

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 53.01

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

Ограничение на скопление первичных черных дыр по наблюдению
звездного скопления в галактике Эриданус.

Научный руководитель _____ К. М. Белоцкий

Выполнил _____ М. А. Краснов

Москва 2020

Содержание

1	Введение	3
1.1	Что такое ПЧД?	3
1.2	Роль ПЧД в данной работе	4
2	Карликовая галактика Эриданус II	5
3	Ограничения на скопление черных дыр	8
4	Заключение	13

1 Введение

1.1 Что такое ПЧД?

Массивные компактные объекты, черные дыры, могут иметь разное происхождение. Разделяют астрофизическое и первичное происхождение черных дыр. Астрофизическими называют черные дыры, которые образовались в результате коллапса достаточно массивной звезды. С ПЧД всё намного сложнее. Первичные черные дыры (ПЧД) были источником пристального интереса в течение почти 50 лет, несмотря на то, что до недавнего времени не было явных свидетельств доказывающих их существование. Причина такого интереса связана с тем, что ничего не запрещает таким черным дырам рождаться в ранней вселенной. Другой причиной интереса является то, что такие черные дыры могут рождаться в очень широком диапазоне масс. В частности, они могут быть настолько легкими, чтобы излучение Хокинга было существенным. Это еще не подтверждено экспериментально, и остаются основные концептуальные загадки, связанные с этим процессом, и сам Хокинг пытался их решить. Тем не менее, это открытие общепризнано как одно из ключевых достижений физики 20 века, поскольку оно прекрасно объединяет общую теорию относительности, квантовую механику и термодинамику. Тот факт, что Хокинг пришел к этому открытию только благодаря рассмотрению свойств ПЧД показывает, что изучение чего-либо может быть полезным, даже если оно и не существует!

На плотность ПЧД наложен ряд ограничений в зависимости от их массы, в том числе за счет эффекта Хокинга. Но среди ограничений на ПЧД есть так называемые динамические ограничения — за счет гравитационного взаимодействия с другими объектами. К числу таких ограничений относится полученное на основе рассмотрения процесса захвата ПЧД звездным скоплением и возможным последующим разрушением этого скопления. Так же это может приводить к образованию черной дыры промежуточной массы за счет аккреции захватившейся ПЧД. До сих пор о существовании черных дыр промежуточных масс нет однозначных свидетельств. Это может быть источником дополнительного ограничения на ПЧД.

Ограничения могут быть пересмотрены в случае модели кластера ПЧД [1]. В случае захвата кластера ПЧД скоплением звезд ситуация может оказаться нетривиальной. В настоящей работе предпринимается попытка проанализировать возможные динамические эффекты прохождения сквозь скопление звезд как кластера ПЧД, так и одиночных.

ПЧД могли образоваться в ранней Вселенной. Скорее всего благодаря высокой плотности энергии в ранние времена. Поэтому можно дать грубое предположение о массе ПЧД. Верхней оценкой, конечно, будет масса горизонта.

$$M \sim \frac{c^3 t}{G} \sim 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23} \text{с}} \right) \text{Г} \quad (1)$$

Отсюда понятно, что с возрастом Вселенной верхняя граница массы ПЧД растет, например, ПЧД родившаяся через время Планка после рождения Вселенной, не может

быть тяжелее 10^{-5} г. Высокая плотность ранней Вселенной является необходимым, но не достаточным условием для образования ПЧД. Одной возможностью является наличие первичных неоднородностей в ранней Вселенной, такие, что сверхплотные участки могли остановить расширение и реколлапсировать.

Каким бы ни был источник неоднородностей, образование ПЧД увеличилось бы, если бы произошло резкое уменьшение давления - например, в эпоху КХД. Другая возможность заключается в том, что ПЧД могли образоваться спонтанно на каком-то своего рода фазовый переход, даже если не было предшествующих неоднородностей, например, от столкновений пузырьков или от коллапса космических струн, ожерелий или доменных стенок.

Существует множество различных моделей распределения ПЧД по их массам. Самая популярная - логнормальное распределение. см статью сделать здесь ссылку!

ПЧД в течение своей жизни испаряются. Из-за излучения Хокинга. Масштабы времени, на которых происходит испарение ПЧД - $\tau \propto M^3$, где M - начальная масса ПЧД. Возникает закономерный вопрос : ПЧД какой начальной массы, образовавшиеся в ранней Вселенной на текущий момент испарились полностью? Тогда τ надо приравнять возрасту Вселенной и получится оценка $M_* \approx 5 \times 10^{14}$ г. Хотя это и не исключает возможность наблюдения таких легких ПЧД, но точно говорит об их сравнительно небольшом количестве по сравнению с количеством более тяжелых ПЧД, так как образование легких ПЧД наиболее вероятно именно в ранней Вселенной.

1.2 Роль ПЧД в данной работе

Темная материя, которая скорее всего существует, хотя её существование ещё не доказано, вполне может хотя бы частично состоять из ПЧД. В этой работе будет рассмотрено влияние ПЧД на эволюцию звёздных скоплений. Очень важная характеристика

ПЧД - ограничение на их долю в темной материи. А именно $f_{\text{РВН}} = \frac{\rho_{\text{РВН}}}{\rho_{\text{DM}}}$, что мож-

но трактовать как плотность ПЧД, конечно, относительную, подразумевая, что ПЧД это компонента темной материи. Это выражение можно переписать следующим образом. Разделим числитель и знаменатель дроби справа на ρ_C - критическую плотность,

тогда получим $f_{\text{РВН}} = \frac{\Omega_{\text{РВН}}}{\Omega_{\text{DM}}}$. В соответствии с этим, $f_{\text{РВН}}$ можно так же трактовать

как долю ПЧД в темной материи. О том, как получить это ограничение на плотность ПЧД и пойдет речь в этой работе. Однако оно будет получено на примере карликовой галактики Эриданус II, а потому приближения, которые здесь будут использованы, неприменимы к другим космическим структурам. А затем будет оценена возможность захвата ПЧД звездными скоплениями в карликовых галактиках, исходя из тех же приближений. Ниже приведен график, показывающий известные ограничения на плотность ПЧД для разных космических структур в зависимости от масс ПЧД. По вертикали отложены значения $f_{\text{РВН}}$ для данной массы ПЧД. Каждое ограничение на плотность ПЧД получено разными методами. Небольшое пояснение к рисунку - различные типы испарения (пурпурный), динамическое трение (красный), гравитационное (голу-

бой), крупномасштабные структуры (зеленый) и аккреция (оранжевый).

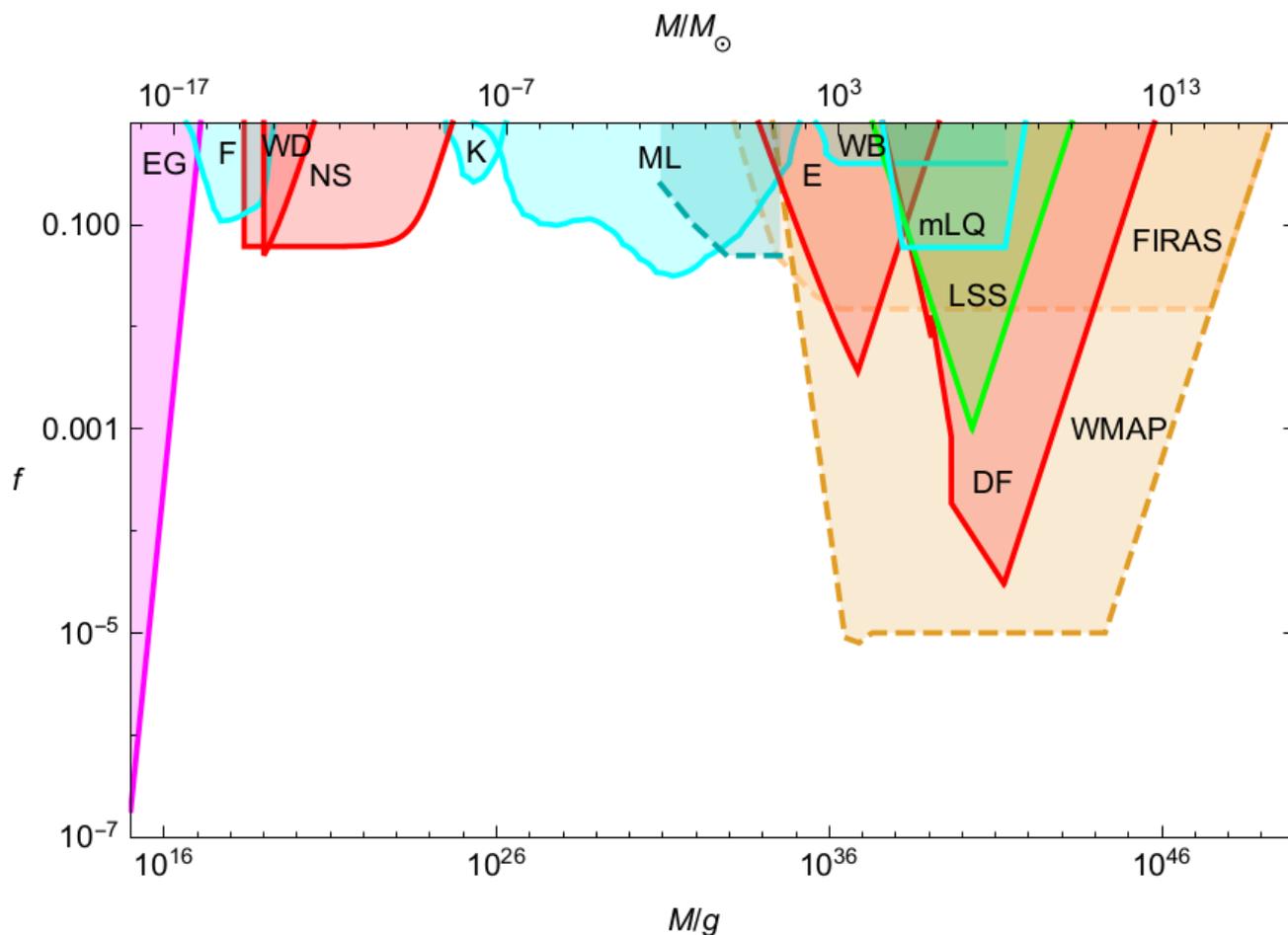


Рисунок 1 — Ограничения на долю ПЧД в темной материи

Отмеченный буквой E красный треугольник это именно то, что будет нас интересоваться. Он соответствует упомянутому выше Эриданусу II.

Для обзора я приведу аналитические выражения для некоторых ограничений на плотность ПЧД, показанных на графике в таблице 1. Было бы логично дополнить эту таблицу ограничением на плотность ПЧД в Эриданусе II, но оно будет выведено ниже здесь.

2 Карликовая галактика Эриданус II

Эриданус II это карликовая галактика из числа тех, что содержат в себе звездное скопление. В центре Эридануса находится шаровое скопление, хотя в этом отношении он не уникален. Здесь будет дано краткое изложение содержания статьи Timothy D. Brandt [2].

Звездное скопление - это динамическая среда, в которой гравитационные взаимодействия приводят к обмену энергией между звездами. Эти взаимодействия застав-

Диапазон масс	Ограничение	Структура
$500M < M < 10^3 M_\odot$	$f(M) < \frac{500M_\odot}{M}$	Wide binaries
$10^3 M < M < 10^8 M_\odot$	$f(M) < 0.4$	Wide binaries
$M > 10^4 M_\odot$	$f(M) < \max \left[\frac{10^4 M_\odot}{M}, \frac{M}{10^{10} M_\odot} \right]$	Lyman α -clouds

Таблица 1 — Ограничения на плотность ПЧД

ляют систему динамически релаксировать; эти взаимодействия можно аппроксимировать как диффузию, приближение Фоккера-Планка.

Каковы условия применимости такого приближения? Мы будем считать, что все столкновения независимы друг от друга и происходят только между парой объектов. Так же требуется пренебречь влиянием звездного скопления на это столкновение.

Когда присутствует диапазон масс, в котором заключены массы звезд в скоплении, звездные взаимодействия приводят к массовой сегрегации, при которой самые массивные тела имеют наиболее компактное в пространстве распределение. Взаимодействия двух тел, как правило, вследствие обмена энергией, уравнивают значения кинетической энергии объектов разных масс в данном секторе. В системе, состоящей из МАСНО массами $m_a > 1M_\odot$ и звезд, звезды получают энергию от МАСНО; компактная звездная система расширяется. Это можно рассматривать как диффузное расширение, при котором слабые рассеяния постепенно меняют скорость каждой звезды. Сумма коэффициентов диффузии для параллельных и перпендикулярных составляющих вектора скорости описывает эволюцию кинетической энергии звезды. Предполагая изотропное максвелловское распределение скоростей для частиц темной материи и локально однородное однородное распределение темной материи, соответствующий коэффициент диффузии будет

$$D [(\Delta v)^2] = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 f_{\text{DM}} \rho m_a \ln \Lambda \left[\frac{\text{erf}(X)}{X} \right]}{\sigma} \quad (2)$$

В этой формуле ρ -плотность тёмной материи, $\ln \Lambda$ -кулоновский логарифм, m_a -масса МАСНО, σ -дисперсия скоростей в галактике, а $X = \frac{v_*}{\sqrt{2}\sigma}$ - отношение характерной относительной скорости движения звезд к дисперсии скоростей. Автор полагает звезды холодными по сравнению с тёмной материей. Поэтому можно положить $v_* < \sigma \rightarrow X < \frac{1}{\sqrt{2}}$, из чего получаем, что $\frac{\text{erf}(X)}{X} \approx 1$, тогда формула 2 упростится

$$D [(\Delta v)^2] = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 f_{\text{DM}} \rho m_a \ln \Lambda}{\sigma} \quad (3)$$

Теперь рассмотрим кулоновский логарифм

$$\ln \Lambda \approx \ln \left(\frac{b_{\max} \langle v^2 \rangle}{G(m_* + m_a)} \right) \approx \ln \left(\frac{r_h \sigma^2}{G(m_* + m_a)} \right) \quad (4)$$

Кулоновский логарифм нечувствителен к изменениям параметров. Поэтому для определенности положим $b_{\max} = r_h$, где r_h -радиус, на котором излучается половина светимости скопления.

Если темная материя это смесь МАСНОs и легких частиц WIMP (weakly interacting massive particles), то последние будут динамически не нагревать систему, а охлаждать. Соответствующий эффект тоже описывается коэффициентом диффузии

$$v_{\parallel} D [\Delta v_{\parallel}] = - \frac{4\pi v_* G^2 (1 - f_{\text{DM}}) \rho m_* \ln \Lambda}{\sigma^2} G(X) \quad (5)$$

Где $G(X) = \frac{1}{2X^2} \left[\text{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} \exp -X^2 \right]$, с которой упрощение выше уже не работает. Надо сравнить эффекты нагрева и охлаждения.

$$\frac{\text{heating}}{\text{cooling}} \sim \frac{m_a \sigma}{\sqrt{2} m_* v_*} \left(\frac{\text{erf}(X)}{X G(X)} \right) \left(\frac{f_{\text{РВН}}}{1 - f_{\text{РВН}}} \right) \quad (6)$$

Видно, что динамическое трение соотносится с динамическим охлаждением как соотносятся массы ПЧД и звезд. Можно пренебречь охлаждением, критерием проверки правильности этого пренебрежения будет отсутствие $f_{\text{РВН}}$ на массах ПЧД порядка массы солнца, то есть характерной массы звезды.

Если звездное скопление заключено в однородном шаре темной материи постоянной плотности ρ , тогда потенциальная энергия на единицу массы даётся выражением

$$\frac{U}{M} = \text{const} + \beta G \rho r_h^2 - \alpha \frac{GM_*}{r_h} \quad (7)$$

В этом выражении M_* -звездная масса скопления, а коэффициенты β и α зависят от того, как распределены массы внутри скопления. Для Эридануса эти значения - $\alpha \approx 0.36$ и $\beta \approx 7.2$. В соответствии с теоремой вириала

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} U \quad (8)$$

Чтобы получить уравнение, описывающее эволюцию скопления, первым шагом будет деление уравнения на массу скопления M .

$$\frac{E_{\text{tot}}}{M} = \frac{1}{2} \frac{U}{M} \quad (9)$$

Теперь берем производную по времени, помня, что соответствующий коэффициент диффузии показывает среднее значение производной заданной величины по времени, т.е.

$$D(\Delta E) = \dot{\bar{E}}$$

Считая, что $r_h = r_h(t)$, продифференцируем выражение 9 по времени и усредним. Получим

$$\frac{\dot{\bar{E}}_{\text{tot}}}{M} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\bar{U}}}{M}$$

Потребуется следующее выражение для коэффициентов диффузии

$$D[(\Delta E)] = M \left(v_{\parallel} D[\Delta v_{\parallel}] + \frac{1}{2} D[(\Delta v)^2] \right) \approx \frac{M}{2} D[(\Delta v)^2] \quad (10)$$

А теперь подставим выражения для производных, опуская усреднение, получится

$$\alpha \frac{GM_*}{r_h^2} \dot{r}_h + 2\beta G \rho r_h \dot{r}_h = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 f_{\text{DM}} \rho m_a \ln \Lambda}{\sigma} \quad (11)$$

Разрешая относительно производной получится

$$\dot{r}_h = \frac{dr_h}{dt} = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 f_{\text{DM}} m_a \ln \Lambda}{\sigma} \left(\alpha \frac{GM_*}{\rho r_h^2} + 2\beta G r_h \right)^{-1} \quad (12)$$

Полученное выражение совпадает с данным в статье вышеуказанного автора. Сделано всё это ради того, чтобы разобраться с алгеброй коэффициентов диффузии и с помощью них дать уже совершенно другую оценку.

Я обещал привести аналитическое выражение для ограничения на плотность ПЧД в Эриданусе :

$$\begin{aligned} M < 10^3 M_{\odot}, f_{\text{РВН}} < 0.5 \left(1 + \frac{0.046 M_{\odot} \text{пк}^{-3}}{\rho} \right) \left(\frac{10 M_{\odot}}{M} \right) \left(\frac{\sigma}{10 \text{км с}^{-1}} \right) \times \\ \times \left(1 + 0.1 \ln \left[\frac{10 M_{\odot}}{M} \left(\frac{\sigma}{10 \text{км с}^{-1}} \right)^2 \right] \right)^{-1} \\ M > 10^3 M_{\odot}, f_{\text{РВН}} < \frac{M}{10^6 M_{\odot}} \end{aligned}$$

Приведу теперь график ограничений на плотность ПЧД [2])

3 Ограничения на скопление черных дыр

Рассматриваемые скопления пчд имеют степенное распределение по массам [1]

$$\frac{dN}{dM} \propto \frac{1}{M^2} \quad (13)$$

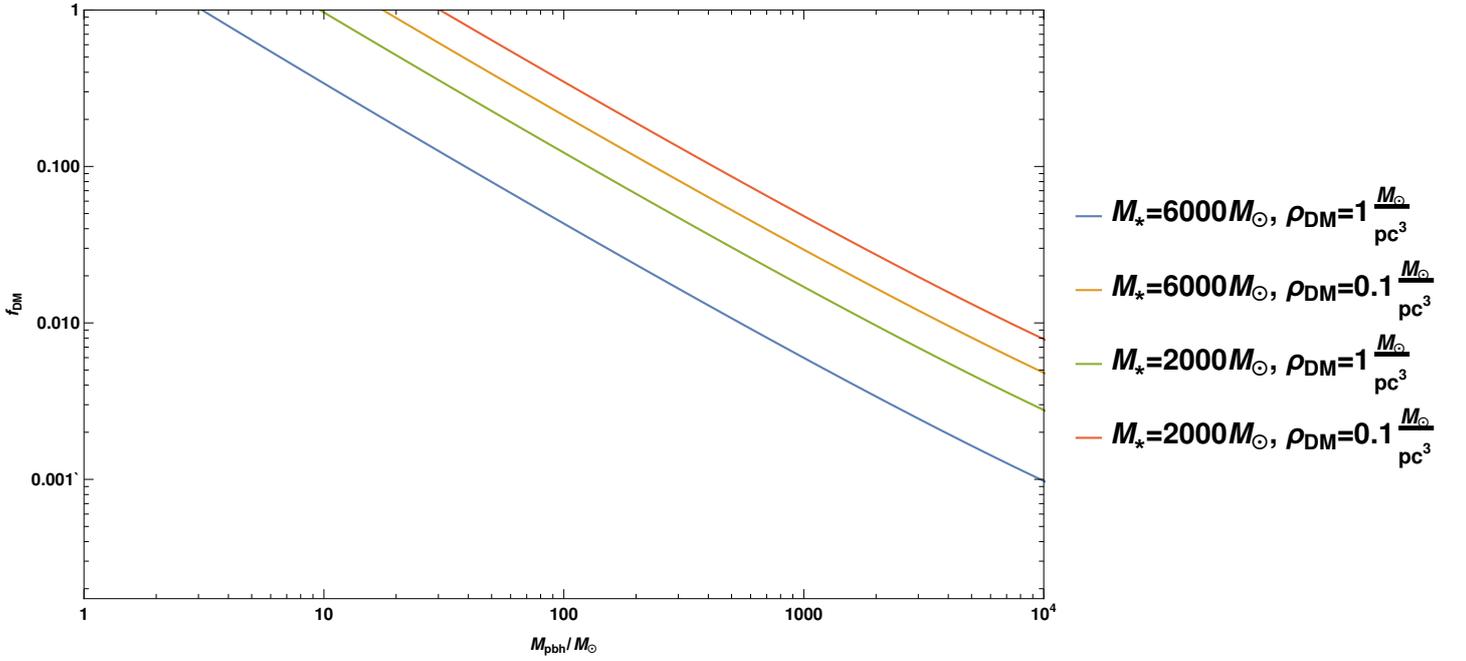


Рисунок 2 — Ограничения на плотность ПЧД

Где N - число пчд в скоплении. Мы будем использовать только два параметра для описания скопления пчд. Это M_{min} и M_{cl} которые являются минимальной массой внутри скопления и полной массой скопления. Для этого на распределение по массам надо наложить три условия.

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_{M_{min}}^{M_{max}} \frac{dN}{dM} dM \\ M_{cl} = \int_{M_{min}}^{M_{max}} M \frac{dN}{dM} dM \\ 1 = \int_{M_{max}}^{\infty} \frac{dN}{dM} dM \end{array} \right. \quad (14)$$

These conditions give us such results :

$$N = e^{W(\frac{M_{cl}}{M_{min}})} - 1 \approx e^{W(\frac{M_{cl}}{M_{min}})} \quad (15)$$

$$M_{max} = M_{min} \cdot e^{W(\frac{M_{cl}}{M_{min}})} \quad (16)$$

$$\frac{dN}{dM} = \frac{M_{max}}{M^2} = \frac{M_{min} \cdot e^{W(\frac{M_{cl}}{M_{min}})}}{M^2} \quad (17)$$

Где $W(x)$ - функция Ламберта. Эти результаты могут дать соотношение между M_{max} и M_{cl} . Отношение M_{max} к полной массе скопления может быть легко получено из

уравнения 16. Разделим обе части на M_{cl} и заменим $\frac{M_{cl}}{M_{min}}$ новой переменной t .

$$\frac{M_{max}}{M_{cl}} = \frac{e^{W(t)}}{t} \quad (18)$$

Со стремлением t в бесконечность дробь так же стремится к нулю.

Если предположить, что пчд в скоплении имеют максвелловское распределение по скоростям, то известен соответствующий коэффициент диффузии.

Эффект нагрева от пчд некоторой массы:

$$\frac{D[\Delta E]}{M_{star\ cluster}} \approx \frac{1}{2} D[(\Delta v^2)] = \frac{2\sqrt{2}\pi G^2 \rho M \ln \Lambda}{\sigma} \frac{\text{erf}(X)}{X} \quad (19)$$

Я просуммирую эти эффекты от всех пчд, используя другие обозначения. Положим $M_{max} = m_1$, тогда $M_{min} = m_n$ и будем называть слоем черные дыры одной массы внутри скопления. Тогда, если $\frac{m_i}{m_{i+1}} = k$, то $\frac{m_1}{m_n} = k^{n-1}$ и $\frac{N_{i+1}}{N_i} = k^2$.

Таким образом

$$\sum_{i=1}^n \rho_i m_i = \sum_{i=1}^n n_i m_i^2 = n_1 m_1^2 + n_1 m_1^2 + \dots = n(n_1 m_1^2) \quad (20)$$

$$\ln \frac{m_1}{m_n} = (n-1) \ln k \Rightarrow n = \frac{\ln \frac{km_1}{m_n}}{\ln k} = 1 + \log_k \frac{m_1}{m_n} \quad (21)$$

масса скопления пчд

$$M_{cl} = \sum_{i=1}^n N_i m_i = m_1 (1 + k + k^2 + k^3 + \dots) = m_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (22)$$

из уравнения 20 следует

$$\left(1 + \log_k \frac{m_1}{m_n}\right) n_1 M_{cl} \frac{m_1^2}{M_{cl}} = \rho_{cl} \left(1 + \log_k \frac{m_1}{m_n}\right) \frac{m_1(k-1)}{\left[k \left(1 + \log_k \frac{m_1}{m_n}\right) - 1 \right]} \quad (23)$$

$$D_i[(\Delta v^2)] = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 \rho_i m_i \ln \Lambda}{\sigma} \frac{\text{erf}(X)}{X} \quad (24)$$

$$D[(\Delta v^2)] = \sum_{i=1}^n D_i[(\Delta v^2)] \quad (25)$$

$$D[(\Delta v^2)] = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 \ln \Lambda}{\sigma} \rho_{DM} f_{DM} \left(1 + \log_k \frac{m_1}{m_n}\right) \frac{m_1(k-1)}{\left[k \left(\frac{m_1}{m_n} \right)^{1+\log_k \frac{m_1}{m_n}} - 1 \right]} \quad (26)$$

Окончательно предельный переход дает

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left(1 + \log_k \frac{m_1}{m_n}\right) \frac{m_1(k-1)}{\left[\frac{m_1}{m_n} k - 1 \right]} = \frac{m_1 m_n \ln \frac{m_1}{m_n}}{m_1 - m_n} \quad (27)$$

Это выражение совпадает со средней массой внутри скопления черных дыр, если воспользоваться свойствами непрерывного распределения по массам. Таким образом, в коэффициенте диффузии для скопления произойдет замена массы черных дыр на среднюю массу внутри него.

Итак, пришло время привести результаты в виде графиков. Пунктирными линиями

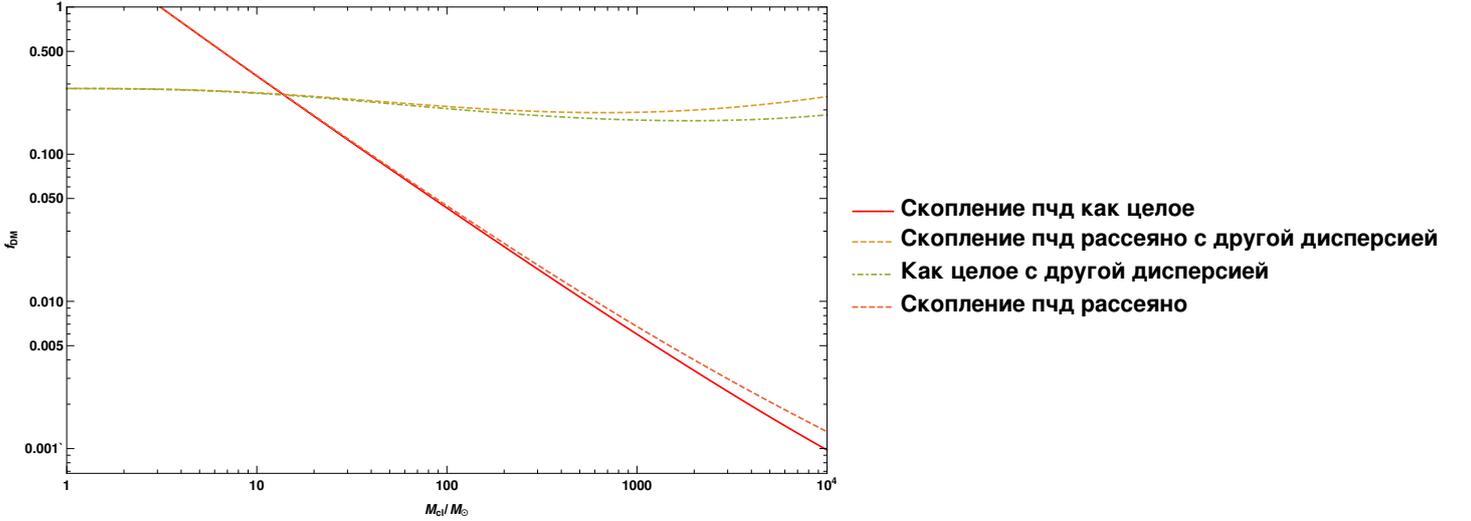


Рисунок 3 — Ограничения на плотность скопления ПЧД в Эриданусе возрастом 12 миллиардов лет и плотностью темной материи $\rho_{DM} = 1 \frac{M_\odot}{\text{pc}^3}$. Минимальная масса пчд в скоплении - $10M_\odot$

обозначены искомые линии, отвечающие за ограничения на скопления черных, то есть их долю в темной матери, а штрих-пунктирные линии показывают ограничение на совокупный эффект скопления как целого и рассеянного. Продолжение линий влево от сплошной красной является лишь экстраполяцией и не несет физического смысла.

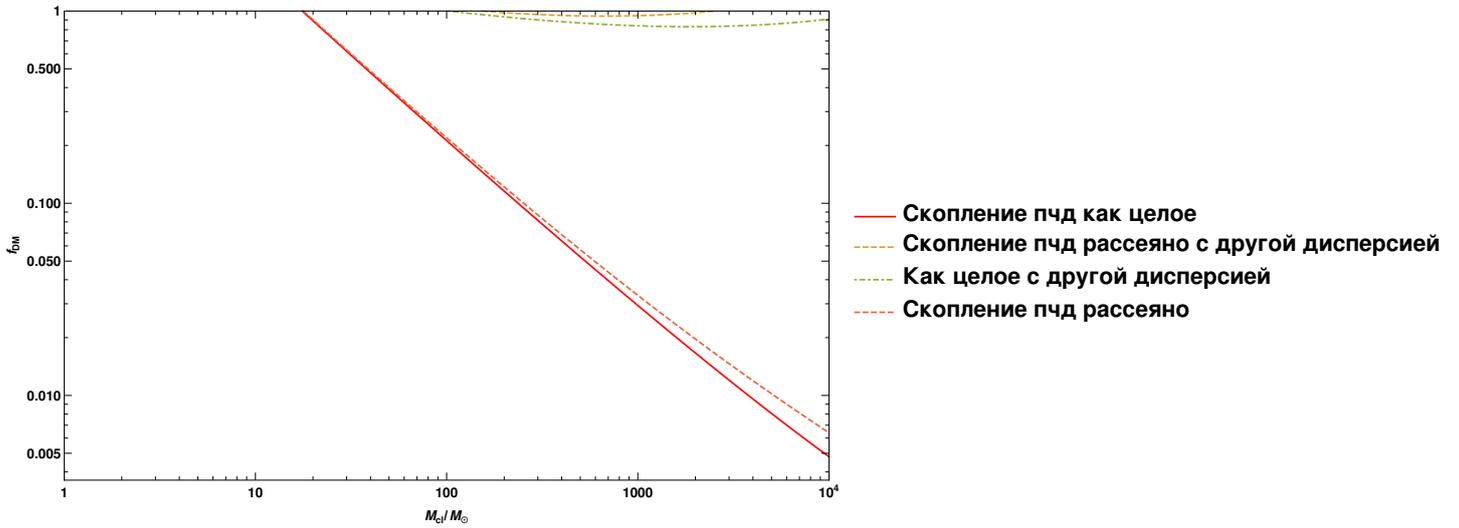


Рисунок 4 — Ограничения на плотность скопления ПЧД в Эриданусе возрастом 12 миллиардов лет и плотностью темной материи $\rho_{DM} = 0.1 \frac{M_{\odot}}{\text{pc}^3}$

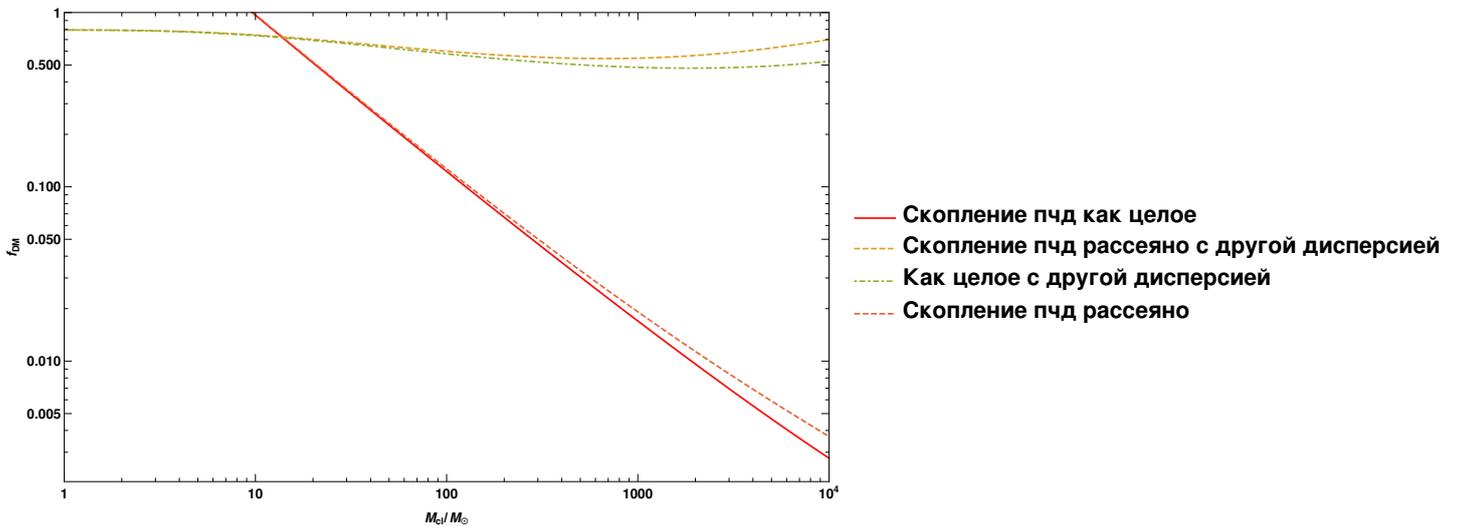


Рисунок 5 — Ограничения на плотность скопления ПЧД в Эриданусе возрастом 3 миллиарда лет и плотностью темной материи $\rho_{DM} = 1 \frac{M_{\odot}}{\text{pc}^3}$

Если предположить, что рассеянные черные дыры связаны друг с другом как в кластере и положить их дисперсию скоростей равной не таковой в галактике, а заменить её на корень из суммы квадратов дисперсии скоростей в галактике и второй космической скорости внутри кластера, то изменение окажется очень несущественным.

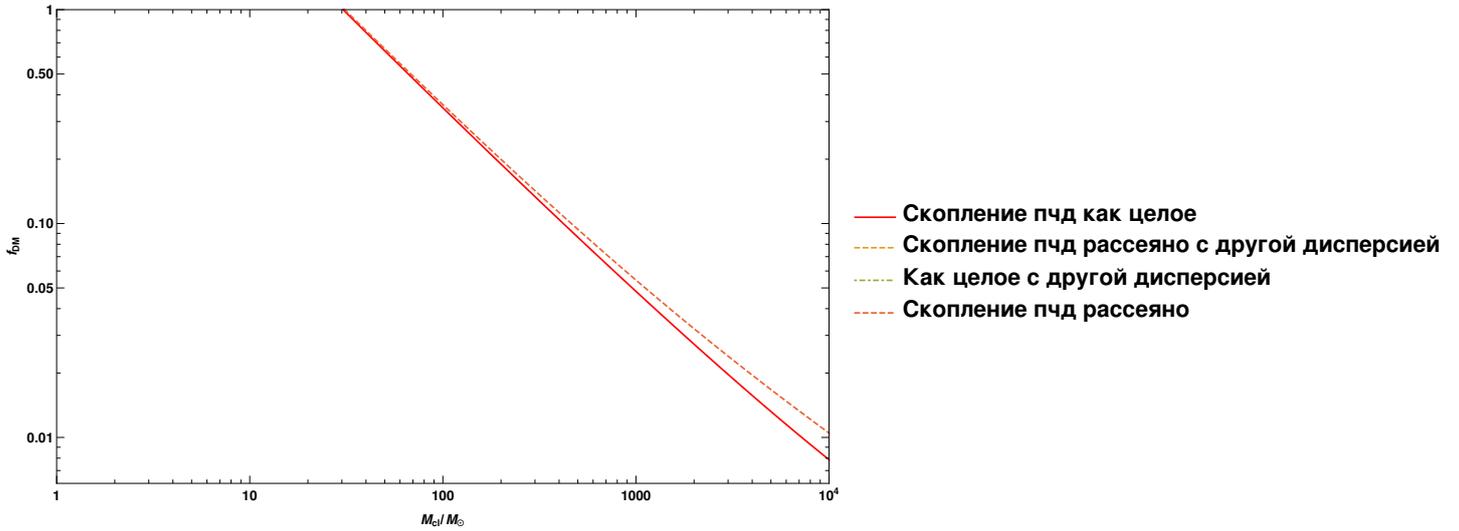


Рисунок 6 — Ограничения на плотность скопления ПЧД в Эриданусе возрастом 3 миллиарда лет и плотностью темной материи $\rho_{DM} = 0.1 \frac{M_\odot}{\text{pc}^3}$

4 Заключение

В данной работе изучался динамический эффект нагрева черными дырами звездного скопления в карликовой галактике Эриданус II. Главной целью являлся поиск ограничений на черные дыры, распределенные по степенному закону. Для этого были использованы коэффициенты диффузии, получаемые из уравнения Фоккера-Планка. Полученные результаты говорят о том, что темная материя может быть в значительной степени обусловлена такими скоплениями благодаря обилию в них легких черных дыр.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Clusters of Primordial Black Holes / K. M. Belotsky [et al.] // The European Physical Journal C. — 2019. — Mar. — Vol. 79, no. 3.
2. *Brandt T. D.* CONSTRAINTS ON MACHO DARK MATTER FROM COMPACT STELLAR SYSTEMS IN ULTRA-FAINT DWARF GALAXIES // The Astrophysical Journal. — 2016. — June. — Vol. 824, no. 2. — P. L31.
3. *Carr B., Kuhnel F., Visinelli L.* Black Holes and WIMPs: All or Nothing or Something Else. — 2020.
4. *Carr B., Kühnel F., Visinelli L.* Constraints on stupendously large black holes // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Nov. — Vol. 501, no. 2. — P. 2029–2043.
5. *Carr B., Kühnel F.* Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2020. — Oct. — Vol. 70, no. 1. — P. 355–394.
6. Constraints on Primordial Black Holes / B. Carr [et al.]. — 2020.
7. *Putten M. H. van.* Relaxation-limited evaporation of globular clusters // New Astronomy. — 2012. — May. — Vol. 17, no. 4. — P. 411–423.
8. *McLaughlin D. E., Fall S. M.* Shaping the Globular Cluster Mass Function by Stellar-Dynamical Evaporation // The Astrophysical Journal. — 2008. — June. — Vol. 679, no. 2. — P. 1272–1287.
9. Towards closing the window of primordial black holes as dark matter: The case of large clustering / T. Bringmann [et al.] // Physical Review D. — 2019. — Mar. — Vol. 99, no. 6.
10. Mass evaporation rate of globular clusters in a strong tidal field / J. P. Madrid [et al.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2017. — June. — Vol. 470, no. 2. — P. 1729–1737.