

Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ»

Отчет о научно-исследовательской работе на тему:
Динамическая эволюция скопления первичных
черных дыр

Научный руководитель
к.ф.-м.н. доц. каф. 40

_____ А. А. Кириллов

Выполнил
студент группы М19-115

_____ В. Д. Стасенко

Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение	2
2 Основные уравнения	4
2.1 Приближение Фоккера-Планка	4
2.2 Усреднение по орбитам	5
2.3 Конус потерь	8
2.4 Начальные и граничные условия	11
3 Метод решения уравнений	14
4 Результаты	17
5 Заключение	21
Список использованных источников	22

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза о том, что первичные черные дыры (ПЧД) могут формироваться в ранней Вселенной была предложена в [1]. Сейчас существует множество механизмов формирования ПЧД [2–7] и многих других работах (см. обзоры [8–10]). В этой работе мы концентрируемся на механизмах, которые ведут к образованию скоплений ПЧД [11–13]. Эти скопления возникают в результате квантовых флуктуаций на инфляционной стадии и могут пролить свет на множество проблем современной астрофизики и космологии [14; 15], среди которых можно выделить следующие:

1. Существование сверхмассивных черных дыр (СЧД) с массами $10^6 \div 10^{10} M_{\odot}$ в центрах галактических ядер [16–20] и на больших красных смещениях $z > 6$ [21–25]. Такие ЧД могут формироваться в результате столкновительной эволюции скоплений ПЧД.
2. Сливающиеся двойные ЧД, которые регистрируются гравитационно-волновыми интерферометрами LIGO/Virgo [26; 27], могут иметь первичное происхождение [28–32].
3. Реионизация Вселенной [33–35] может быть связана с излучением от маломассивных ПЧД с нейтральным газом [36–38].
4. Формирование галактик при больших красных смещениях $z > 10$ [39] может быть индуцировано скоплениями ПЧД [40].
5. Скрытая масса Вселенной может быть частично объяснена ПЧД [9; 10].

Решение перечисленных задач существенно зависит от структуры скопления на конкретный момент истории Вселенной. Поэтому понимание эволюции кластера ПЧД начинает играть решающую роль и является основной целью данной работы.

До сих пор полноценный анализ динамики кластера ПЧД не был осуществлен. В работах [41–43] используется N-BODY моделирование для изучения столкновительной динамики ПЧД внутри скопления. Однако данный метод имеет существенный недостаток — значительное увеличение

компьютерного времени с ростом числа ПЧД в скоплении как $\mathcal{O}(N^2)$. Обычно, N-BODY моделирование с такой вычислительной сложностью применяется для изучения динамики шаровых звездных скоплений (ШЗС). Однако, в отличие от ШЗС, СПЧД обладают существенно большим числом гравитирующих частиц $N > 10^6$. Это существенно ограничивает возможность применения прямого N-BODY моделирования к изучению динамики СПЧД.

Другой популярный подход, который применяется к изучению ШЗС, — решение кинетического уравнения Фоккера-Планка [44; 45]. Данный подход основан на том, что динамическая эволюция большинства гравитирующих систем происходит за счет парной релаксации, т.е. слабых, некоррелированных взаимодействий между частицами внутри системы. Однако сейчас это уже хорошо проработанная методика и включает в себя много дополнительной физики. Например, наличие массивной центральной ЧД в центре скопления [46] и возможность её роста за счет поглощения звёзд [47–51]. Возможность формирования двойных звездных систем в результате близких двухчастичных [52–54] и трехчастичных взаимодействий [55–57] звёзд. Слияния нейтронных и звезд и ЧД в плотных звездных скоплениях за счет эмиссии гравитационных волн [55] и непосредственные слияния звезд [58]. Вылет звезд из скопления, вызванный галактическим полем [59–62].

В данной работе мы используем усредненное вдоль орбит уравнение Фоккера-Планка для изучения динамики СПЧД.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения (Φ), — это кинетическое уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (1)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ — это интеграл столкновений. Если учитывать только взаимодействия при которых скорости ЧД изменяются незначительно, то интеграл столкновений принимает форму Фоккера-Планка:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (f \langle \Delta v_i \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (f \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle), \quad (2)$$

где $\langle \Delta v_i \rangle$, $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$ — это диффузионные коэффициенты. Как было показано в работе [63], если между частицами действуют обратноквадратные силы (что, в частности, имеет место в случае гравитации), то выражения для коэффициентов примут вид:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle &= -\Gamma \sum_b m_b (m + m_b) \frac{\partial h_b}{\partial v_i}, \quad h_b(\mathbf{v}) = \int \frac{f_b(\mathbf{v}_f)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_f|} d\mathbf{v}_f, \\ \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle &= \Gamma \sum_b m_b^2 \frac{\partial^2 g_b}{\partial v_i \partial v_j}, \quad g_b = \int f_b(\mathbf{v}_f) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_f| d\mathbf{v}_f, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Gamma = 4\pi G^2 \ln \Lambda$ ($\ln \Lambda$ — Кулоновский логарифм, $\Lambda \sim N$) и подразумевается суммирование по всем типам сближающихся частиц (в нашем случае сумма по всем массам).

Инвариантная форма уравнения (2) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - (f T^i)_{;i} + \frac{1}{2} (f S^{ij})_{;ij}, \quad (4)$$

где коэффициенты даются следующими формулами [63; 64]:

$$\begin{aligned} T^i &= \Gamma a^{ij} \frac{\partial H}{\partial v^j}, \\ S^{ij} &= \Gamma \left[a^{ik} a^{jl} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^k \partial v^l} - \Gamma_{kl}^m \frac{\partial G}{\partial v^m} \right) \right], \\ H &= \sum_b m_b (m + m_b) h_b(\mathbf{v}), \quad G = \sum_b m_b^2 g_b(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (5)$$

После некоторых преобразований можно упростить уравнение (4):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = -\frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} f \langle \Delta v^i \rangle)_{,i} + \frac{1}{2\sqrt{a}} (\sqrt{a} f \langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle)_{ij}, \quad (6)$$

где вместо ковариантного дифференцирования используется уже обычное, а коэффициенты даются следующими выражениями:

$$\langle \Delta v^i \rangle = T^i - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i S^{jk}, \quad \langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle = S^{ij}. \quad (7)$$

Легко показать, что они обладают следующими трансформационными свойствами при переходе к другой системе координат:

$$\begin{aligned} \langle \Delta V^\lambda \rangle &= \frac{\partial V^\lambda}{\partial v^i} T^i(v) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V^\lambda}{\partial v^i \partial v^j} - \frac{\partial V^\lambda}{\partial v^k} \Gamma_{ij}^k(v) \right) S^{ij}(v), \\ \langle \Delta V^\mu \Delta V^\nu \rangle &= \frac{\partial V^\mu}{\partial v^i} \frac{\partial V^\nu}{\partial v^j} S^{ij}(v). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, если новые переменные V — некоторая функция переменных v , то используя (8) можно получить обобщенные диффузионные коэффициенты $\langle \Delta V^\lambda \rangle$ и $\langle \Delta V^\mu \Delta V^\nu \rangle$ в зависимости от координат v с помощью формул (5). Подробно все вычисления представлены в книге [64].

2.2. УСРЕДНЕНИЕ ПО ОРБИТАМ

Полученная форма (6) для столкновительного члена уравнения Больцмана имеет т.н. локальную форму, т.е. зависит от координаты физического пространства. Это легко понять, т.к. интегралы в диффузионных коэффициентах берутся вдоль скорости, а она ограничена сверху в данной точке пространства значением $v_e = \sqrt{-2\phi(r)}$ в гравитационно связанной систе-

ме.

В большинстве приложений уравнения ФП считают, что время релаксации велико в сравнении с орбитальным периодом. Это означает то, что характерные изменения в ФР происходят на масштабах времен больших, чем орбитальный период. Т.е. на малых масштабах времен ФР удовлетворяет бесстолкновительному уравнению Больцмана. Согласно теореме Джинса [64; 65] решением такого уравнения будет функция, которая зависит только от интегралов движения. В сферически симметричном случае мы получим, что $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(E, L)$, где E, L — энергия и момент импульса.

Таким образом, если ФР медленно эволюционирует, то можно проинтегрировать уравнение (1) вдоль невозмущенного движения (вдоль орбиты), тем самым исключив из уравнения зависимость от координат физического пространства \mathbf{x} . Сделать это, однако, удастся, если мы выразим столкновительный член в переменных интегралов движения. Ведь только в этом случае $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(E, L)$ можно будет вынести из под знака интегрирования вдоль орбиты (т.к. вдоль невозмущенной траектории ФР постоянна).

Для того, чтобы осуществить это удобно выбрать в качестве переменных

$$\mathcal{E} = -E = -\frac{v^2}{2} + \psi(r), \quad \mathcal{R} = \frac{L^2}{L_c^2(\mathcal{E})}, \quad (9)$$

где $\psi(r) = -\varphi(r)$, а $L_c(\mathcal{E})$ — максимальный угловой момент орбиты с энергией \mathcal{E} , т.е. угловой момент круговой орбиты:

$$L_c^2(\mathcal{E}) = -r_c^3 \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r_c}. \quad (10)$$

Пользуясь соотношениями (5) и (8) и уравнением (6) можно получить уравнение ФП в переменных \mathcal{E} и \mathcal{R} и затем проинтегрировать вдоль орбит:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}(N \langle \Delta \mathcal{E} \rangle_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{E}^2}(N \langle (\Delta \mathcal{E})^2 \rangle_t) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}}(N \langle \Delta \mathcal{R} \rangle_t) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{R}^2}(N \langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle_t) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{E} \partial \mathcal{R}}(N \langle \Delta \mathcal{E} \Delta \mathcal{R} \rangle_t), \end{aligned} \quad (11)$$

где N — это концентрация в пространстве $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$, которая связана с ФР

следующим образом:

$$N(\mathcal{E}, \mathcal{R})d\mathcal{E}d\mathcal{R} = 4\pi^2 P(\mathcal{E}, \mathcal{R})L_c^2(\mathcal{E})f(\mathcal{E}, \mathcal{R})d\mathcal{E}d\mathcal{R}, \quad (12)$$

$P(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ – орбитальный период, а индекс t означает интегрирование вдоль орбиты, например

$$\langle \Delta\mathcal{E} \rangle_t = \frac{2}{P} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r} \langle \Delta\mathcal{E} \rangle, \quad (13)$$

где v_r – радиальная скорость, а r_- , r_+ – точки поворота (корни уравнения $v_r = 0$).

Выражения для коэффициентов, входящих в уравнение (11), довольно громоздки и приведены в [49; 64]. Кроме того, результаты численного интегрирования показывают, что зависимость ФР от \mathcal{R} изотропная [44] или же слабая, в присутствии ЦЧД [49] (оно и понятно, ведь ЦЧД будет поглощать частицы с маленьким моментом импульса). Поэтому, для упрощения вычислений, проинтегрируем уравнение (11) по \mathcal{R} от 0 до 1 и запишем полученное уравнение в форме уравнения неразрывности:

$$4\pi^2 p(\mathcal{E}) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left(D_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + m D_{\mathcal{E}} f \right), \quad (14)$$

где коэффициенты даются следующими формулами:

$$D_{\mathcal{E}} = -16\pi^3 \Gamma \int_{\mathcal{E}}^{\psi(0)} d\mathcal{E}' \nu(\mathcal{E}') p(\mathcal{E}'), \quad (15)$$

$$D_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = 16\pi^3 \Gamma \left(q(\mathcal{E}) \int_0^{\mathcal{E}} \mu(\mathcal{E}') d\mathcal{E}' + \int_{\mathcal{E}}^{\psi(0)} q(\mathcal{E}') \mu(\mathcal{E}') d\mathcal{E}' \right), \quad (16)$$

$$p(\mathcal{E}) = 4 \int_0^{\psi^{-1}(\mathcal{E})} dr r^2 \sqrt{2(\psi(r) - \mathcal{E})}, \quad (17)$$

$$q(\mathcal{E}) = \frac{4}{3} \int_0^{\psi^{-1}(\mathcal{E})} dr r^2 (2(\psi(r) - \mathcal{E}))^{3/2}, \quad (18)$$

где $\psi^{-1}(\mathcal{E})$ – корень уравнения $\psi(r) = \mathcal{E}$, а $\nu(\mathcal{E})$ и $\mu(\mathcal{E})$ – это первый и второй моменты масс:

$$\nu(\mathcal{E}) = \int f(\mathcal{E}, m) m dm, \quad (19)$$

$$\mu(\mathcal{E}) = \int f(\mathcal{E}, m) m^2 dm. \quad (20)$$

В случае дискретного спектра масс интегралы (19) и (20) переходят в сумму вида $\sum m_i f_i(\mathcal{E})$ и $\sum m_i^2 f_i(\mathcal{E})$ соответственно, а уравнение (14) в систему уравнений. Каждое уравнение будет описывать эволюцию ФР конкретного массового сорта частиц за счет взаимодействия с этим же сортом и всеми остальными, что учитывается в коэффициентах (15) и (16). Также отметим, что в присутствии ЦЧД предел интегрирования $\psi(0)$ заменяется на \mathcal{E}_{crit} из-за того, что потенциал в нуле в этом случае сингулярен. А предел 0 заменяется всегда на некоторое $\mathcal{E}_{tidal} > 0$ из-за расходимости коэффициентов (17) и (18) при $\mathcal{E} \rightarrow 0$.

2.3. КОНУС ПОТЕРЬ

Если в центре шарового скопления расположена ЦЧД, то она будет поглощать частицы, которые имеют достаточно маленькие моменты импульса, формируя в пространстве $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ так называемый конус потерь. Залетая в эту область частица может поглощаться ЦЧД за один орбитальный период — режим пустого конуса потерь. Однако поглощение может и не произойти, если в результате взаимодействия с другими частицами, частица приобретет момент импульса отличный от критического и вылетит из конуса потерь за один орбитальный период — это режим «точечного стока» (pinhole) или полный конус потерь [47]. В последнем случае поглощение будет происходить только в момент прохождения некоторой критической точки R_{crit} в окрестности ЦЧД, на которой происходит захват.

Временные масштабы вблизи конуса потерь на которых \mathcal{R} меняется существенным образом много меньше, чем для \mathcal{E} . Это связано с тем, что на временах, где существенно меняется \mathcal{E} характерные изменения в моменте импульса будут $\sim L_c(\mathcal{E})$, а мы интересуемся случаем $\delta L \ll L_c(\mathcal{E})$. Кроме того, градиенты в коэффициентах уравнения (11) по \mathcal{R} при малых \mathcal{R} много больше, чем по \mathcal{E} . Таким образом, можно пренебречь частью, связанной с диффузией по координате \mathcal{E} , и считать ее параметром в уравнении (11):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathcal{R}}(N \langle \Delta \mathcal{R} \rangle_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{R}^2}(N \langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle_t). \quad (21)$$

При $\mathcal{R} \ll 1$ выражения для коэффициентов в локальной форме в уравнении (21) примут вид:

$$\langle \Delta \mathcal{R} \rangle = \frac{r^2}{L_c^2(\mathcal{E})} \langle \Delta v_\perp^2 \rangle + \mathcal{O}(\mathcal{R}), \quad (22)$$

$$\langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle = \frac{2r^2}{L_c^2(\mathcal{E})} \mathcal{R} \langle \Delta v_\perp^2 \rangle + \mathcal{O}(\mathcal{R}^2), \quad (23)$$

где

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = 4\pi m^2 \Gamma \left(\frac{4}{3} I_0 + 2J_{1/2} - \frac{2}{3} J_{3/2} \right), \quad (24)$$

$$I_0(\mathcal{E}) = \int_0^\mathcal{E} f(\mathcal{E}') d\mathcal{E}', \quad (25)$$

$$J_n(\mathcal{E}, r) = \int_\mathcal{E}^{\psi(r)} d\mathcal{E}' f(\mathcal{E}') \left(\frac{\psi(r) - \mathcal{E}'}{\psi(r) - \mathcal{E}} \right)^n, \quad (26)$$

в появившихся интегралах f является функцией только энергии. Это связано с тем, что диффузионные коэффициенты значительно проще вычислить от изотропный ФР. Для получения изотропной врсии ФР формально необходимо проинтегрировать её по \mathcal{R} . Конкретный способ интегрирования не так важен, т.к. в дальнейшем мы будем работать только с ФР, независимой от \mathcal{R} . Видно, что в рассматриваемом приближении справедливо следующее:

$$\langle \Delta \mathcal{R} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle. \quad (27)$$

если ввести коэффициент:

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta \mathcal{R})^2 \rangle_t}{2\mathcal{R}}, \quad (28)$$

то уравнение примет следующий простой вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \left(\mathcal{R} \frac{\partial N}{\partial \mathcal{R}} \right), \quad (29)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \frac{2}{L_c^2(\mathcal{E}) P(\mathcal{E})} \int_0^{\psi^{-1}(\mathcal{E})} \frac{\langle \Delta v_\perp^2 \rangle r^2 dr}{v_r}, \quad (30)$$

где $P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}, \mathcal{R})_{\mathcal{R} \rightarrow 0}$ — период радиальной орбиты.

Поясним смысл выражения (28). Пусть $\langle (\Delta v)^2 \rangle$ является диффузион-

ным коэффициентом, т.е. показывает среднее изменение квадрата скорости в единицу времени в приближении малых рассеиваний, а v — начальная скорость частицы. Определим время релаксации: $t_r \langle (\Delta v)^2 \rangle \sim v^2$. Видно, что это время — время, требуемое для того, чтобы многократные взаимодействия с малыми изменениями скоростей, привели к суммарному эффекту сравнимому с v . Для оценок обычно считают $v \sim \sigma$. Ясно, что \mathcal{D}^{-1} имеет смысл времени релаксации, усредненного по орбите.

Найдем стационарное решение уравнения (29) с дополнительными условиями:

$$N(\mathcal{R}_{lc}) = 0, \quad \bar{N}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{R}_{lc}}^1 N(\mathcal{E}, \mathcal{R}) d\mathcal{R}, \quad (31)$$

слева — условие поглощающей границы при \mathcal{R}_{lc} (захват частиц ЦЧД), справа — требование того, что при интегрировании по \mathcal{R} мы должны получить изотропную версию ФР,

$$f(\mathcal{E}) \approx \frac{\bar{N}\mathcal{E}}{4\pi^2 L_c^2(\mathcal{E}) P(\mathcal{E})}. \quad (32)$$

В результате получим:

$$N(\mathcal{R}, \mathcal{E}) = \frac{\ln(\mathcal{R}/\mathcal{R}_{lc})}{\ln(1/\mathcal{R}_{lc}) + \mathcal{R}_{lc} - 1} \bar{N}(\mathcal{E}). \quad (33)$$

Пусть $F(\mathcal{E})d\mathcal{E}$ — поток частиц в точке \mathcal{E} в интервале $d\mathcal{E}$ в конус потерь:

$$F(\mathcal{E})d\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{R}_{lc}}^1 N(\mathcal{E}, \mathcal{R}) d\mathcal{R} \right) d\mathcal{E}, \quad (34)$$

если записать уравнение (21) в форме уравнения непрерывности, то станет ясно, что этот интеграл есть просто разность значений потока в пространстве \mathcal{R} в точке $\mathcal{R} = 1$ и \mathcal{R}_{lc} . Ясно, что на верхнем пределе будет ноль, т.к. противное физически невозможно. На нижнем же пределе можно воспользоваться выражением для потока из уравнения (29), тогда получим

$$F(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \mathcal{R}_{lc} \left(\frac{\partial N}{\partial R} \right)_{\mathcal{R}_{lc}} \approx \frac{q}{\ln(1/\mathcal{R}_{lc})} \frac{\bar{N} \mathcal{R}_{lc}}{P}. \quad (35)$$

где

$$q(\mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E})\mathcal{D}(\mathcal{E})}{\mathcal{R}_{lc}(\mathcal{E})}, \quad (36)$$

смысл последней величины в том, что она показывает какую часть составляет изменение момента импульса за один орбитальный период относительно L_{lc} $q \approx (\delta L/L_{lc})^2$. Поскольку $\delta L \approx \sqrt{P/t_r}L_c$ и $t_r \approx \mathcal{D}^{-1}$, то собирая все вместе получим выражение (36). Ясно, что (35) справедливо при $q \ll 1$, т.к. в противном случае изменения в моменте импульса стали бы сравнимы или выше, чем L_{lc} за один орбитальный период и условие поглощающей границы при \mathcal{R}_{lc} было бы нарушено (был бы поток как внутрь конуса потерь, так и наружу).

Если рассматриваемые процессы происходят на временах порядка орбитального периода, то усредненным по орбитатам уравнением ФП (21) пользоваться уже нельзя. В работе [49] было полученное стационарное выражение для N вблизи конуса потерь в этом случае:

$$N(\mathcal{E}, \mathcal{R}) = \frac{\ln(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)}{\ln(1/\mathcal{R}_0) + \mathcal{R}_0 - 1} \bar{N}(\mathcal{E}), \quad (37)$$

где $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}[q(\mathcal{E})]$. Видно, что полученный результат совпадает по форме с (33). Поскольку в [49] уравнение Больцманна решалось численно, то здесь приведем аналитическое выражение для $R_0(q)$ [66]:

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{lc} e^{-q/\xi(q)}, \quad \xi(q) \approx \frac{q}{(q^2 + q^4)^{1/4}}. \quad (38)$$

Поток частиц на ЦЧД в этом случае будет даваться выражением:

$$F(\mathcal{E}) \approx \frac{q}{\ln(1/\mathcal{R}_0)} \frac{\bar{N}\mathcal{R}_{lc}}{P}. \quad (39)$$

2.4. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Будем использовать для начального профиля плотности следующую параметризацию:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} \left[1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha \right]^{(\gamma-\beta)/\alpha}, \quad (40)$$

Если известна ФР $f(\mathcal{E})$, то концентрация будет даваться выражением

$$n(r) = 4\pi \int_0^{\psi(r)} f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\psi(r) - \mathcal{E})} d\mathcal{E}, \quad (41)$$

на это можно посмотреть как на интегральное уравнение Абеля относительно $f(\mathcal{E})$ с решением

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_0^{\mathcal{E}} \frac{d\psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \psi}} \frac{dn}{d\psi}, \quad (42)$$

полученное соотношение известно как формула Эддингтона. Таким образом, зная начальную плотность, легко получить начальную ФР с помощью соотношения (42).

Спектр масс возьмем в степенном виде:

$$\frac{dN}{dM} \propto \frac{1}{M_\odot} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^s. \quad (43)$$

В качестве граничных условий для уравнения (14) выберем условия нулевого потока на границах, где выражение для потока

$$F(\mathcal{E}) = D_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + m D_{\mathcal{E}} f, \quad (44)$$

такой выбор граничных условий сразу вызывает вопросы.

Ясно, что верхняя граница по \mathcal{E} — это энергия последней устойчивой круговой орбиты вокруг ЦЧД и, очевидно, что там должно быть условие поглощающей границы $f(\mathcal{E}_{max}) = 0$. Однако как показано в [46] поток частиц на ЦЧД в энергетическом пространстве практически нулевой. А поглощение частиц происходит на малосвязанных орбитах с помощью механизма конуса потерь [47; 48; 51; 66]. Кроме того, использование изотропной версии уравнения ФП вплоть до энергий последней устойчивой круговой орбиты не может быть обосновано, т.к. там ФР существенно анизотропна в пространстве моментов импульсов. Поэтому, пренебрегая несущественными краевыми эффектами, используем условие нулевого потока на каком-нибудь достаточно высоком значении \mathcal{E} .

Условие нулевого потока на нижней границе тоже ничем необосновано.

Энергия гравитационно связанной системы может спокойно изменяться до нуля, однако в этом случае будут расходиться коэффициенты $q(\mathcal{E})$ и $p(\mathcal{E})$ (18) и (17). $q(\mathcal{E})$ пропорционален объему фазового пространства с энергией меньшей, чем \mathcal{E} , $p(\mathcal{E}) = -\frac{dq}{d\mathcal{E}}$ будет пропорционален площади гиперповерхности, ограничивающей этот объем. Ясно, что из-за того, что $\mathcal{E} = 0$ в физически пространстве находится на бесконечности, то и коэффициенты эти будут бесконечными. Поэтому следует выбрать некоторое \mathcal{E}_{min} отличное от нуля.

Условие $F(\mathcal{E}_{min}) = 0$ физически означает, что слабосвязанные с кластером ЧД не захватываются какими-нибудь статическими гравитационными центрами. Что оправдано в случае ранней Вселенной. Например, в [60] рассмотрено влияние приливных сил от галактического центра на шаровое скопление звезд в гало Галактики, где использовалось условие поглощающей границы $f(\mathcal{E}_{min}) = 0$.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Для исследования динамической эволюции самогравитирующей системы необходимо совместно решать уравнения Пуассона и Фоккера-Планка (14). Следуя [51], в качестве независимой переменной вместо E выберем q . Тогда основные уравнения примут вид:

$$\frac{\partial f_a(q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial F_a(q, t)}{\partial q} - \nu(q, t)f(q, t), \quad (45)$$

последнее выражение представляет собой «сток» ПЧД на ЦЧД, индекс a относится к a -му массовому типу ПЧД, а выражение для потока F_a дается в виде:

$$-F_a = m_a B(q) f_a + C(q) \frac{\partial f_a}{\partial q}, \quad (46)$$

а выражения для коэффициентов, входящих в поток, даются следующими соотношениями

$$C(q) = \Gamma \sum_i m_i^2 \left(\int_0^q dq' \frac{q'}{p(q')} f_i(q') + q \int_q^\infty dq' \frac{f_i(q')}{p(q')} \right), \quad (47)$$

$$B(q) = \Gamma \sum_i m_i \int_0^q dq' f_i(q'). \quad (48)$$

Поскольку q меняется в пределах более, чем двадцати порядков, то уместно перейти к квазиравномерной сетке с помощью замены $x = \ln q$, тогда уравнение (45) преобразуется к следующей форме:

$$e^x \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) m_a f_a + C(x) e^{-x} \frac{\partial f_a}{\partial x} \right) - e^x \nu(x, t) f_a \quad (49)$$

Выражение для плотности будет

$$\rho(r) = 4\pi^2 \sum_i m_i \int_{\phi(r)}^0 f_i(E) \sqrt{2(E - \phi(r))} dE, \quad (50)$$

где используется уже классическое определение для энергии $E = \frac{v^2}{2} + \phi(r)$.

Выражение для гравитационного потенциала будет

$$\phi(r) = 4\pi G \left(\frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right). \quad (51)$$

Процедура совместного решения уравнений (45) и (51) подробно описана в работе [44] для случая уравнения в двух пространственных переменных и затем в [45] для рассматриваемого случая. Решение состоит из двух этапов. Вначале на шаг Δt продвигается ФР с помощью уравнения (49) с помощью разностной схемы Ченга-Купера [67]. Затем решается уравнение Пуассона (51) итерациями.

В исходном методе необходимо на втором шаге выражать ФР через q (например, с помощью кубического сплайна $\ln f, \ln q$) и после каждой итерации пересчитывать q для нового потенциала, затем получать значения $f(E)$ отвечающие новым $q(E)$, считать плотность и гравитационный потенциал и так далее. Здесь же нет необходимости в интерполировании ФР сплайном, поскольку она изначально является функцией от q . Конечно, нам по-прежнему придется находить соответствия между q и E , однако это менее затратная процедура. В многомассовом случае преимущества совсем очевидны, поскольку пришлось бы много ФР интерполировать сплайнами на втором шаге.

Также преимущества переменной q состоят в том, что удобно перейти к квазиравномерной сетке с помощью замены $x = \ln q$. К примеру в работе [58], где в качестве независимой переменной используется E , этот переход значительно сложнее.

Пользуясь (39), дадим выражение для ν в уравнении (45):

$$F(\mathcal{E}) \approx \frac{q}{\ln(1/\mathcal{R}_0)} \frac{\bar{N}\mathcal{R}_{lc}}{P} = \frac{\mathcal{D}(\mathcal{E})}{\ln(1/\mathcal{R}_{lc}) + (q^2 + q^4)^{1/4}} 4\pi^2 L_c^2(\mathcal{E}) P(\mathcal{E}) f(\mathcal{E}). \quad (52)$$

Можно показать, что

$$p(E) = \int_0^{L_c^2(E)} P(E, L) dL^2, \quad P(E, L) = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r}, \quad (53)$$

где $P(E, L)$ – радиальный период. Обычно $P(E, L)$ очень слабо зависит от

L , тогда справедливо будет следующее

$$p(E) \approx P(E)L_c^2(E). \quad (54)$$

Подставляя (52) с учетом (54) в уравнение (14) и переходя к переменной q получим для ν в уравнении (45) следующее выражение

$$\nu(E) = \frac{\mathcal{D}(E)}{\alpha + \ln(1/\mathcal{R}_{lc})}, \quad \alpha = (q^2 + q^4)^{1/4}, \quad (55)$$

где

$$q(E) = \frac{\mathcal{D}(E) P(E)}{\mathcal{R}_{lc}}, \quad (56)$$

$$\mathcal{D}(E) = \frac{2}{p(E)} \int_0^{\phi^{-1}(E)} \frac{\langle \Delta v_\perp^2 \rangle r^2 dr}{\sqrt{2(E - \phi(r))}}, \quad (57)$$

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = \Gamma \sum_i m_i^2 \left(\frac{4}{3} I_{0,i} + 2 J_{1/2,i} - \frac{2}{3} J_{3/2,i} \right), \quad (58)$$

$$I_{0,i}(E) = \int_E^0 f_i(E') dE', \quad (59)$$

$$J_{n,i}(E, r) = \int_{\phi(r)}^E dE' f_i(E') \left(\frac{E' - \phi(r)}{E - \phi(r)} \right)^n. \quad (60)$$

Известно, что Шварцшильдская ЧД поглощает частицы момент импульса которых меньше критического значения $L_{lc} = 2cr_g$, где r_g — радиус Шварцшильда. В Ньютоновском пределе этот момент импульса будут соответствовать орбите перицентр которой будет $r_{lc} = 4r_g$:

$$L_{lc}^2 = 2r_{lc}^2 \left(E + \frac{GM_{bh}}{r_{lc}} \right), \quad (61)$$

поскольку мы не рассматриваем сильносвязанные с ЦЧД частицы (т.к. их крайне мало и там не работает изотропная форма уравнения ФП), то будет справедливо

$$L_{lc}^2 \approx 8r_g GM_{bh}, \quad \mathcal{R}_{lc}(E) = \frac{L_{lc}^2(E)}{L_c^2(E)} = \frac{8r_g GM_{bh}}{L_c^2(E)}. \quad (62)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Наш основной расчет основан на выборе следующих параметров профиля плотности (40): $\gamma = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $r_0 = 0.5$ пк. Показатель спектра масс (43) $s = -2$ и пределы изменения масс ПЧД от $10^{-2} M_\odot$ до $10 M_\odot$, полная масса скопления $M_{cl} = 10^6 M_\odot$. Также мы помещаем в центр скопления массивную черную дыру $M_\bullet = 100 M_\odot$.

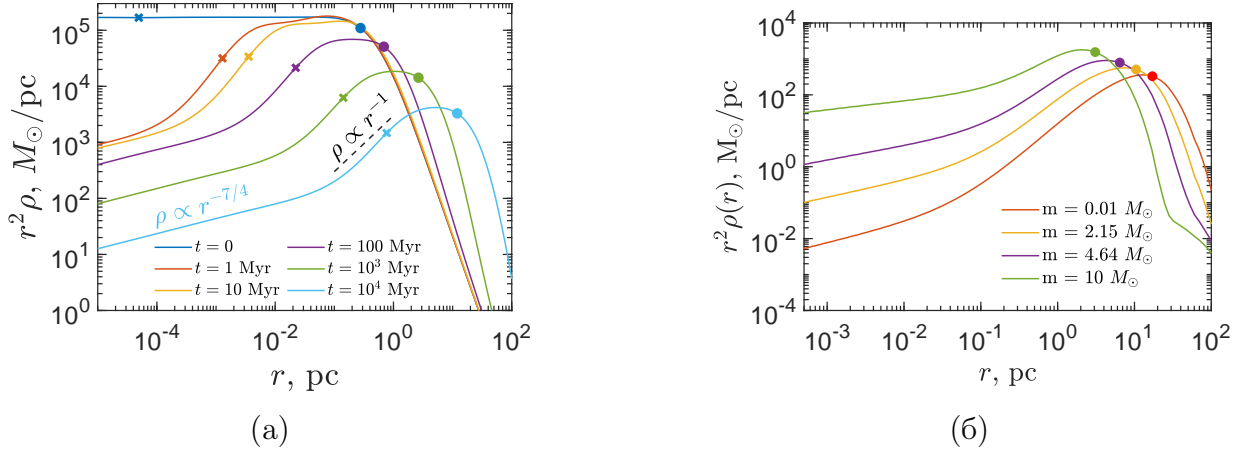


Рисунок 1 – (а): Эволюция профиля плотности ПЧД. Кресты обозначают радиус, содержащий $M_\bullet(t)$ массы, точки — половину массы скопления. (б): массовое распределение различных типов ПЧД в конечный момент времени $t = 10$ млрд. лет, кресты показывают радиус, содержащий половину массы данного массового типа ПЧД.

На рисунке (1) представлена эволюция массового распределения ПЧД внутри скопления. Отметим, что $dM(r)/dr \propto r^2 \rho(r)$, т.е. график отражает дифференциальное распределение массы. Рисунок (1а) отражает основные закономерности изменения профиля плотности ПЧД с течением времени. Спустя достаточно короткий промежуток времени ~ 1 млн. лет, в центральной области скопления устанавливается касп $\rho \propto r^{-7/4}$, известный как касп Баккала-Вольфа [46]. Спустя время ~ 100 млн. лет, скопление приобретает структуру, которая медленно расширяется приблизительно сохраняя свою функциональную форму. Отметим, что основная часть массы ПЧД оказывается сосредоточенной под профилем плотности с приближенным законом $\rho \propto r^{-2}$. На рисунке (1б) представлено пространственное распределение различных массовых типов ПЧД в конечный момент времени $t = 10$ млрд. лет. Наиболее тяжелые ПЧД расположены ближе к центру, в то время как наиболее легкие вдали в результате сегрегации масс. Таким

образом, можно сказать, что СПЧД приобретает слоистую структуру в пространственно-массовом распределении.

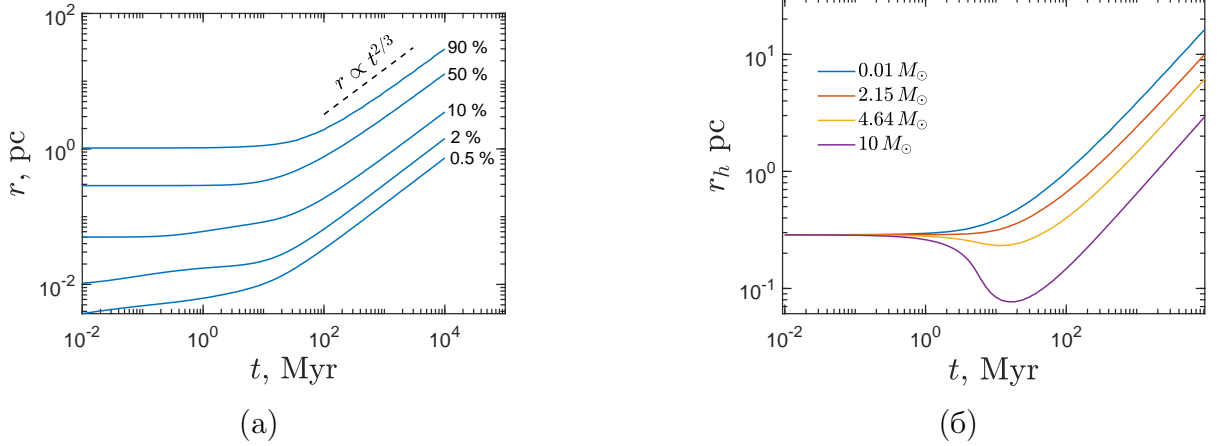


Рисунок 2 – Эволюция массовых оболочек. (а): радиус, содержащий указанное количество массы всех ПЧД (в процентах от M_{cl}), в зависимости от времени. (б): радиус, содержащий половину массу для указанных типов ПЧД, в зависимости от времени.

Эволюция лагранжевых координат представлена на рисунке (2). Можно видеть, что в результате динамического трения самые тяжелые типы ПЧД сжимаются в начале эволюции. Затем это сжатие останавливается и скопление выходит на расширяющую стадию из-за наличия ЦЧД [51; 68–72]. Скопление расширяется до $r_h \sim 10$ пк. Следует отметить, что расширение ШЗС не обязательно связано с наличием ЦЧД и имеет место в общем случае после коллапса коры [56; 73–76].

На рисунке (3) представлено влияние различных начальных условий на конечное массовое распределение кластера. Можно видеть, что изменение показателей профиля слабо отражается на конечном состоянии кластера. В то время как изменение параметра r_0 (который отвечает за размер скопления) приводит к заметным отличиям. Это связано с тем, что изменяется временной масштаб эволюции из-за того, что время релаксации $T_r = t_{cross} N / \ln N \propto r_0^{3/2}$ при неизменной полной массе скопления M_{cl} и числе ПЧД N . Изменение спектра масс ПЧД приводит в свою очередь к тому, что профиль плотности будет меняться от $\rho \propto r^{-3}$ для кластера с монохроматическим спектром масс до $\rho \propto r^{-2}$ для кластера с широким диапазоном изменения масс ПЧД.

Темп роста массы ЦЧД показан на рисунке (4). Можно видеть, что для различных ширин массового спектра конечная масса $M_\bullet \sim 10^4 M_\odot$. Однако

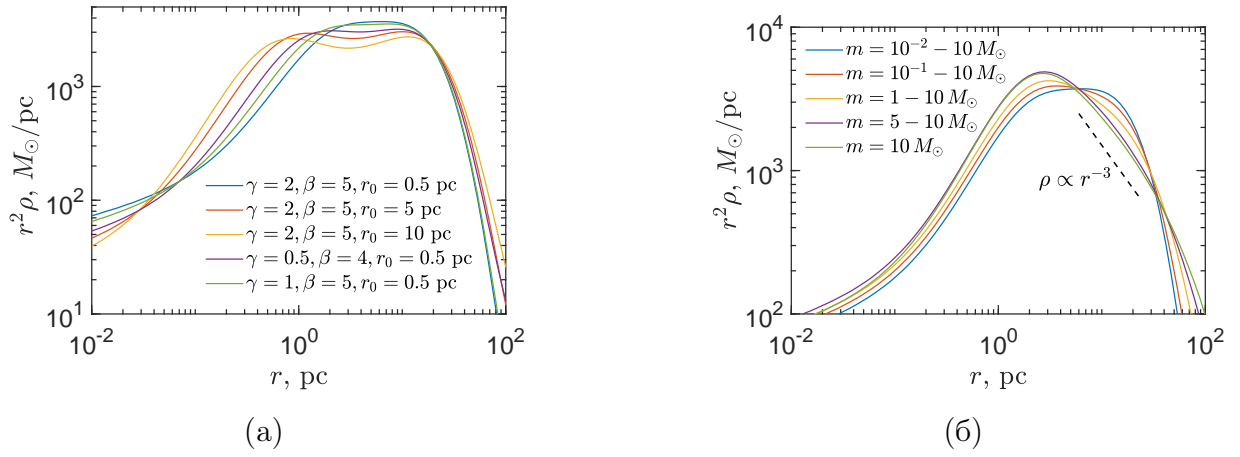


Рисунок 3 – (а): Массовое распределение ПЧД в кластере в конце симмуляции при различных параметрах профиля плотности и одинаковом спектре масс от $10^{-2} M_\odot$ до $10 M_\odot$ (б): Массовое распределение ПЧД в конце симмуляции для различных диапазонов масс при одинаковых параметрах профиля плотности $\gamma = 2, \beta = 5, \alpha = 2, r_0 = 5 \text{ пк}$.

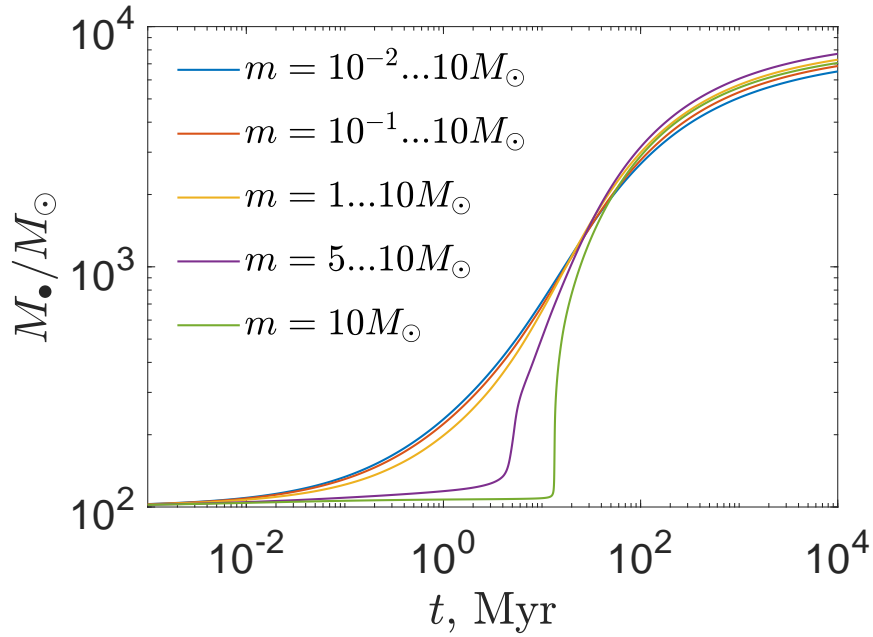


Рисунок 4 – Зависимость массы ЦЧД M_\bullet от времени для СПЧД с различными диапазонами изменений масс ПЧД.

скорость изменения существенно различается для скоплений с массовым спектром ПЧД (синяя линия) и без него (зеленая линия). Это связано с тем, что скопление ПЧД с монохроматическим или же узким спектром масс испытывают коллапс кора [77], в результате чего центральная плотность резко увеличивается и, как следствие, возникает резкое увеличение темпа роста ЦЧД [50; 69–72]. Более детально это отражено на рисунке (5). Можно видеть, что по мере эволюции кластера, центральные оболочки начинают

резко сжиматься при моменте времени $t \sim 10$ млн. лет, в это же время резко увеличивается темп роста ЦЧД.

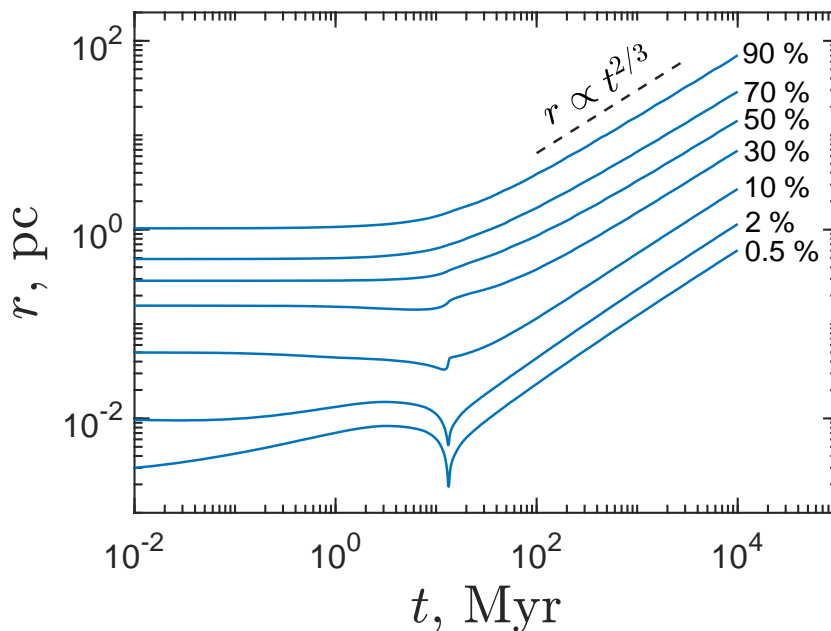


Рисунок 5 – Зависимость радиусов, содержащих указанное количество массы, в зависимости от времени. Параметры скопления: $\gamma = 2$, $\beta = 5$, $\alpha = 2$, $r_0 = 5$ пк, $M_{cl} = 10^6 M_{\odot}$, $m = 10$ — монохроматический спектр масс.

В свою очередь скопления с широким диапазоном изменения масс не испытывают коллапса кора. В начале эволюции, как уже отмечалось, массивные типы ПЧД начинают сжиматься к центру из-за интенсивной сегрегации масс, в результате чего увеличивается темп роста ЦЧД. Однако само скопление целиком расширяется. Затем сжатие массивных ПЧД останавливается ЦЧД, которая «накачивает» энергию в кластер и вызывает его расширение. Но снаружи массивные ПЧД сжимаются маломассивными к центру, что сохраняет темпы роста ЦЧД. Но в конечном итоге сжатие останавливается и скорость увлечения массы ЦЧД уменьшается.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы была изучена динамическая эволюция скопления ПЧД в приближении Фоккера-Планка. По ряду начальных распределений было получено массовое распределение ПЧД в кластере к моменту времени $t = 10$ млрд. лет. Было установлено, что зависимость от начальных условий слабо отражается на конечной структуре скопления. Однако наличие широкого диапазона изменений масс ПЧД приводит к интенсивной сегрегации масс, в результате которой кластер приобретает слоистую структуру — массивные типы ПЧД располагаются ближе к центру, легкие ближе к границе.

В результате своей эволюции скопление приобретает структуру, которая медленно расширяется по закону $r \propto t^{2/3}$. Что является типичным для всех классов самогравитирующих систем. За время $t = 10$ млрд. лет кластер расширяется до $r_h \sim 10$ пк. А его профиль плотности меняется от $\rho \propto r^{-3}$ для скопления с монохроматическим спектром масс до $\rho \propto r^{-2}$ для скопления с широким диапазоном изменения масс. Во всех рассмотренных случаях масса центральной ЧД увеличивается до $M_\bullet \sim 10^4 M_\odot$. Однако темп ее роста \dot{M}_\bullet значительно зависит от диапазона изменения масс ПЧД, что представлено на рисунке (4).

В данной работе не было учтено то, что скопление ПЧД окружено гало СМ. Также пренебрегается вкладом в рост массы центральной ЧД от аккреции скрытой и барионной материи. Можно ожидать, что учет последних явлений может привести к незначительному изменению временной эволюции профиля плотности для кластера ПЧД, что требует количественного анализа и ляжет в основу будущей работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Sov. Astron.* — 1967. — Vol. 10. — P. 602.
2. *Hawking S.* Gravitationally collapsed objects of very low mass // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1971. — Vol. 152. — P. 75.
3. *Carr B. J., Hawking S. W.* Black holes in the early Universe // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1974. — Vol. 168. — P. 399–416.
4. *Chapline G. F.* Cosmological effects of primordial black holes // *Nature.* — 1975. — Vol. 253, no. 5489. — P. 251–252.
5. *Dolgov A., Silk J.* Baryon isocurvature fluctuations at small scales and baryonic dark matter // *Phys. Rev. D.* — 1993. — Vol. 47, no. 10. — P. 4244–4255.
6. *García-Bellido J., Linde A., Wands D.* Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Vol. 54, no. 10. — P. 6040–6058. — arXiv: astro-ph/9605094 [astro-ph].
7. *García-Bellido J., Ruiz Morales E.* Primordial black holes from single field models of inflation // *Physics of the Dark Universe.* — 2017. — Vol. 18. — P. 47–54. — arXiv: 1702.03901 [astro-ph.CO].
8. *Khlopov M. Y.* Primordial black holes // *Res. Astron. Astrophys.* — 2010. — Vol. 10, no. 6. — P. 495–528. — arXiv: 0801.0116 [astro-ph].
9. *Carr B., Kühnel F., Sandstad M.* Primordial black holes as dark matter // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Vol. 94, no. 8. — P. 083504. — arXiv: 1607.06077 [astro-ph.CO].
10. *Carr B., Kühnel F.* Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments // *Annual Review of Nuclear and Particle Science.* — 2020. — Vol. 70, no. 1. — annurev. — arXiv: 2006.02838 [astro-ph.CO].
11. *Rubin S. G., Khlopov M. Y., Sakharov A. S.* Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition // *Grav. Cosmol.* — 2000. — Vol. S6. — P. 51–58. — arXiv: hep-ph/0005271 [hep-ph].

12. *Rubin S. G., Sakharov A. S., Khlopov M. Y.* The Formation of Primary Galactic Nuclei during Phase Transitions in the Early Universe // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2001. — Vol. 92, no. 6. — P. 921–929. — arXiv: hep-ph/0106187 [hep-ph].
13. *Khlopov M. Y., Rubin S. G., Sakharov A. S.* Primordial structure of massive black hole clusters // Astroparticle Physics. — 2005. — Vol. 23, no. 2. — P. 265–277. — arXiv: astro-ph/0401532 [astro-ph].
14. Signatures of primordial black hole dark matter / K. M. Belotsky [et al.] // Modern Physics Letters A. — 2014. — Vol. 29, no. 37. — P. 1440005. — arXiv: 1410.0203 [astro-ph.CO].
15. Clusters of Primordial Black Holes / K. M. Belotsky [et al.] // European Physical Journal C. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].
16. Supermassive Black Holes and Their Host Spheroids. II. The Red and Blue Sequence in the M_{BH} - $M_{*,sph}$ Diagram / G. A. D. Savorgnan [et al.] // Astrophys. J. — 2016. — Vol. 817, no. 1. — P. 21. — arXiv: 1511.07437 [astro-ph.GA].
17. *Ferrarese L., Merritt D.* A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies // Astrophys. J. Lett. — 2000. — Vol. 539, no. 1. — P. L9–L12. — arXiv: astro-ph/0006053 [astro-ph].
18. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion / K. Gebhardt [et al.] // Astrophys. J. Lett. — 2000. — Vol. 539, no. 1. — P. L13–L16. — arXiv: astro-ph/0006289 [astro-ph].
19. Two ten-billion-solar-mass black holes at the centres of giant elliptical galaxies / N. J. McConnell [et al.] // Nature. — 2011. — Vol. 480, no. 7376. — P. 215–218. — arXiv: 1112.1078 [astro-ph.CO].
20. The Demography of Massive Dark Objects in Galaxy Centers / J. Magorrian [et al.] // Astron. J. — 1998. — Vol. 115, no. 6. — P. 2285–2305. — arXiv: astro-ph/9708072 [astro-ph].

21. The Final SDSS High-redshift Quasar Sample of 52 Quasars at $z > 5.7$ / L. Jiang [et al.] // *Astrophys. J.* — 2016. — Vol. 833, no. 2. — P. 222. — arXiv: 1610.05369 [astro-ph.GA].
22. Pōniuā'ena: A Luminous $z = 7.5$ Quasar Hosting a 1.5 Billion Solar Mass Black Hole / J. Yang [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2020. — Vol. 897, no. 1. — P. L14. — arXiv: 2006.13452 [astro-ph.GA].
23. An 800-million-solar-mass black hole in a significantly neutral Universe at a redshift of 7.5 / E. Bañados [et al.] // *Nature*. — 2018. — Vol. 553, no. 7689. — P. 473–476. — arXiv: 1712.01860 [astro-ph.GA].
24. Discovery of the First Low-luminosity Quasar at $z \lesssim 7$ / Y. Matsuoka [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2019. — Vol. 872, no. 1. — P. L2. — arXiv: 1901.10487 [astro-ph.GA].
25. Physical Properties of 15 Quasars at $z \gtrsim 6.5$ / C. Mazzucchelli [et al.] // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 849, no. 2. — P. 91. — arXiv: 1710.01251 [astro-ph.GA].
26. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs / B. P. Abbott [et al.] // *Physical Review X*. — 2019. — Vol. 9, no. 3. — P. 031040. — arXiv: 1811.12907 [astro-ph.HE].
27. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run / R. Abbott [et al.] // arXiv e-prints. — 2020. — arXiv:2010.14527. — arXiv: 2010.14527 [gr-qc].
28. Gravitational Waves from Coalescing Black Hole MACHO Binaries / T. Nakamura [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 1997. — Vol. 487, no. 2. — P. L139–L142. — arXiv: astro-ph/9708060 [astro-ph].
29. Did LIGO Detect Dark Matter? / S. Bird [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 116, no. 20. — P. 201301. — arXiv: 1603.00464 [astro-ph.CO].
30. Solving puzzles of GW150914 by primordial black holes / S. Blinnikov [et al.] // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* — 2016. — Vol. 2016, no. 11. — P. 036. — arXiv: 1611.00541 [astro-ph.HE].

31. *Clesse S., García-Bellido J.* Seven hints for primordial black hole dark matter // *Physics of the Dark Universe*. — 2018. — Vol. 22. — P. 137–146. — arXiv: 1711.10458 [astro-ph.CO].
32. *Ali-Haïmoud Y.* Correlation Function of High-Threshold Regions and Application to the Initial Small-Scale Clustering of Primordial Black Holes // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 121, no. 8. — P. 081304. — arXiv: 1805.05912 [astro-ph.CO].
33. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / Planck Collaboration [et al.] // *Astron. & Astrophys.* — 2020. — Vol. 641. — A6. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
34. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology / D. N. Spergel [et al.] // *Astrophys. J. Suppl.* — 2007. — Vol. 170, no. 2. — P. 377–408. — arXiv: astro-ph/0603449 [astro-ph].
35. Evidence for Reionization at $z \sim 6$: Detection of a Gunn-Peterson Trough in a $z=6.28$ Quasar / R. H. Becker [et al.] // *Astron. J.* — 2001. — Vol. 122, no. 6. — P. 2850–2857. — arXiv: astro-ph/0108097 [astro-ph].
36. *Belotsky K. M., Kirillov A. A.* Primordial black holes with mass 10^{16} – 10^{17} g and reionization of the Universe // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* — 2015. — Vol. 2015, no. 1. — P. 041. — arXiv: 1409.8601 [astro-ph.CO].
37. *Belotsky K. M., Kirillov A. A., Rubin S. G.* Clusters of primordial black holes and reionization problem // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2015. — Vol. 78, no. 3. — P. 387–393.
38. Reionization effect enhancement due to primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // *International Journal of Modern Physics D*. — 2017. — Vol. 26, no. 9. — P. 1750102. — arXiv: 1702.06338 [astro-ph.CO].
39. Evidence for GN-z11 as a luminous galaxy at redshift 10.957 / L. Jiang [et al.] // arXiv e-prints. — 2020. — arXiv:2012.06936. — arXiv: 2012.06936 [astro-ph.HE].

40. *Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N., Rubin S. G.* Early formation of galaxies induced by clusters of black holes // *Astronomy Reports*. — 2008. — Vol. 52, no. 10. — P. 779–789. — arXiv: 0801.0885 [astro-ph].
41. *Trashorras M., García-Bellido J., Nesseris S.* The clustering dynamics of primordial black holes in N -body simulations // arXiv e-prints. — 2020. — arXiv:2006.15018. — arXiv: 2006.15018 [astro-ph.CO].
42. Merger rates in primordial black hole clusters without initial binaries / V. Korol [et al.] // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2020. — Vol. 496, no. 1. — P. 994–1000. — arXiv: 1911.03483 [astro-ph.HE].
43. *Khromykh L. A., Kirillov A. A.* The gravitational dynamics of the primordial black holes cluster // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — Vol. 1390.
44. *Cohn H.* Numerical integration of the Fokker-Planck equation and the evolution of star clusters // *Astrophys. J.* — 1979. — Vol. 234. — P. 1036–1053.
45. *Cohn H.* Late core collapse in star clusters and the gravothermal instability // *Astrophys. J.* — 1980. — Vol. 242. — P. 765–771.
46. *Bahcall J. N., Wolf R. A.* Star distribution around a massive black hole in a globular cluster. // *Astrophys. J.* — 1976. — Vol. 209. — P. 214–232.
47. *Lightman A. P., Shapiro S. L.* The distribution and consumption rate of stars around a massive, collapsed object. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 211. — P. 244–262.
48. *Bahcall J. N., Wolf R. A.* The star distribution around a massive black hole in a globular cluster. II. Unequal star masses. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 216. — P. 883–907.
49. *Cohn H., Kulsrud R. M.* The stellar distribution around a black hole: numerical integration of the Fokker-Planck equation. // *Astrophys. J.* — 1978. — Vol. 226. — P. 1087–1108.

50. *Murphy B. W., Cohn H. N., Durisen R. H.* Dynamical and Luminosity Evolution of Active Galactic Nuclei: Models with a Mass Spectrum // *Astrophys. J.* — 1991. — Vol. 370. — P. 60.
51. *Vasiliev E.* A New Fokker-Planck Approach for the Relaxation-driven Evolution of Galactic Nuclei // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 848, no. 1. — P. 10. — arXiv: 1709.04467 [astro-ph.GA].
52. *Ostriker J. P.* Physical interactions between stars. // *Dynamics of Star Clusters*. Vol. 113 / ed. by J. Goodman, P. Hut. — 1985. — P. 347–357.
53. *Lee H. M.* Dynamical Effects of Successive Mergers on the Evolution of Spherical Stellar Systems // *Astrophys. J.* — 1987. — Vol. 319. — P. 801.
54. *Statler T. S., Ostriker J. P., Cohn H. N.* Evolution of N-Body Systems with Tidally Captured Binaries through the Core Collapse Phase // *Astrophys. J.* — 1987. — Vol. 316. — P. 626.
55. *Cohn H., Hut P., Wise M.* Gravo-thermal Oscillations after Core Collapse in Globular Cluster Evolution // *Astrophys. J.* — 1989. — Vol. 342. — P. 814.
56. *Takahashi K.* Fokker-Planck Models of Star Clusters with Anisotropic Velocity Distributions II. Post-Collapse Evolution // *Publ. Astron. Soc. Jpn.* — 1996. — Vol. 48. — P. 691–700. — arXiv: astro-ph/9609025 [astro-ph].
57. Anisotropic Fokker-Planck Models for the Evolution of Globular Star Clusters: The Core-Halo Connection / G. A. Drukier [et al.] // *Astrophys. J.* — 1999. — Vol. 518, no. 1. — P. 233–245.
58. *Quinlan G. D., Shapiro S. L.* The Dynamical Evolution of Dense Star Clusters in Galactic Nuclei // *Astrophys. J.* — 1990. — Vol. 356. — P. 483.
59. *Lee H. M., Ostriker J. P.* The Evolution and Final Disintegration of Spherical Stellar Systems in a Steady Galactic Tidal Field // *Astrophys. J.* — 1987. — Vol. 322. — P. 123.
60. *Chernoff D. F., Weinberg M. D.* Evolution of Globular Clusters in the Galaxy // *Astrophys. J.* — 1990. — Vol. 351. — P. 121.

61. *Takahashi K., Lee H. M., Inagaki S.* Evolution of tidally truncated globular clusters with anisotropy // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1997. — Vol. 292, no. 2. — P. 331–337. — arXiv: astro-ph/9705012 [astro-ph].
62. *Takahashi K., Portegies Zwart S. F.* The Disruption of Globular Star Clusters in the Galaxy: A Comparative Analysis between Fokker-Planck and N-Body Models // *Astrophys. J. Lett.* — 1998. — Vol. 503, no. 1. — P. L49–L52. — arXiv: astro-ph/9805310 [astro-ph].
63. *Rosenbluth M. N., MacDonald W. M., Judd D. L.* Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force // *Phys. Rev.* — 1957. — Vol. 107, issue 1. — P. 1–6.
64. *Merritt D.* Dynamics and Evolution of Galactic Nuclei. — 2013.
65. *Binney J., Tremaine S.* Galactic Dynamics: Second Edition. — 2008.
66. *Merritt D.* Loss-cone dynamics // *Classical Quant. Grav.* — 2013. — Vol. 30, no. 24. — P. 244005. — arXiv: 1307.3268 [astro-ph.GA].
67. *Chang J. S., Cooper G.* A Practical Difference Scheme for Fokker-Planck Equations // *Journal of Computational Physics.* — 1970. — Vol. 6, no. 1. — P. 1–16.
68. *Shapiro S. L.* Star clusters, self-interacting dark matter halos, and black hole cusps: The fluid conduction model and its extension to general relativity // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, no. 2. — P. 023021. — arXiv: 1809.02618 [astro-ph.HE].
69. *Duncan M. J., Shapiro S. L.* Star clusters containing massive, central black holes. IV - Galactic tidal fields // *Astrophys. J.* — 1982. — Vol. 253. — P. 921–938.
70. *Marchant A. B., Shapiro S. L.* Star clusters containing massive, central black holes. III - Evolution calculations // *Astrophys. J.* — 1980. — Vol. 239. — P. 685–704.
71. *Shapiro S. L.* The dissolution of globular clusters containing massive black holes. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 217. — P. 281–286.

72. *Shapiro S. L.* Monte Carlo simulations of the 2+1 dimensional Fokker-Planck equation: spherical star clusters containing massive, central black holes. // *Dynamics of Star Clusters*. Vol. 113 / ed. by J. Goodman, P. Hut. — 1985. — P. 373–413.
73. *Heggie D. C., Ramamani N.* Evolution of star clusters after core collapse // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1989. — Vol. 237. — P. 757–783.
74. *Cohn H.* Direct Fokker-Planck calculations. // *Dynamics of Star Clusters*. Vol. 113 / ed. by J. Goodman, P. Hut. — 1985. — P. 161–177.
75. *Heggie D. C.* Post-collapse evolution of a gaseous cluster model // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1984. — Vol. 206. — P. 179–195.
76. *Inagaki S., Lynden-Bell D.* Self-similar solutions for post-collapse evolution of globular clusters. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1983. — Vol. 205. — P. 913–930.
77. *Lynden-Bell D., Wood R.* The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1968. — Vol. 138. — P. 495.