

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
СТУДЕНТА

О классическом и квантовом описании сечения
рекомбинации частицы в кулоновском поле

Научный руководитель

К. М. Белоцкий

Выполнил

Д. С. Калашников

Москва 2021

Рекомбинация – процесс перехода свободного электрона в связанное состояние в поле водородоподобного ядра.

$$\sigma_{cl} = (4\pi)^{\frac{2}{5}} \pi \frac{\alpha^2}{\mu^2} \frac{1}{V^{\frac{14}{5}}}, \quad (1)$$

$$\sigma_{qu} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^3}{\mu^2} \frac{\ln(V^{-1})}{V^2}. \quad (2)$$

Цель – исследовать пределы применимости классической и квантовой формулы, найти пределы, в которых выполняется принцип соответствия.

Задачи

- ❶ Сбор информации о выводе классического сечения и его пределах применимости [2, 3, 12]
- ❷ Оценка пределов применимости формулы классического сечения рекомбинации.
- ❸ Ознакомление с выводом формулы Крамерса (2), полученным в статье [6, 5].
- ❹ Оценка пределов применимости формулы Крамерса
- ❺ Сопоставить пределы применимости формул (1) и (2).

Вывод классической формулы

$$I = \frac{2e^2}{3C^3}(\ddot{r})^2. \quad (3)$$

В выводе были использованы приближения, которые накладывают следующие ограничения:

- ① $M \gg \hbar, \quad \alpha^5 \gg (v/c)^2$
- ② $v \ll c$, начальная относительная скорость движения частиц много меньше скорости света.

Вывод формулы Крамерса приближении.

$$\sigma_n = \frac{32\pi\alpha^3 a_0^2}{3\sqrt{3}} \frac{\omega_0}{\omega(\omega - \omega_0 n^{-2})} \frac{1}{n^3} \quad (4)$$

Просуммировав по всем связанным состояниям и заменив суммирование интегрированием получаем формулу:

$$\sigma_q = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \alpha r_0^2 Z^2 C^2 \cdot \frac{\ln \frac{ZC\alpha}{V}}{V^2}$$

Вывод общей формулы рекомбинации в статье Мильштейна

Формула из статьи Мильштейна:

$$\sigma_{rr} = \frac{16}{3}\pi^2\alpha^3\sigma_B^2\eta^2 \left[\int_0^\infty \frac{\eta^2 \sinh(\varepsilon' - \varepsilon)}{\eta'|\eta^2 - \eta'^2| \sinh(\pi\eta) \sinh(\pi\eta')} \times \right. \\ \left. \times \left(\xi \frac{d}{d\xi} |F(\xi)|^2 \right) d\eta' - \coth \pi\eta + 1 \frac{1}{\pi\eta} \right], \quad (5)$$

$$\eta = \sqrt{J/\varepsilon} = Ze^2/c\hbar v.$$

Для $\eta \gg 1$ или $Ze^2/c\hbar \gg v/c$ в статье приведено
асимптотическое выражение (5):

$$\sigma_{rr} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\alpha^3\sigma_B^2\eta^2 \ln \eta. \quad (6)$$

Полученные ограничения

$$\begin{aligned}\frac{v}{c} &\ll \alpha^{5/2} \\ \frac{v}{c} &\ll \alpha\end{aligned}\tag{7}$$

Формулы (1) и (2) отличаются существенным образом: при выполнении условия (7) сечения отличаются на несколько порядков. Классическое сечение имеет не характерную ($\frac{1}{\sqrt{v}} \ln \frac{\text{const}}{v}$) зависимость от скорости для медленных частиц в Кулоновском поле; в формулы (1) и (2) постоянная тонкой структуры входит в разных степенях, сечения по-разному зависят от заряда ядра.

Полученные ограничения

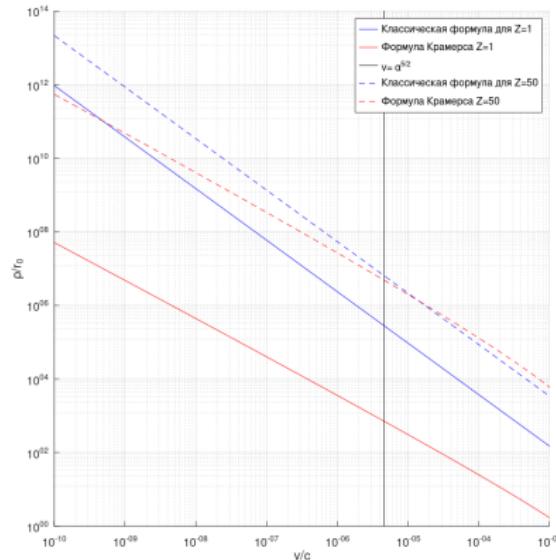


Рисунок 1 - – График зависимости обезразмеренного прицельного параметра от начальной скорости налетающих частиц.

Расчёт амплитуды однофотонного и двухфотонного процессов тормозного излучения

Чтобы оценить влияние многофотонных эффектов на сечение Крамерса, рассмотрим аналогичную задачу тормозного излучения.

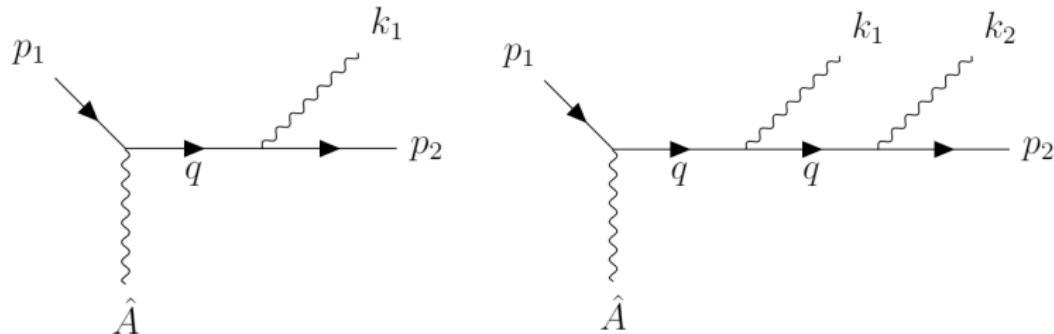


Рисунок 2 - – Диаграммы тормозного излучения с испусканием одного и двух фотонов

Расчёт амплитуды однофотонного и двухфотонного процессов тормозного излучения

- ❶ Энергия отдачи ядра мала \Rightarrow Заменяем фермионную линию ядра на стационарное электрическое поле.
- ❷ Все фотоны мягкие \Rightarrow их 4-импульсы малы по сравнению с электроном и $q \approx p_2 + \sum k_i$

$$M_1 = \frac{Ze^3}{q_{el}^2} \frac{\langle p_2 \epsilon_1 \rangle}{\langle p_2 k_1 \rangle} (\bar{u}_2 \gamma_0 u_1). \quad (8)$$

$$M_2 = \frac{\langle p_2 \epsilon_2 \rangle \langle p_2 \epsilon_1 \rangle}{(\langle p_2 k_1 \rangle + \langle p_2 k_2 \rangle)^2} \frac{Ze^4}{q_{el}^2} \cdot (\bar{u}_2 \gamma_0 u_1). \quad (9)$$

- ❶ Была изучена литература, посвященная выводу формулы в классическом приближении (1): [2] – работа, где ограничение на скорость было получено из действия, [3] – работа Елютина, где ограничение на скорость получено, как ограничение на момент.
- ❷ Была изучена литература, посвященная выводу формулы в квантовом приближении (2): [6] – в котором впервые была сформулирована формула исходя из полуклассических принципов, [11, 13, 10] – учебники по квантовой механике, в которых приведен метод квантовомеханического расчета сечения неупругих реакций, [5] – в котором проводилось исследование суммарного сечения рекомбинации в различных пределах.
- ❸ В работе было получено ограничение на пределы применимости формул для сечения рекомбинации (7).

Обе формулы работают при близких пределах на скорость, в большинстве работ по физике частиц и плазмы [1, 4, 7, 8] используют Крамерса. В работах [3, 9] существует явное упоминание возможности классического расчета сечения рекомбинации. При низких энергиях, характерных для проблем космологии классическая формула тоже имеет место быть, но не хватает экспериментальных данных, чтобы проверить ее соответствие эксперименту.

Спасибо за внимание!