

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 514.752.434

**ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА
ВЕЛИЧИНУ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЫ.
МЕТРИКА ТОРА**

Студент _____ А. А. Видинеев

Научный руководитель,
проф., д.ф.-м.н., проф. _____ С. Г. Рубин

Москва 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
1 Поверхность тора	3
2 Метрические свойства тора	5
2.1 Метрика на торе	5
2.2 Скалярная кривизна	6
2.3 Действие Эйнштена-Гильберта для тора	8
3 Заключение	10

ВВЕДЕНИЕ

В современной космологии нет однозначного ответа на вопрос о геометрии Вселенной. Помимо популярной модели Фридмана имеется целый набор более экстравагантных моделей. Обычно они имеют более сложную топологию. Примером может служить модель кротовых нор, в которой к "обычному" трёхмерному пространству пришиты ручки (кротовины, мосты).

Закрытая модель с одной кротовиной топологически эквивалентна модели тороидальной Вселенной. Но метрически последняя модель более простая (она более симметрична).

В настоящей работе рассматривается двумерная Вселенная с тороидальной метрикой. Для этой модели рассчитывается ряд метрических характеристик (метрика, кривизна и т. д.). Также рассчитывается геометрическое действие Эйнштейна-Гильберта, стационарным точкам которого соответствуют параметры разрешённых тороидальных моделей.

1. ПОВЕРХНОСТЬ ТОРА

Рассмотрим плоскость R^2 и введём на ней отношение эквивалентности. Две точки назовём эквивалентными, если их разность (как векторов на плоскости) имеет целочисленные координаты. То есть разность принадлежит целочисленной решётке Z^2 . Факторпространство $T^2 = \frac{R^2}{Z^2}$ называется двумерным тором. Это определение годится и для случая многомерных пространств. [1]

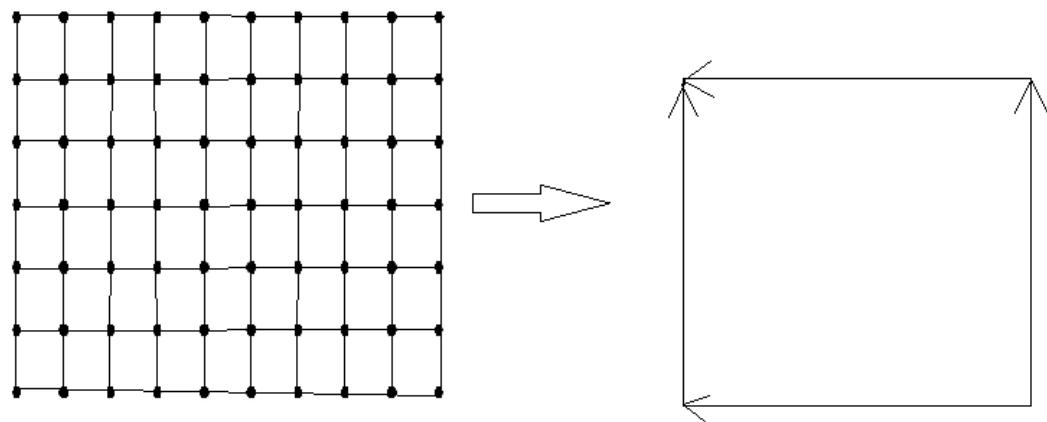


Рисунок 1.1 — Факторизация плоскости по целочисленной решётке

После такой факторизации мы приходим к одному квадрату единичной площади. Но в нём ещё надо склеить противоположные стороны. В итоге получается поверхность бублика. Поверхность тора обладает интересны-

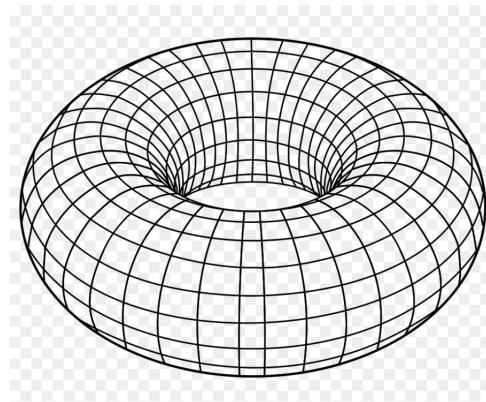


Рисунок 1.2 — Поверхность тора

ми топологическими свойствами. Разобьём её произвольным образом на треугольники (триангулируем). Подсчитаем число вершин, рёбер и граней триангуляции (v, r, g) . Выражение $\epsilon = v - r + g$ называется эйлеровой характеристикой поверхности. Она является топологическим инвариантом и не зависит от конкретной триангуляции. [2]

Для тора $\epsilon = 0$. Из этого, в частности, вытекает, что гауссова кривизна тора равна нулю.

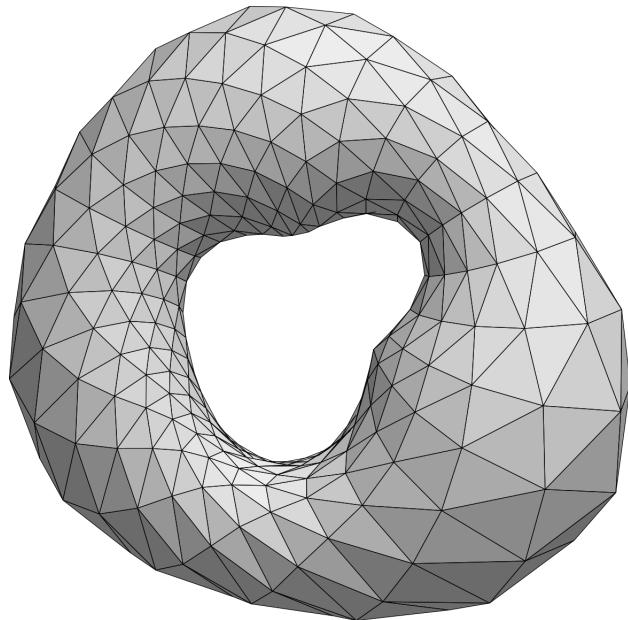


Рисунок 1.3 — Триангуляция тора

2. МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОРА

2.1. МЕТРИКА НА ТОРЕ

На поверхности тора можно ввести две угловые координаты ϕ и θ . Координата ϕ задаёт угол обхода вокруг большой окружности тора, а угол ϕ - вокруг малой окружности тора.

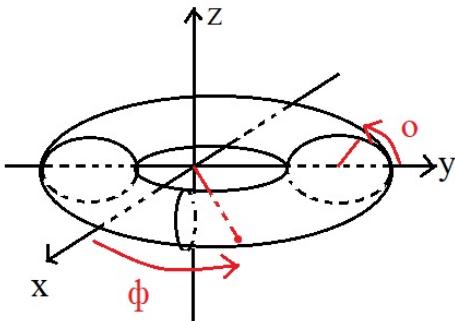


Рисунок 2.1 — Координаты на торе

В нашем случае поверхность тора получается в результате вращения окружности радиуса r_1 вдоль окружности радиуса r_2 , которая лежит в плоскости xy . Полагается, что $r_1 < r_2$.

Теперь выразим декартовы координаты точек тора через угловые координаты ϕ и θ .

$$x = (R + r \cos \theta) \cos \phi \quad (2.1)$$

$$y = (R + r \cos \theta) \sin \phi \quad (2.2)$$

$$z = r \sin \theta \quad (2.3)$$

Для нахождения метрики нам также потребуются дифференциалы функций x , y , z по угловым координатам.

$$dx = -r \sin \theta \cos \phi d\theta - (R + r \cos \theta) \sin \phi d\phi \quad (2.4)$$

$$dy = -r \sin \theta \sin \phi d\theta + (R + r \cos \theta) \cos \phi d\phi \quad (2.5)$$

$$dz = r \cos \theta d\theta \quad (2.6)$$

Тор является гладкой поверхностью, поэтому достаточно малая окрестность любой его точки является плоской. То есть локально будет выполняться теорема Пифагора $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. [3] Здесь dl - расстояние между двумя близкими точками. Форма dl^2 называется метрикой поверхности. Для тора метрика равна следующему выражению:

$$dl^2 = (R + r \cos \theta)^2 d\phi^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.7)$$

Коэффициенты при дифференциалах в выражении для метрики образуют метрический тензор $g_{\phi\theta}$.

$$g_{\phi\theta} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.2. СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА

Символы Кристоффеля поверхности вычисляются по следующей формуле:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (2.9)$$

Для тора 5 символов Кристоффеля равны нулю

$$\Gamma_{000} = \Gamma_{011} = \Gamma_{110} = \Gamma_{101} = \Gamma_{111} = 0 \quad (2.10)$$

только три отличны от нуля.

$$\Gamma_{001} = \Gamma_{010} = -\Gamma_{100} = -(R + r \cos \theta) r \sin \theta \quad (2.11)$$

Для вычисления тензора Римана нам потребуются символы Кристоффеля, с одним верхним индексом. Индекс поднимается при помощи метрического тензора. [4]

$$\Gamma_i^k = g^{kn} \Gamma_{nij} \quad (2.12)$$

Здесь матрица g^{kn} является обратной к матрице g_{kn} .

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1/(R+r \cos \theta)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Теперь мы можем вычислить символы Кристоффеля с одним верхним индексом.

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^1_{11} = \Gamma^0_{11} = \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = 0, \quad (2.14)$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = -\frac{r \sin \theta}{R + r \cos \theta} \quad (2.15)$$

и

$$\Gamma^1_{00} = \frac{(R + r \cos \theta) \sin \theta}{r} \quad (2.16)$$

Тензор Римана определяется по следующей формуле:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \quad (2.17)$$

Используя эту формулу, мы можем вычислить тензор Римана для тора.

$$R_{\phi\theta} = \begin{pmatrix} \frac{(R+r \cos \theta) \cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & \frac{r \cos \theta}{R+r \cos \theta} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Скалярная кривизна является полной свёрткой метрического тензора с тензором Римана. Для поверхности тора скалярная кривизна принимает следующую форму:

$$\tilde{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{2 \cos \theta}{r(R + r \cos \theta)} \quad (2.19)$$

Из этой формулы видно, что скалярная кривизна не зависит от угла ϕ и может быть как положительной, так и отрицательной (ровно это происходит в кротовой норе).

2.3. ДЕЙСТВИЕ ЭЙНШТЕНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ТОРА

Действием Эйнштейна-Гильберта поверхности называется интеграл от $\tilde{R}\sqrt{g}$. [5]

$$S = \int \tilde{R}\sqrt{g}d\phi d\theta \quad (2.20)$$

Используя выражение для метрического тензора 2.8 и для кривизны 2.19, получаем действие для тора:

$$S = \int 2\cos\theta d\phi d\theta = 0 \quad (2.21)$$

Этот результат означает, что нет таких параметров тора (радиусов), при которых действие было бы экстремально.

Он не является столь уж удивительным. Равенство нулю действия Эйнштейна-Гильберта эквивалентно тому, что гауссова кривизна тора равна нулю (а это связано с нулевой эйлеровой характеристикой). Таким образом, исходное действие не является интересным. Модифицируем его.

Вычислим действие Эйнштейна-Гильберта для лагранжиана $L = \tilde{R} + a\tilde{R}^2$.

$$S = \int (\tilde{R} + a\tilde{R}^2)\sqrt{g}d\phi d\theta \quad (2.22)$$

Интеграл от \tilde{R} равен нулю, поэтому

$$S = a \int \tilde{R}^2 \sqrt{g}d\phi d\theta \quad (2.23)$$

Подставим выражение для скалярной кривизны.

$$S = \frac{8\pi a}{r} \int \frac{\cos^2\theta d\theta}{R + r\cos\theta} \quad (2.24)$$

Вычислим неопределённый интеграл

$$\int \frac{\cos^2\theta d\theta}{R + r\cos\theta} = \frac{r\sin x - Rx - \frac{2R^2 \tanh^{-1}\left(\frac{(R-r)\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{r^2-R^2}}\right)}{\sqrt{r^2-R^2}}}{r^2} \quad (2.25)$$

После подстановки пределов интегрирования мы получаем следующее выражение для действия:

$$S = \frac{8\pi a}{r} \left[-\frac{2R^2\pi}{r^2\sqrt{R^2 - r^2}} - \frac{2\pi R}{r^2} \right] \quad (2.26)$$

и окончательно

$$S = -\frac{16\pi^2 a R}{r^3} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 1 \right) \quad (2.27)$$

Построим график зависимости S от R и r (с точностью до константы).

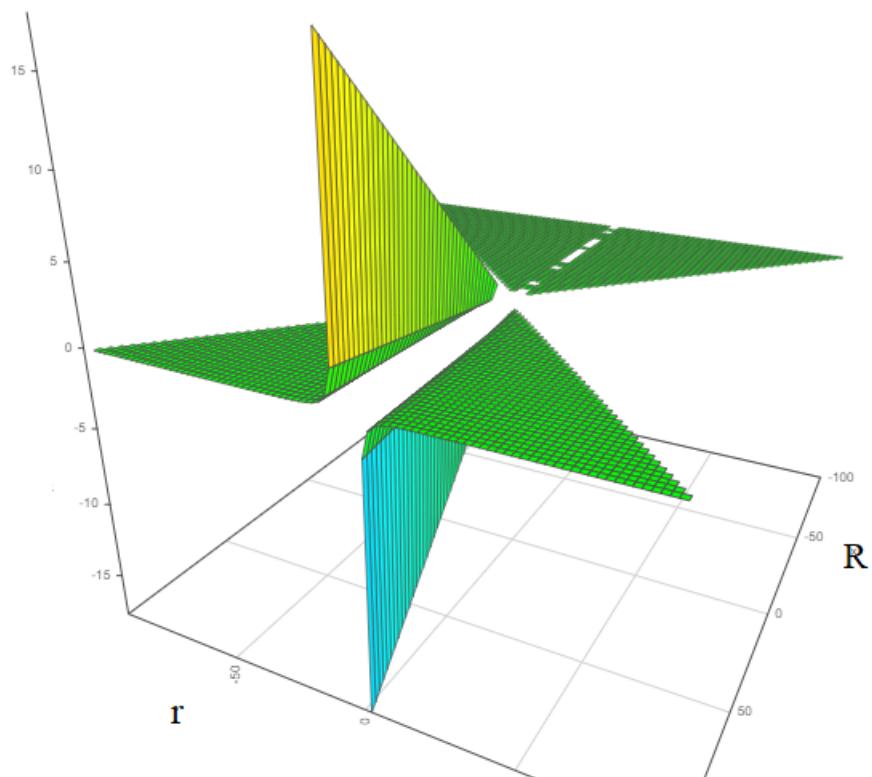


Рисунок 2.2 — График зависимости S от R и r

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовалась метрическая структура поверхности тора. Были получены выражения для метрического тензора, тензора Римана и скалярной кривизны. Действие Эйнштейна-Гильберта оказалось равным 0. Это означает, что нет таких параметров тора (радиусов), при которых действие было бы экстремально.

По этой причине было исследовано действие с модифицированным лагранжианом. Оно уже отлично от нуля.

В будущем планируется изучить действие Э-Г для различных вариантов функции Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тёрстон У. - "Трёхмерная геометрия и топология"
- [2] Сосинский А. Б. - "Введение в топологию"
- [3] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. - "Современная геометрия. Методы и приложения"
- [4] Бронников К.А., Рубин С.Г. - "Лекции по гравитации и космологии"
- [5] Sokolov, D.D. - "Cosmological constant"