечно, относительную, подразумевая, что ПЧД это компонента темной материи. Это выражение можно переписать следующим образом. Разделим числитель и знаменатель дроби справа на  $\rho_C$  - критическую плотность,

тогда получим  $f_{\text{РВН}} = \frac{\Omega_{\text{РВН}}}{\Omega_{\text{DM}}}$ . В соответствии с этим,  $f_{\text{РВН}}$  можно так же трактовать

как долю ПЧД в темной материи. О том, как получить это ограничение на плотность ПЧД и пойдет речь в этой работе. Однако оно будет получено на примере карликовой галактики Эриданус II, а потому приближения, которые здесь будут использованы, неприменимы к другим космическим структурам. А затем будет оценена возможность захвата ПЧД звездными скоплениями в карликовых галактиках, исходя из тех же приближений. Ниже приведен график, показывающий известные ограничения на плотность ПЧД для разных космических структур в зависимости от масс ПЧД. По вертикали отложены значения  $f_{\text{РВН}}$  для данной массы ПЧД. Каждое ограничение на плотность ПЧД получено разными методами. Небольшое пояснение к рисунку - различные типы испарения (пурпурный), динамическое трение (красный), гравитационное (голу-

бой), крупномасштабные структуры (зеленый) и аккреция (оранжевый).

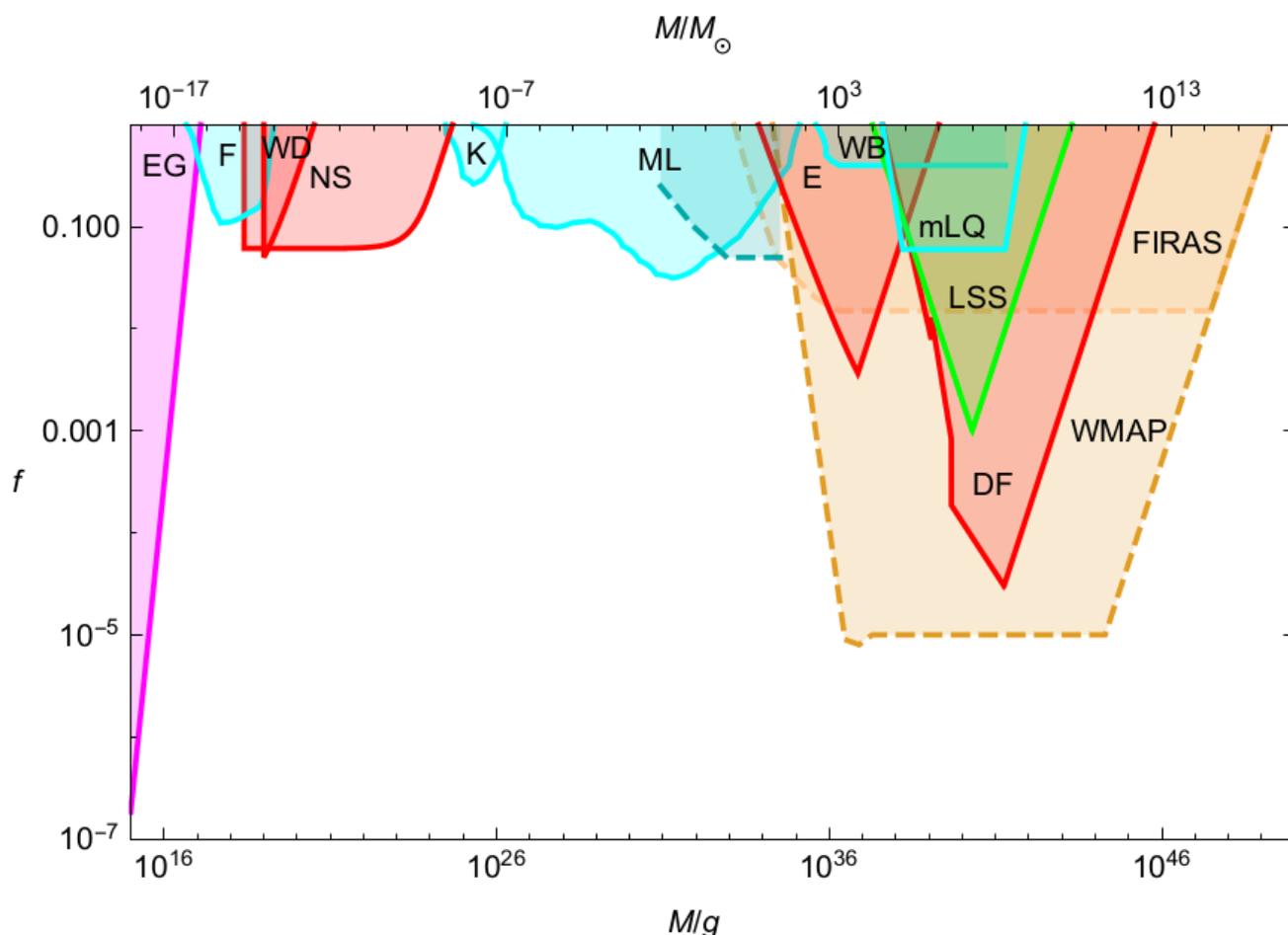


Рисунок 1 — Ограничения на долю ПЧД в темной материи

Отмеченный буквой E красный треугольник это именно то, что будет нас интересоваться. Он соответствует упомянутому выше Эриданусу II.

Для обзора я приведу аналитические выражения для некоторых ограничений на плотность ПЧД, показанных на графике в таблице 1. Было бы логично дополнить эту таблицу ограничением на плотность ПЧД в Эриданусе II, но оно будет выведено ниже здесь.

## 2 Карликовая галактика Эриданус II

Эриданус II это карликовая галактика из числа тех, что содержат в себе звездное скопление. В центре Эридануса находится шаровое скопление, хотя в этом отношении он не уникален. Здесь будет дано краткое изложения содержания статьи Timothy D. Brandt [4].

Звездное скопление - это динамическая среда, в которой гравитационные взаимодействия приводят к обмену энергией между звездами. Эти взаимодействия застав-

Диапазон масс	Ограничение	Структура
$500M < M < 10^3 M_\odot$	$f(M) < \frac{500M_\odot}{M}$	Wide binaries
$10^3 M < M < 10^8 M_\odot$	$f(M) < 0.4$	Wide binaries
$M > 10^4 M_\odot$	$f(M) < \max \left[ \frac{10^4 M_\odot}{M}, \frac{M}{10^{10} M_\odot} \right]$	Lyman $\alpha$ -clouds

Таблица 1 — Ограничения на плотность ПЧД

ляют систему динамически релаксировать; эти взаимодействия можно аппроксимировать как диффузию, приближение Фоккера-Планка.

Каковы условия применимости такого приближения? Мы будем считать, что все столкновения независимы друг от друга и происходят только между парой объектов. Так же требуется пренебречь влиянием звездного скопления на это столкновение.

Когда присутствует диапазон масс, в котором заключены массы звезд в скоплении, звездные взаимодействия приводят к массовой сегрегации, при которой самые массивные тела имеют наиболее компактное в пространстве распределение. Взаимодействия двух тел, как правило, вследствие обмена энергией, уравнивают значения кинетической энергии объектов разных масс в данном секторе. В системе, состоящей из МАСНО массами  $m_a > 1M_\odot$  и звезд, звезды получают энергию от МАСНО; компактная звездная система расширяется. Это можно рассматривать как диффузное расширение, при котором слабые рассеяния постепенно меняют скорость каждой звезды. Сумма коэффициентов диффузии для параллельных и перпендикулярных составляющих вектора скорости описывает эволюцию кинетической энергии звезды. Предполагая изотропное максвелловское распределение скоростей для частиц темной материи и локально однородное однородное распределение темной материи, соответствующий коэффициент диффузии будет

$$D [(\Delta v)^2] = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2(1 - f_{DM})\rho m_a \ln \Lambda \left[ \frac{\text{erf}(X)}{X} \right]}{\sigma} \quad (2)$$

В этой формуле  $\rho$ -плотность тёмной материи,  $\ln \Lambda$ -кулоновский логарифм,  $m_a$ -масса МАСНО,  $\sigma$ -дисперсия скоростей в галактике, а  $X = \frac{v_*}{\sqrt{2}\sigma}$  - отношение характерной относительной скорости движения звезд к дисперсии скоростей. Автор полагает звезды холодными по сравнению с тёмной материей. Поэтому можно положить  $v_* < \sigma \rightarrow X < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , из чего получаем, что  $\frac{\text{erf}(X)}{X} \approx 1$ , тогда формула 2 упростится

$$D [(\Delta v)^2] = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2(1 - f_{DM})\rho m_a \ln \Lambda}{\sigma} \quad (3)$$

Теперь рассмотрим кулоновский логарифм

$$\ln \Lambda \approx \ln \left( \frac{b_{\max} \langle v^2 \rangle}{G(m_* + m_a)} \right) \approx \ln \left( \frac{r_h \sigma^2}{G(m_* + m_a)} \right) \quad (4)$$

Кулоновский логарифм нечувствителен к изменениям параметров. Поэтому для определенности положим  $b_{\max} = r_h$ , где  $r_h$ -радиус, на котором излучается половина светимости скопления.

Если темная материя это смесь МАСНОs и легких частиц WIMP (weakly interacting massive particles), то последние будут динамически не нагревать систему, а охлаждать. Соответствующий эффект тоже описывается коэффициентом диффузии

$$v_{\parallel} D [\Delta v_{\parallel}] = - \frac{4\pi v_* G^2 (1 - f_{\text{DM}}) \rho m_* \ln \Lambda}{\sigma^2} G(X) \quad (5)$$

Где  $G(X) = \frac{1}{2X^2} \left[ \text{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} \exp -X^2 \right]$ , с которой упрощение выше уже не сработает. Надо сравнить эффекты нагрева и охлаждения.

$$\frac{\text{heating}}{\text{cooling}} \sim \frac{m_a \sigma}{\sqrt{2} m_* v_*} \left( \frac{\text{erf}(X)}{X G(X)} \right) \left( \frac{f_{\text{РВН}}}{1 - f_{\text{РВН}}} \right) \quad (6)$$

Видно, что динамическое трение соотносится с динамическим охлаждением как соотносятся массы ПЧД и звезд. Можно пренебречь охлаждением, критерием проверки правильности этого пренебрежения будет отсутствие  $f_{\text{РВН}}$  на массах ПЧД порядка массы солнца, то есть характерной массы звезды.

Если звездное скопление заключено в однородном шаре темной материи постоянной плотности  $\rho$ , тогда потенциальная энергия на единицу массы даётся выражением

$$\frac{U}{M} = \text{const} + \beta G \rho r_h^2 - \alpha \frac{GM_*}{r_h} \quad (7)$$

В этом выражении  $M_*$ -звездная масса скопления, а коэффициенты  $\beta$  и  $\alpha$  зависят от того, как распределены массы внутри скопления. Для Эридануса эти значения -  $\alpha \approx 0.36$  и  $\beta \approx 7.2$ . В соответствии с теоремой вириала

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} U \quad (8)$$

Чтобы получить уравнение, описывающее эволюцию скопления, первым шагом будет деление уравнения на массу скопления  $M$ .

$$\frac{E_{\text{tot}}}{M} = \frac{1}{2} \frac{U}{M} \quad (9)$$

Теперь берем производную по времени, помня, что соответствующий коэффициент диффузии показывает среднее значение производной заданной величины по времени, т.е.

$$D(\Delta E) = \overline{\dot{E}}$$

Считая, что  $r_h = r_h(t)$ , продифференцируем выражение 9 по времени и усредним. Получим

$$\frac{\overline{\dot{E}_{\text{tot}}}}{M} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\dot{U}}}{M}$$

Потребуется следующее выражение для коэффициентов диффузии

$$D[(\Delta E)] = M \left( v_{\parallel} D[\Delta v_{\parallel}] + \frac{1}{2} D[(\Delta v)^2] \right) \approx \frac{M}{2} D[(\Delta v)^2] \quad (10)$$

А теперь подставим выражения для производных, опуская усреднение, получится

$$\alpha \frac{GM_*}{r_h^2} \dot{r}_h + 2\beta G \rho r_h \dot{r}_h = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 f_{\text{DM}} \rho m_a \ln \Lambda}{\sigma} \quad (11)$$

Разрешая относительно производной получится

$$\dot{r}_h = \frac{dr_h}{dt} = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 f_{\text{DM}} m_a \ln \Lambda}{\sigma} \left( \alpha \frac{GM_*}{\rho r_h^2} + 2\beta G r_h \right)^{-1} \quad (12)$$

Полученное выражение совпадает с данным в статье вышеуказанного автора. Сделано всё это ради того, чтобы разобраться с алгеброй коэффициентов диффузии и с помощью них дать уже совершенно другую оценку другого явления.

Я обещал привести аналитическое выражение для ограничения на плотность ПЧД в Эриданусе :

$$\begin{aligned} M < 10^3 M_{\odot}, f_{\text{РВН}} < 0.5 \left( 1 + \frac{0.046 M_{\odot} \text{пк}^{-3}}{\rho} \right) \left( \frac{10 M_{\odot}}{M} \right) \left( \frac{\sigma}{10 \text{км с}^{-1}} \right) \times \\ \times \left( 1 + 0.1 \ln \left[ \frac{10 M_{\odot}}{M} \left( \frac{\sigma}{10 \text{км с}^{-1}} \right)^2 \right] \right)^{-1} \\ M > 10^3 M_{\odot}, f_{\text{РВН}} < \frac{M}{10^6 M_{\odot}} \end{aligned}$$

Приведу теперь для сравнения графики ограничений на плотность ПЧД полученный самостоятельно и взятый из статьи (слева мой, справа из статьи [5])

### 3 Захват ПЧД скоплением

Неожиданно оказалось, что диффузное приближение дает правильную оценку массы, на которую приходится пик поглощения ПЧД скоплениями, а именно  $\sim 30 M_{\odot}$ . Если

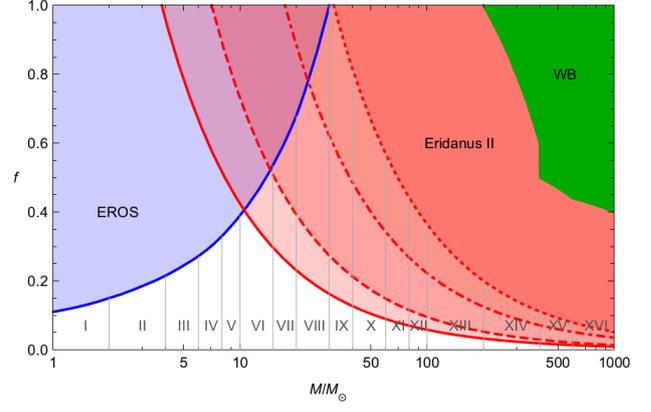
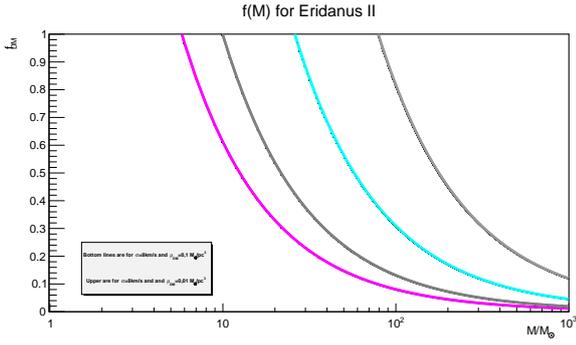


Рисунок 2 — Ограничения на плотность ПЧД

предположить, что ПЧД на расстоянии бесконечно далеко от скопления ( $r \gg r_h$ ), имеет скорость  $v$ , то скопление для захвата ПЧД должно совершить работу, по модулю равную кинетической энергии ПЧД на бесконечности. Здесь я полагаю прицельный параметр равным нулю для простоты вычислений. Здесь я буду учитывать охлаждение звезд, то есть рассмотрю случаи, когда ПЧД не сможет отдать свою энергию скоплению ни за какое время. Я буду предполагать максвелловское распределение скоростей ПЧД, то есть вероятность для ПЧД иметь скорость меньше заданной  $v'$  будет равна

$$f = \operatorname{erf}\left(\frac{v'}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \sqrt{\frac{2v'}{\pi\sigma}} e^{-\frac{v'^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

Выпишу теперь выражения для коэффициентов диффузии, с которыми я буду работать.

$$D [(\Delta v)^2] = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 (1 - f_{DM}) \rho m_a \ln \Lambda}{\sigma} \left[ \frac{\operatorname{erf}(X)}{X} \right]$$

$$v_{\parallel} D [\Delta v_{\parallel}] = -\frac{4\pi v_* G^2 (1 - f_{DM}) \rho (m_a + m) \ln \Lambda}{\sigma^2} G(X)$$

$$D [\Delta E] = M \left( v_{\parallel} D [\Delta v_{\parallel}] + \frac{1}{2} D [(\Delta v)^2] \right) = \overline{\frac{dE}{dt}}$$

$$m_a v_a d\dot{v}_a = M \frac{2\sqrt{2}\pi G^2 f_{DM} \rho m_a \ln \Lambda \operatorname{erf}(X)}{\sigma X} - \frac{4\pi G^2 (1 - f_{DM}) \rho (m_a + m_*) \ln \Lambda}{\sigma} M G(X) \quad (14)$$

Здесь для упрощения я положил скорость относительного движения звезд  $v_* \approx \sigma$ . Таким образом задача сводится к сравнению времени пролета ПЧД через скопление

со временем, которое будет фигурировать в уравнении 14. Тогда оценка времени, за которое скопление поглотит кинетическую энергию ПЧД будет

$$t = \frac{m_a \sigma v^2}{4\pi M G^2 \rho \ln \Lambda} \cdot \frac{1}{m_a(1.2 - 2.6 f_{\text{PBH}}) + 1.2m(1 - f_{\text{PBH}})}$$

Для некоторых значений масс ПЧД приведу график, на вертикальной оси которого отмечено время, необходимое для поглощения энергии, а по горизонтали - массу ПЧД.

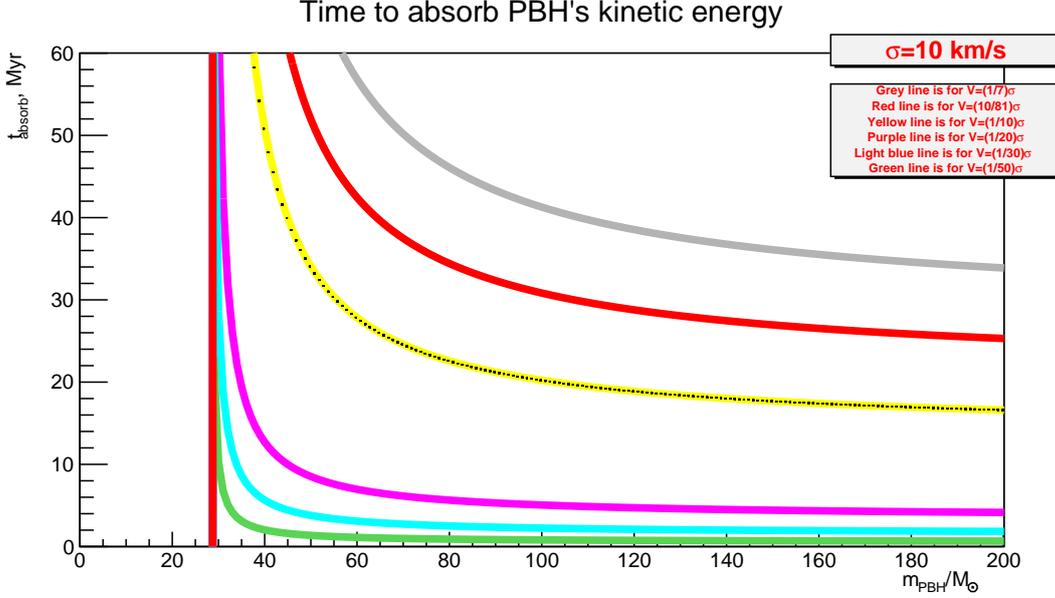


Рисунок 3 — Как быстро поглощается энергия ПЧД скоплением

Откуда видно, что ПЧД с массами легче  $30M_{\odot}$  не могут быть захвачены скоплением.

Самая простая оценка времени пролёта через скопление -

$$t_{\text{cross}} \sim \frac{2r_h}{v}$$

Приравнивая обе величины получим уравнение для максимальной скорости ПЧД на бесконечности и выразим её через массу ПЧД

$$v = 1.014 \sqrt[3]{\frac{m_a(1.2 - 2.6 f_{\text{PBH}}) + 1.2m(1 - f_{\text{PBH}})}{m_a}} \frac{\text{пк}}{10^6 \cdot \text{лет}} \quad (15)$$

Будем называть эту скорость критической. Эта величина зависит от массы, а значит для каждой конкретной массы будет своя вероятность обладать данной скоростью. Остаётся подставить эту скорость в выражение 13. Приведу график этой вероятности в зависимости от массы ПЧД.

Чтобы оценить количество событий захвата ПЧД скоплением за единицу времени, нужно знать концентрацию ПЧД. Ёе найти уже гораздо проще.

$$\rho_{\text{PBH}} = m_a n_{\text{PBH}} \rightarrow n_{\text{PBH}} = \frac{\rho_{\text{PBH}}}{m_a} = f_{\text{PBH}}(m_a) \frac{\rho_{\text{DM}}}{m_a} \quad (16)$$

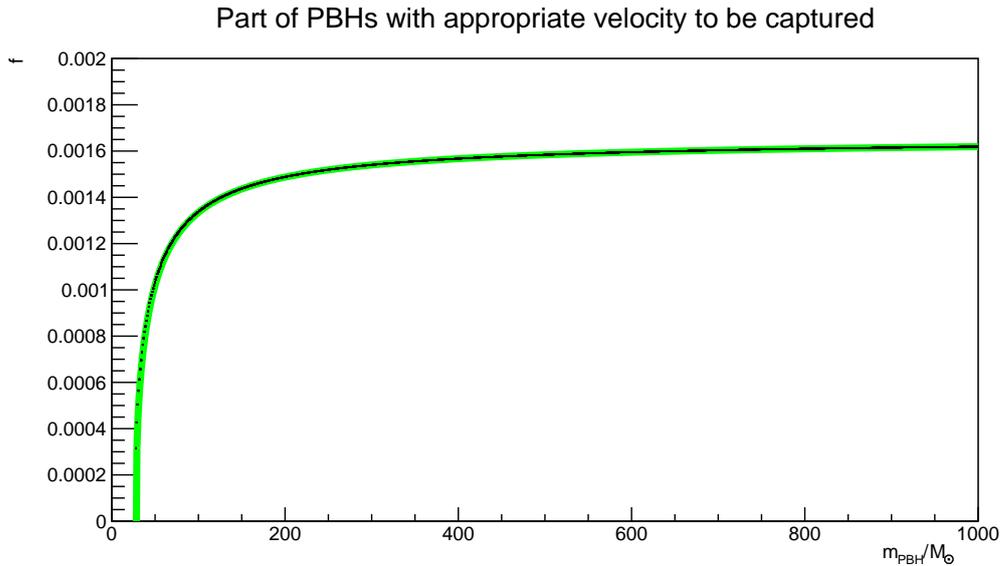


Рисунок 4 — Доля ПЧД со скоростью не больше критической

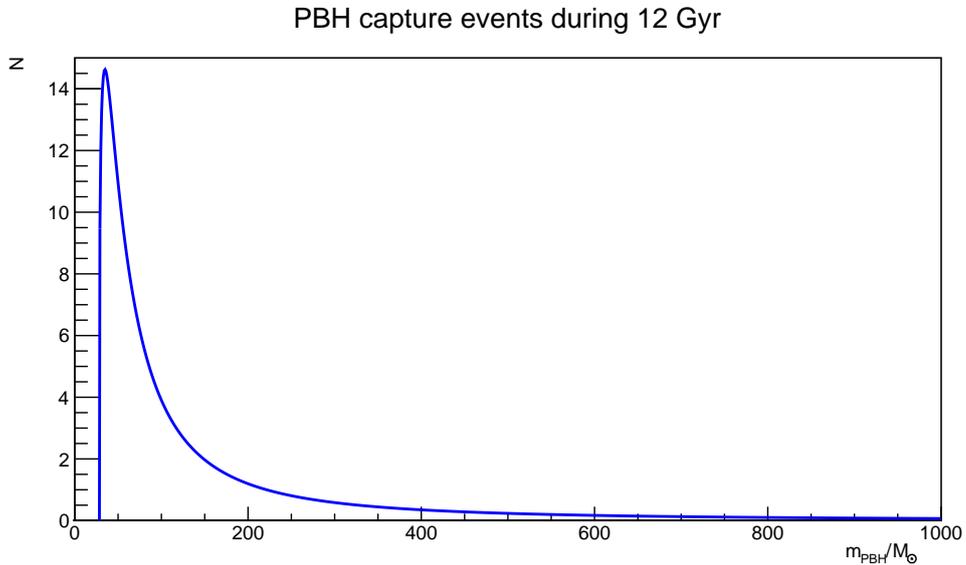


Рисунок 5 — Оценка числа событий захвата ПЧД для заданной массы

Тогда количество событий за единицу времени будет даваться выражением

$$N = n_{\text{PBH}} \sigma_{\text{сеч}} v f \quad (17)$$

Здесь  $\sigma_{\text{сеч}}$  это поперечное сечение звездного скопления, попав в которое ПЧД с данной скоростью может быть захвачена. Я сделаю очень завышенную оценку - положу эту величину полному поперечному сечению скопления.

Приведу график оценки событий захвата за время жизни галактики Эриданус II — Рис. 5.

Максимум этой зависимости приходится как раз на  $35M_{\odot}$ ! Конечно, сделанные приближения можно считать «игрушечными», но даже они дали наибольшую вероятность поглощения ПЧД в диапазоне масс, соответствующему реальным наблюдениям захвата ПЧД.

## 4 Заключение

В данной работе изучался динамический эффект при прохождении ПЧД сквозь скопление звезд. За основу бралось ограничение, полученное на плотность ПЧД, по данным о скоплении звезд в карликовой галактике Эриданус II (самое сильное ограничение в диапазоне масс ПЧД порядка массы кластера ПЧД). Получено:

- Оценка количества событий захвата ПЧД скоплением звезд.
- Установлена неприменимость коэффициентов диффузии к кластеру ПЧД.

В дальнейшем планируется продолжить изучить динамику звездных скоплений для того, чтобы иметь представление о динамике кластера ПЧД.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Hawking S. W.* Black hole explosions? — 1974. — Mar.
2. *Koliopanos F.* Intermediate Mass Black Holes: A brief review. — 2018.
3. Clusters of Primordial Black Holes / K. M. Belotsky [et al.] // The European Physical Journal C. — 2019. — Mar. — Vol. 79, no. 3.
4. *Brandt T. D.* Constraints on MACHO dark matter from compact stellar systems in ultra-faint dwarf galaxies // The Astrophysical Journal. — 2016. — June. — Vol. 824, no. 2. — P. L31.
5. *Carr B., Kühnel F., Sandstad M.* Primordial black holes as dark matter // Physical Review D. — 2016. — Oct. — Vol. 94, no. 8.