

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

(НИЯУ «МИФИ»)

УДК 539.123, 519.688

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Разработка программного обеспечения для расчёта спектров реакторных  
antineйтрино

Руководитель НИР,  
к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ О.А. Титов

Студент

\_\_\_\_\_ Д.В. Попов

Москва 2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Реакторные эксперименты</b>	<b>6</b>
<b>2 Метод конверсии</b>	<b>10</b>
2.1 Построение математической модели и алгоритма . . . . .	11
2.1.1 Функция Ферми . . . . .	14
2.1.2 Поправки на конечный размер ядра . . . . .	18
2.1.3 Экранирование . . . . .	21
2.1.4 Радиационные поправки . . . . .	23
2.1.5 Слабый магнетизм . . . . .	24
2.1.6 Атомный обмен . . . . .	26
2.1.7 Атомное несоответствие . . . . .	27
2.1.8 Выводы . . . . .	29
2.2 Корреляционная функция пересчета . . . . .	31
<b>3 Реализация, анализ полученных результатов</b>	<b>32</b>
<b>4 Заключение</b>	<b>37</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>38</b>
<b>Приложение А. Вспомогательные данные</b>	<b>42</b>
<b>Приложение В. Кумулятивные спектры реакторных     антинейтрино для <math>^{235}\text{U}</math> и <math>^{238}\text{U}</math></b>	<b>43</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Впервые возможность использовать ядерные реакторы в качестве источников антинейтрино обсуждал Б.М. Понтекорво [1]. Принцип работы реактора основан на управляемой, самоподдерживающейся цепной реакции деления тяжелых ядер, которая сопровождается выделением энергии. При одном таком делении образуется 2 (или более) нестабильных осколка с избыточным числом нейтронов, которые претерпевают серию  $\beta$ -распадов для возвращения в долину стабильности. На один акт деления приходится в среднем 6  $\beta$ -распадов, что соответствует рождению 6 электронных антинейтрино с энергиями до 8 МэВ. В реакторе с тепловой мощностью 1 ГВт будет рождаться порядка  $10^{20}$  электронных антинейтрино в секунду [1,2]. Таким образом, в связи с тем, что реактор является интенсивным и чистым источником антинейтрино, знание спектров последних представляет большой интерес для фундаментальной науки (осцилляционные реакторные эксперименты [2–6]), а зависимость этих спектров от мощности реактора и его топливного состава открывает возможность прикладного применения спектроскопии реакторных антинейтрино (нейтринный метод мониторинга ядерных реакторов [7]).

На данный момент существует два основных подхода для расчетов кумулятивных спектров реакторных антинейтрино [3,8]. Первый из них, метод прямого суммирования (*ab initio*), основан на использовании доступной информации о продуктах деления тяжелых изотопов и отдельных каналах бета-распада, которая получается либо из целенаправленных экспериментов, либо на основе численных вычислений, хранящихся в базах данных. Несмотря на хорошо проработанную теорию, использование прямого суммирования подразумевает учёт вклада тысяч каналов бета-распада для каждого делящегося изотопа, что приводит к большим неопределенностям.

Второй метод, называемый методом конверсии [3,8,9], состоит из трех этапов:

— измерение в лаборатории бета-спектра от конкретного делящегося изо-

топа;

— описание полученного бета-спектра при помощи набора синтетических каналов бета-распада, параметры которых определяются методом подгонки;

— использование теоретической модели для получения спектра антинейтрино.

В связи с систематическими погрешностями процедуры конверсии, данным методом можно получить спектр с более грубыми интервалами по энергии, чем измеренный бета-спектр, однако он лишен неопределенностей *ab initio*.

Кумулятивные бета-спектры от основных изотопов  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$  были измерены группой института Лауэ–Ланжевена (ILL) [10–12] в 80-ых годах, этой же группой была проведена конверсия полученных данных в спектры антинейтрино. Позднее, в 2011, в работах [8, 9] (модель Huber–Mueller) было проведено более аккуратное моделирование последних. Спектры антинейтрино  $\rho_\nu^{235}$ ,  $\rho_\nu^{239}$  и  $\rho_\nu^{241}$  в модели Huber–Mueller получены конверсией данных ILL, спектр  $\rho_\nu^{238}$  рассчитан методом *ab initio*. Оказалось, что измеренный на стандартном удалении 15 – 100 м от реактора выход реакции обратного бета-распада (основной реакции, по которой регистрируются антинейтрино) в среднем на 5% меньше, чем ожидаемый по данным работ [8, 9]. Данную проблему в литературе принято называть реакторной антинейтринной аномалией (“Reactor Antineutrino Anomaly”, RAA [13]), и её обычно связывают с двумя причинами:

— существованием стерильных нейтрино или другой новой физики;

— неточностью модельных спектров антинейтрино  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ , вызванных либо ошибками в измерениях спектров  $\beta$ -частиц группы ILL, либо ошибками самой процедуры конверсии.

В результате эксперимента НИЦ КИ [14, 15] было обнаружено, что нормировка спектра  $\beta$ -частиц  $^{235}\text{U}$  группы ILL, вероятно, ошибочно завышена примерно на 5%, что решает проблему RAA, но требует пересчета спектров реакторных антинейтрино. Целью данной работы является разработка программного обеспечения для расчета спектров реакторных антинейтрино методом конверсии, проверка устойчивости процедуры к изменению входных данных и получение самих спектров.

В первой главе данной работы обсуждаются теоретические и экспериментальные аспекты реакторных нейтринных экспериментов. Вторая глава посвящена реализации метода конверсии — производится анализ вкладов различных поправок к форме одиночных бета-спектров и спектров нейтрино, описывается математическая модель и алгоритм предложенной процедуры. В третьей главе представляются полученные результаты — кумулятивные спектры от основных изотопов и взвешенные сечения обратного бета-распада, проводится сравнение последних с экспериментальными данными.

# 1. РЕАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Полный реакторный спектр представляется как [3,7]

$$S_\nu(E_\nu) = \sum_i f_i \cdot S_i(E_\nu), \quad (1.1)$$

где  $f_i$  — число делений  $i$ -ого изотопа, а  $S_i(E_\nu)$  — соответствующий спектр антинейтрино  $i$ -ого изотопа, нормированный на одно деление.

Тепловая мощность реактора  $W_{th}$  связана с параметрами  $f_i$  [3]:

$$W_{th} = \sum_i f_i \cdot (E_i - E_\nu + E_n), \quad (1.2)$$

где  $E_i$  — энергия, выделяющаяся при делении  $i$ -ого изотопа,  $E_\nu$  — энергия антинейтрино,  $E_n$  — энергия, обусловленная захватами нейтронов в материалах реактора. Величину  $(E_i - E_\nu + E_n)$ , которую мы будем обозначать  $\varepsilon_i$ , обычно называют эффективной тепловой энергией. Под  $i$ -тыми изотопами будем понимать  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$ , так как распады именно этих элементов вносят основной вклад (более 99%) в тепловую мощность реактора. Величины  $\varepsilon_i$  для них рассчитаны с хорошей точностью [3].

Спектр антинейтрино  $S_i(E_\nu)$  представляется суммой по всем делениям  $i$ -ого изотопа [8]:

$$S_i(E_\nu) = \sum_{f=1}^{N_f} A_f(t) \rho_f(E_\nu), \quad (1.3)$$

где  $A_f(t)$  — активность  $f$ -ого продукта деления в момент времени  $t$ , нормированная на распад  $i$ -ого изотопа.  $\rho_f(E_\nu)$  в свою очередь является суммой по всем модам (ветвям), связывающим основное состояние родительского ядра с различными возбужденными состояниями дочерних ядер [8]:

$$\rho_f(E_\nu) = \sum_{b=1}^{N_b} \text{BR}_f^b \rho_f^b(Z_f, A_f, E_{0f}^b, E_\nu), \quad (1.4)$$

где  $\text{BR}_f^b$  — коэффициент ветвления (branching) — доля  $f$ -ых ядер, распадающихся по данной  $b$ -ой ветви относительно всех  $f$ -ых ядер,  $E_{0f}^b$  — энергия конечной точки  $b$ -ой ветви  $f$ -ого продукта деления ( $E_{0f}^b = E_\nu + E_\beta$ ),  $Z_f$  и  $A_f$  — заряд и атомный номер  $f$ -ого ядра соответственно.

Для электронов  $\rho_f^b$  имеет вид [8]

$$\rho_f^b = k_f^b \cdot p_\beta E_\beta (E_{0f}^b - E_\beta)^2 \cdot F(Z_f, E_\beta) \cdot C_f^b(E_\beta) \cdot \delta_f^b(Z_f, A_f, E_\beta). \quad (1.5)$$

Здесь  $k_f^b$  — нормировочный множитель,  $p_\beta E_\beta (E_{0f}^b - E_\beta)^2$  представляет фактор фазового объема (т.е. кинематику реакции),  $F(Z_f, E_\beta)$  — функция Ферми, описывающая кулоновское взаимодействие  $\beta$ -электрона с дочерним ядром. Множитель  $C_f^b(E_\beta)$  является поправкой к фактору фазового объема и включает в себе ядерный матричный элемент, зависит от запрещенности перехода (в случае разрешенных переходов  $C_f^b(E_\beta) = 1$ ). Наконец,  $\delta_f^b(Z_f, A_f, E_\beta)$  представляет собой различные поправки, связанные с неточностью ядра, экранированием, слабым магнетизмом и т.п. Далее перечисленные факторы будут обсуждаться более подробно.

Для получения одиночного спектра антинейтрино достаточно сделать замену  $E_\beta \rightarrow W_{0f}^b - E_\beta$  и изменить одну из поправок в выражении (1.5).

Зная спектры реакторных антинейтрино, можно рассчитать их потоки, которые будут регистрироваться в детекторе. Связь реакторного антинейтринного спектра  $S_\nu(E_\nu)$  (который, напомним, нормирован на один распад) с потоком антинейтрино  $\Phi_\nu(E_\nu)$  с энергией  $E_\nu$  на расстоянии  $L$  от реактора выражается формулой

$$\Phi_\nu(E_\nu) = \frac{W_{th}}{\bar{\varepsilon}} \frac{S_\nu(E_\nu)}{4\pi L^2}, \quad (1.6)$$

где  $W_{th}$  — тепловая мощность реактора, о которой речь шла выше,  $\bar{\varepsilon}$  — средняя энергия, выделяемая при одном распаде тяжелого элемента ( $\bar{\varepsilon} \approx 200$  МэВ).

Для регистрации антинейтрино в основном используется реакция обратного бета-распада (ОБР):



имеющая порог  $E_\nu \approx m_n - m_p + m_e \approx 1.8$  МэВ, где  $m_n, m_p$  и  $m_e$  — массы нейтрона, протона и электрона соответственно. С её помощью в 1956 году Ф.Райнесом и К.Коуэном в эксперименте на реакторе в Саванна-Ривер и было сделано экспериментальное открытие антинейтрино [16].

Существует несколько моделей сечения ОБР разной степени точности. ”Наивная” модель предполагает, что протон и нейтрон являются бесконечно тяжелыми (по сравнению с массами позитрона и энергией реакторных антинейтрино), а энергии  $e^+$  и  $\tilde{\nu}_e$  в приближении изотропии связаны простым соотношением:

$$E_e = E_\nu - (m_n - m_p). \quad (1.8)$$

Само ”наивное” сечение имеет вид [17]:

$$\sigma_{\text{Naive}} = \frac{1}{\pi} (G_V^2 + 3 G_A^2) E_e p_e, \quad (1.9)$$

где  $E_e, p_e$  — энергия и модуль импульса позитрона, а слабые константы  $G_V$  и  $G_A$  выражаются через постоянную Ферми  $G_F$ , элемент матрицы смешивания кварков Кабиббо–Кобаяши–Маскава  $V_{ud}$  и формфакторы свободного нуклона  $g_v, g_a$  как  $G_V = G_F V_{ud} g_v$  и  $G_A = G_F V_{ud} g_a$  соответственно.

Входящая в 1.9 комбинация слабых констант может быть отнормирована на  $\beta$ -распад свободного нейтрона [17]:

$$(G_V^2 + 3 G_A^2) = \frac{2\pi^3 \ln 2}{m_e^5 f t}, \quad (1.10)$$

где  $f = 1.7146$  [17] — безразмерный фактор фазового пространства,  $t$  — период полураспада нейтрона.

В упомянутой работе [17] обсуждаются различные поправки к сечению (отдача ядра, слабый магнетизм, радиационные поправки и т.д.), а в [18] представлены модели сечения с учетом анизотропии реакции.

В работе [19] представлено удобное для расчетов выражение

$$\sigma_{\text{Str}} = p_e E_e E_\nu^{-0.07056+0.02018 \cdot \ln(E_\nu)-0.001953 \cdot \ln^3(E_\nu)} \cdot 10^{-43} \text{ см}^2, \quad (1.11)$$

совпадающее с точными расчетами [17, 18] в пределах долей процента [19].

Как видно из уравнений выше, сечение реакции ОБР крайне мало (порядка  $10^{-43}$  см<sup>2</sup>) при энергиях реакторных антинейтрино, поэтому для эффективной регистрации необходимы достаточно большие объемы рабочего вещества детектора, в качестве которого обычно используют жидкий сцинтиллятор с высоким содержанием протонов. После взаимодействия антинейтрино с протоном рожденный позитрон забирает большую часть энергии реакции, которую затем достаточно быстро (за несколько наносекунд) теряет в рабочем веществе за счет ионизационных и радиационных потерь. В конечном итоге он аннигилирует с электроном в два  $\gamma$ -кванта с энергиями  $m_e = 0.511$  МэВ. Рожденный в ОБР нейтрон тем временем соударяется с ядрами среды и теряет свою кинетическую энергию. С уменьшением скорости нейтрона сечение его взаимодействия со средой растет, поэтому замедляется он достаточно быстро, а затем начинает диффундировать до момента захвата протоном с последующим испусканием  $\gamma$ -кванта с энергией 2.2 МэВ. Происходит это примерно через 200 мкс после реакции ОБР. В результате описанного процесса на выходе детектора появляются два сигнала — быстрый (от аннигиляции) и запаздывающий (от захвата нейтрона), при помощи которых можно получить энергию провзаимодействовавшего антинейтрино [4–6].

Помимо спектров позитронов ОБР, важной экспериментальной наблюдаемой является взвешенное сечение

$$\sigma^i = \int_{1.8}^8 \rho_\nu^i(E_\nu) \sigma(E_\nu) dE_\nu. \quad (1.12)$$

Коллаборациями Daya Bay [4, 6] и RENO [5] в ходе многолетнего набора статистики были впервые получены сечения  $\sigma^{235}$  и  $\sigma^{239}$ . Кроме того, Daya Bay получила спектры позитронов в потоках антинейтрино  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$  [6], что создает реальные предпосылки точного определения спектров антинейтрино  $\rho_\nu^{235}$  и  $\rho_\nu^{239}$ .

## 2. МЕТОД КОНВЕРСИИ

По результатам эксперимента ILL [10–12] были получены кумулятивные бета-спектры от трех основных изотопов. Для преобразования бета-спектров в спектры антинейтрино была предложена следующая процедура: экспериментальный спектр  $i$ -ого изотопа был аппроксимирован функцией

$$\rho^{(i)}(E_\beta) = \sum_{n=1}^N a_n^{(i)} \rho_\beta(E_\beta, E_{0n}^{(i)}) , \quad (2.1)$$

представляющей из себя сумму из  $N$  (для каждого  $i$ -ого изотопа число  $N$  выбиралось индивидуально) виртуальных одиночных бета-ветвей. По итогам аппроксимации были получены значения нормировочных коэффициентов (амплитуд) и конечных энергий  $\{a_n^{(i)}, E_{0n}^{(i)}\}$  для каждого изотопа, после чего по известной связи  $\rho_\beta(E_\beta)$  и  $\rho_\nu(E_\nu)$  были рассчитаны соответствующие кумулятивные спектры антинейтрино.

Данная процедура расчета антинейтринных спектров в литературе получила названия метода конверсии и активно обсуждалась авторами достаточно длительное время. Так, в работе [20] был проведен анализ процедуры на Монте–Карло данных и получены ограничения, гарантирующие погрешность преобразования порядка 1% в интервале энергий от 1 до 8 МэВ. В работе [8] был реализован расчет спектров антинейтрино с использованием данных [10, 11] на основе и метода *ab initio*, и метода конверсии.

Наконец, в работе [9] предложена модель, реализующая более точную конверсию с использованием большого числа различных поправок к одиночным спектрам, которые учитываются в каждой ветви, подробно описан и рассчитан вклад систематических погрешностей самой процедуры. По этим причинам за основу нашей модели будет положена работа [9].

## 2.1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА

Пусть имеется экспериментально измеренный кумулятивный бета-спектр  $\rho_\beta = \left\{ \rho_\beta^{(i)} \right\}_{i=1}^N$ , содержащий  $N$  точек. Разделим его на равные части по  $s$  точек так, чтобы энергетическая ширина каждого среза составляла порядка 250 кэВ (в упомянутых выше работах [9, 20] показано, что этот подход является оптимальным). Получим набор срезов  $S_j = \left\{ \rho_\beta^{(j-s)}, \rho_\beta^{(j-s-1)}, \dots, \rho_\beta^{(j)} \right\}$ , где индекс  $j$  нумерует срез и пробегает значения от  $s+1$  до  $N$ . Начиная с последнего среза  $S_N$  мы начинаем аппроксимацию — сеточная функция  $\{T^{(i)}, \rho_\beta^{(i)}\}_{i=N-s}^N$  описывается функцией  $a \rho_\beta(T, Q)$  с такими параметрами  $a$  и  $Q$ , что значение функционала

$$R = R(a, Q) = \sum_{i=N-s}^N \left( \rho_\beta^{(i)} - a \rho_\beta(T^{(i)}, Q) \right)^2 \quad (2.2)$$

минимально. Из этого условия находятся значения  $\{a_N, Q_N\}$ , соответствующие срезу  $S_N$ , т.е.

$$\{a_N, Q_N\} = \operatorname{argmin} [R(a, Q)] . \quad (2.3)$$

После этого строится функция  $a_N \rho_\beta(T_\beta, Q_N)$  и вычитается из исходного кумулятивного бета-спектра:

$$\rho_\beta^{(i)} == \rho_\beta^{(i)} - a_N \rho_\beta(T_\beta^{(i)}, Q_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

где "==" означает операцию присваивания.

Эта процедура повторяется для всех последующих срезов от  $N-2$  до  $s$ , в результате чего получается набор значений  $\{a_i, Q_i\}_{i=1}^{N/s}$ , с помощью которого строится кумулятивный спектр антинейтрино, соответствующий исходному  $\rho_\beta$ :

$$\rho_\nu(E_\nu) = \sum_{i=1}^{N/s} a_i \rho_\nu(E_\nu, Q_i) \quad (2.5)$$

Полученный спектр (2.5) является суммой  $N/s$  ветвей, в то время как истинный спектр содержит их порядка тысячи. В работе [20] с использованием Монте–Карло данных показано, к каким расхождениям приводит этот факт и чем он вызван. В той же работе предлагается метод, позволяющий свести возможные расхождения полученного спектра антинейтрино и истинного к минимуму. Он заключается в усреднении спектра (2.5):

- 1) Вводится более грубая, равномерная энергетическая сетка  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^M$ , шаг которой  $h = 250$  кэВ;
- 2) Значение  $\rho_\nu(\varepsilon_i)$  рассчитывается по формуле:

$$\rho_\nu(\varepsilon_i) = \frac{\int_{\varepsilon_i-h/2}^{\varepsilon_i+h/2} \rho_\nu(E_\nu) dE_\nu}{h} \quad (2.6)$$

Полученный набор значений  $\{\rho_\nu(\varepsilon_i)\}_{i=1}^M$  является конечным результатом процедуры конверсии. В работе [21] было предложено аппроксимировать  $\{\rho_\nu(\varepsilon_i)\}_{i=1}^M$  функцией

$$y(E) = \exp\left(\sum_{j=1}^6 a_j E^{j-1}\right). \quad (2.7)$$

Бета-спектр и спектр антинейтрино зависят от трёх основных параметров — нормировочного коэффициента  $a$ , энергии конечной точки  $E_0$  и заряда дочернего ядра  $Z$  (зависимостью от массового числа  $A$  мы пренебрегаем, она не вносит никакого значимого вклада [9]). Первые два из них, как показано выше, определяются в процессе аппроксимации. Технически, заряд  $Z$  тоже можно варьировать, однако это увеличит число степеней свободы в предложенной процедуре, делая её ещё более "нефизичной". Другой вариант — взять некоторое фиксированное значение (к примеру, для  $^{235}\text{U}$  положить  $Z = 92/2 + 1 = 47$ ).

Данные варианты обсуждались в работе [20], в ней же проанализирован оптимальный вариант, который был использован при расчете спектров антинейтрино в эксперименте ILL [10, 11]. Предлагается ввести некоторый эффективный заряд  $\langle Z \rangle$ , который определяется с использованием ядерных баз данных как [20]:

$$\langle Z \rangle(E_0) = \frac{\sum_{Z,A} Y(Z, A) \sum_f \text{BR}_f(E_{0,f}) Z}{\sum_{Z,A} Y(Z, A) \sum_f \text{BR}_f(E_{0,f})} \quad (2.8)$$

где  $Y(Z, A)$  — кумулятивный выход деления. Традиционно эту зависимость принято представлять в виде полинома второй степени [9–11, 20]:

$$\langle Z \rangle(E_0) = Z(E_0) = a_0 + a_1 E_0 + a_2 E_0^2 \quad (2.9)$$

Или же, в терминах энергии реакции  $Q$ :

$$Z(Q) = c_0 + c_1 Q + c_2 Q^2 \quad (2.10)$$

Мы будем использовать наборы коэффициентов  $c_i$  для аппроксимации  $Z(Q)$ , полученные в работе [9] для  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$  и представленные в таблице 1. Отметим, что в определении [9]  $Z$  является зарядом родительского ядра.

**Таблица 1.** Коэффициенты параметризации  $Z(Q)$  для выражения (2.10)

ИЗОТОП	$c_0$	$c_1$	$c_2$
$^{235}\text{U}$	$48.992_{-0.164}^{+0}$	$-0.399_{-0}^{+0.161}$	$-0.084_{-0.044}^{+0}$
$^{239}\text{Pu}$	$49.650_{-0.214}^{+0}$	$-0.447_{-0}^{+0.036}$	$-0.089_{-0.016}^{+0}$
$^{241}\text{Pu}$	$49.906_{-0.178}^{+0}$	$-0.510_{-0}^{+0.160}$	$-0.044_{-0.052}^{+0}$

В качестве модельного одиночного спектра мы будем использовать следующее выражение [22]:

$$\rho_\beta(T) = k p(T + m_e)(Q - T)^2 \{ F(Z, T) L_0(Z, T) C(Z, T, Q) S(Z, T) \cdot G_\beta(T, Q) (1 + \delta_{\text{WM}}) \} X(Z, T) r(Z, T, Q) , \quad (2.11)$$

где поправки к бета-спектру, выделенные в фигурных скобках, соответствуют модели Huber [9]. Соответствующий спектр антинейтрино  $\rho_\nu(E_\nu)$  получается заменой  $T \rightarrow Q - T$  и  $G_\beta \rightarrow H_\nu$ , где  $H_\nu$  — радиационная поправка для спектра антинейтрино.

Мы используем разрешенную форму перехода, полагая фактор формы равным 1. В работе [20] показано, что данного приближения оказывается достаточно для точного описания формы кумулятивного спектра антинейтрино. Выбор перечисленных поправок основан, во-первых, на модели Huber [9], и, во-вторых, на их анализе в обзорной статье [22]. Далее мы обсудим каждую из предложенных поправок, её происхождение и вклад в форму одиночного спектра.

### 2.1.1. ФУНКЦИЯ ФЕРМИ

Функция Ферми  $F(Z, E)$  описывает кулоновское взаимодействие точечного дочернего ядра с  $\beta$ -электроном. Формально она определяется как [23]

$$F(Z, E) = \frac{|\Psi_{\text{Coulomb}}|^2}{|\Psi_{\text{free}}|^2}, \quad (2.12)$$

где  $\Psi_{\text{free}}$  — свободное решение уравнения Дирака,  $\Psi_{\text{Coulomb}}$  — решение уравнения Дирака с кулоновским потенциалом. Явный вид функции Ферми описывается следующим уравнением [23]:

$$F(Z, E) = 2(\gamma + 1)(2p_\beta R)^{(2\gamma-1)} e^{(\pi\alpha Z E_\beta/p_\beta)} \cdot \frac{|\Gamma(\gamma + i\alpha Z E_\beta/p_\beta)|^2}{|\Gamma(2\gamma + 1)|^2}, \quad (2.13)$$

где  $p_\beta = \sqrt{E_\beta^2 - m_\beta^2}$ , — модуль 3-импульса электрона,  $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$ ,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция комплексного аргумента,  $R = R(A)$  — радиус ядра, для вычисления которого используем формулу Элтона [24]:

$$R(A) = 1.121A^{1/3} + 2.426A^{-1/3} - 6.614/A \text{ фм.} \quad (2.14)$$

На рисунке 2.1 представлен график функции Ферми (2.13) для  $Z = 46$ .

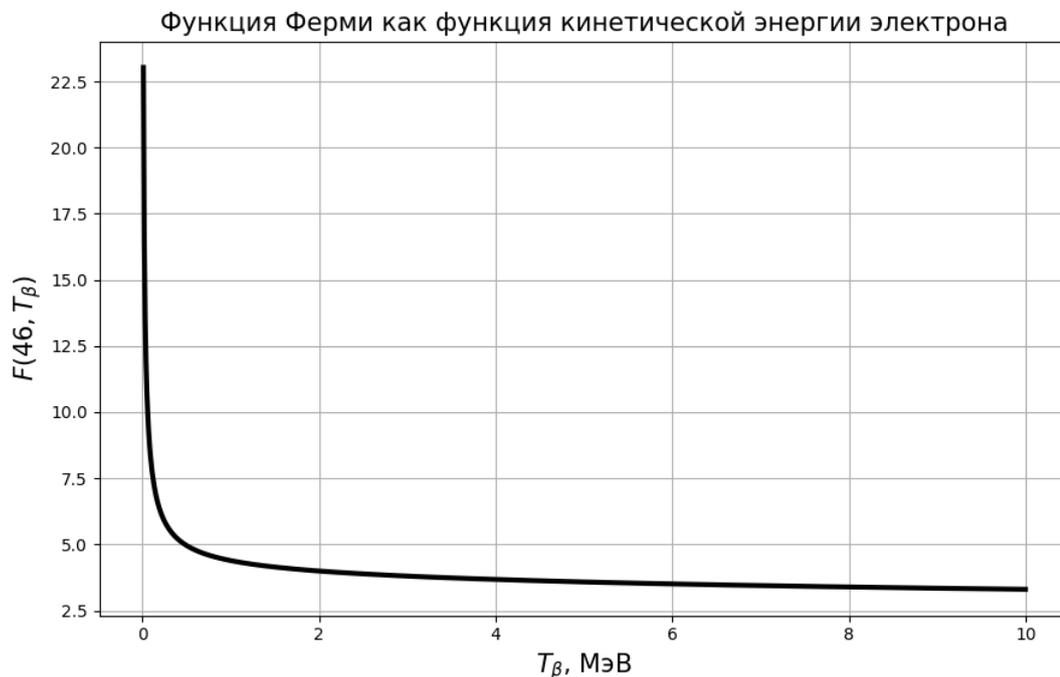


Рисунок 2.1 — Функция Ферми как функция кинетической энергии электрона

На следующих рисунках представлены нормированные спектры электронов и антинейтрино, иллюстрирующие вклад функции Ферми.

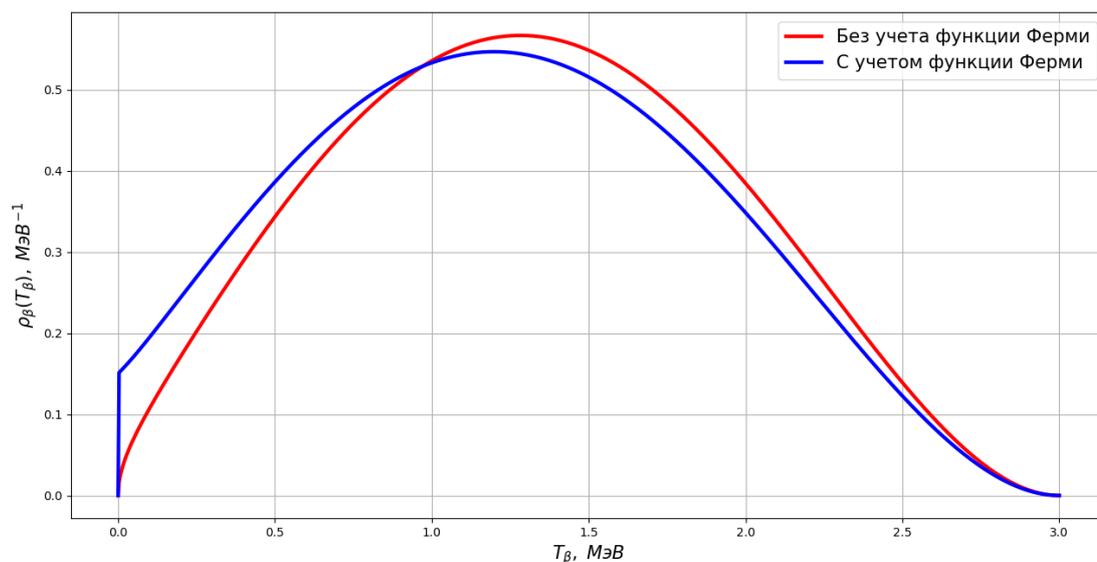


Рисунок 2.2 — Спектр электронов бета-распада в зависимости от кинетической энергии электрона  $T_\beta$ ,  $Z = 46$ ,  $Q = 3$  МэВ.

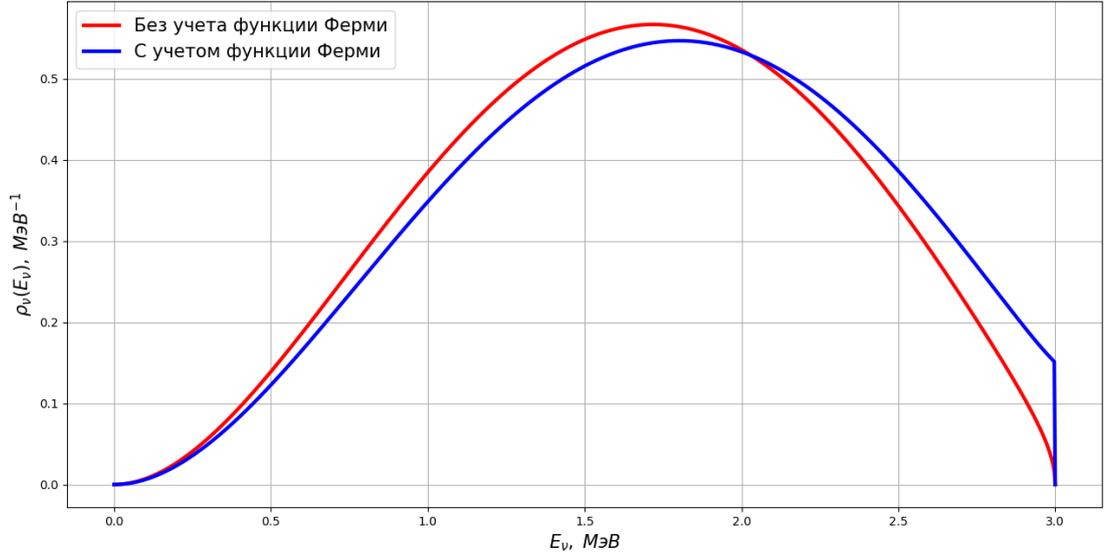


Рисунок 2.3 — Спектр антинейтрино бета-распада в зависимости от энергии антинейтрино  $E_\nu$ ,  $Z = 46$ ,  $Q = 3$  МэВ.

В случае метода конверсии важную роль играет не нормировка спектра (она находится путем подгонки), а его форма. По этой причине поступим следующим образом: пусть  $\Delta$  — какая-либо поправка к одиночному бета-спектру (или спектру антинейтрино). Определим вклад поправки  $\Delta$  в форму бета-спектра как

$$\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{k} p_\beta E_\beta (E_0 - E_\beta)^2 \cdot \Delta}{k p_\beta E_\beta (E_0 - E_\beta)^2} = \frac{\tilde{k}}{k} \cdot \Delta, \quad (2.15)$$

где  $\tilde{k}$  — нормировка  $\rho_\beta$  с учетом поправки  $\Delta$ , а  $k$  — нормировка  $\rho_\beta$  без учета поправки. Со спектрами антинейтрино поступим аналогично. Заметим, что даже если  $\Delta$  не зависит от энергии реакции  $Q$ , то  $\tilde{\Delta}$  в свою очередь уже является функцией  $Q$  (эта зависимость неявно заложена в нормировочных коэффициентах  $\tilde{k}$  и  $k$ ). В дальнейшем мы, обсуждая вклад какой-либо поправки в форму спектра, по умолчанию будем подразумевать именно нормированную поправку, согласно выражению (2.15).

Рассмотрим  $\tilde{F}(Z, E)$  — вклад в форму одиночного спектра от функции Ферми для  $Q = 3$  МэВ и  $Q = 6$  МэВ:

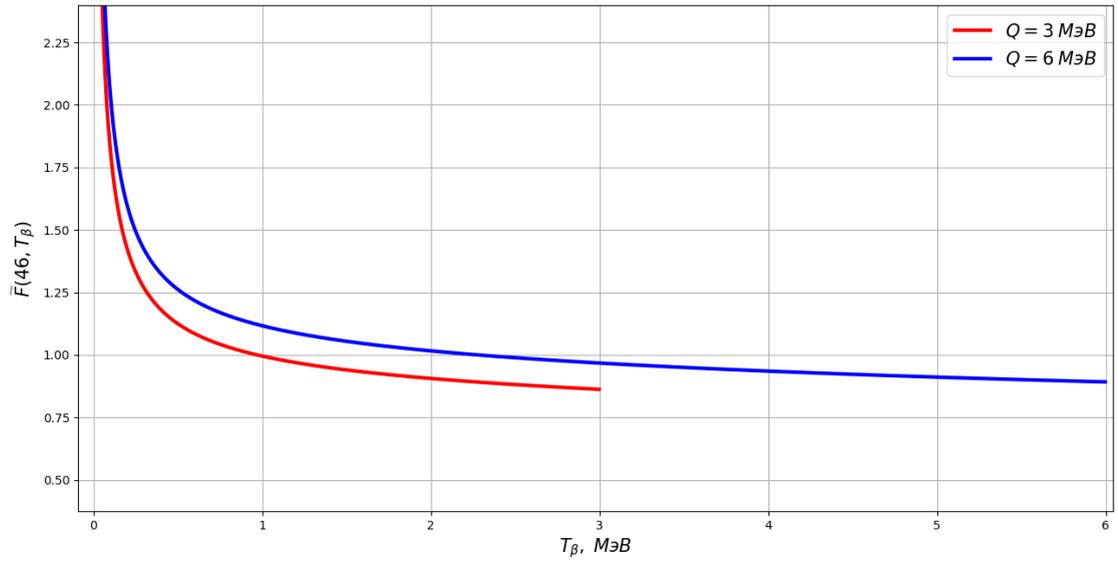


Рисунок 2.4 — Вклад функции Ферми в форму одиночного бета-спектра,  $Z = 46$ .

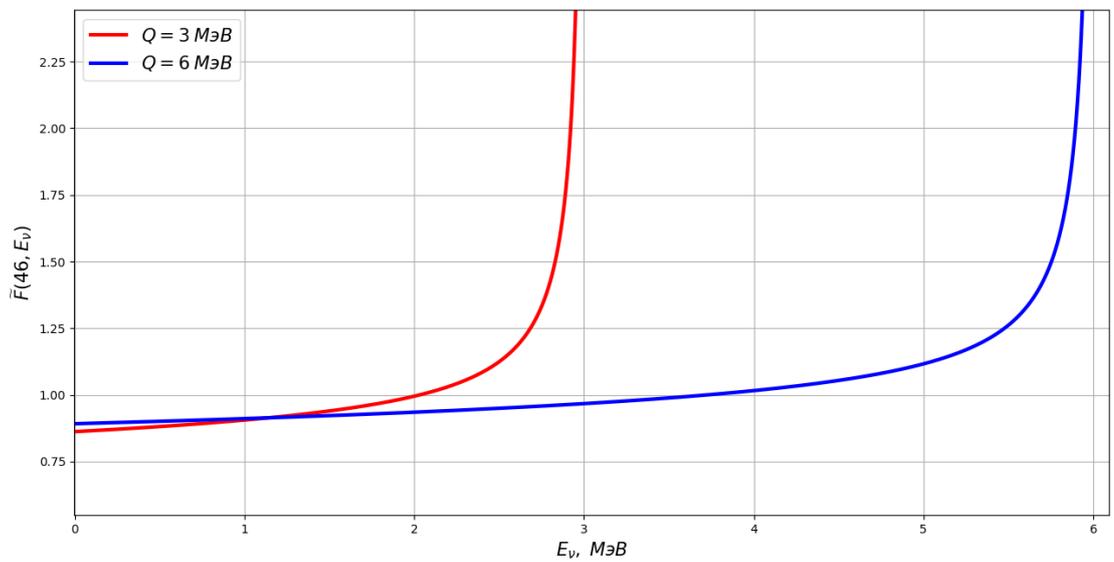


Рисунок 2.5 — Вклад функции Ферми в форму одиночного спектра анти-нейтрино,  $Z = 46$ .

### 2.1.2. ПОПРАВКИ НА КОНЕЧНЫЙ РАЗМЕР ЯДРА

При рассмотрении вместо точечного ядра ядра конечного размера, решить уравнение Дирака и получить выражение для уточненной функции Ферми  $F(Z, E)$  аналитически не представляется возможным. По этой причине в литературе используют различные приближения, связанные с распределениями электрического заряда  $\rho_{cl}$  в ядре. Так, например, ядро можно представить в виде равномерно заряженного шара, радиус которого  $R$  подгоняется таким образом, чтобы получить правильное значение  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  дочернего ядра [22, 26].

Численное решение уравнения Дирака в такой модели для стабильных ядер с  $R = r_0 A^{1/3}$  было получено [25], а затем расширено [26] для всех изотопов. Для перехода от точечного ядра к ядру конечного размера достаточно умножить функцию Ферми  $F_0(Z, E)$  на выражение  $L_0(Z, E)$ , которое в модели [26] имеет вид:

$$L_0^{Wil.}(Z, E) = 1 + \frac{13(\alpha Z)^2}{60} - ER\alpha Z \frac{(41 - 26\gamma)}{15(2\gamma - 1)} - \alpha Z R \gamma \frac{17 - 2\gamma}{30E(2 - 1)} + \\ + a_{-1} \frac{R}{E} + \sum_{n=0}^5 a_n (ER)^n + 0.41(R - 0.0164)(\alpha Z)^{4.5}, \quad (2.16)$$

$$a_n = \sum_{j=1}^6 b_{j,n} (\alpha Z)^j$$

где  $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$ , значения коэффициентов  $b_{j,n}$  представлены в таблице A1.

Рисунок 2.6 иллюстрирует вклад поправки конечного размера  $L_0^{Wil.}$  в форму спектров.

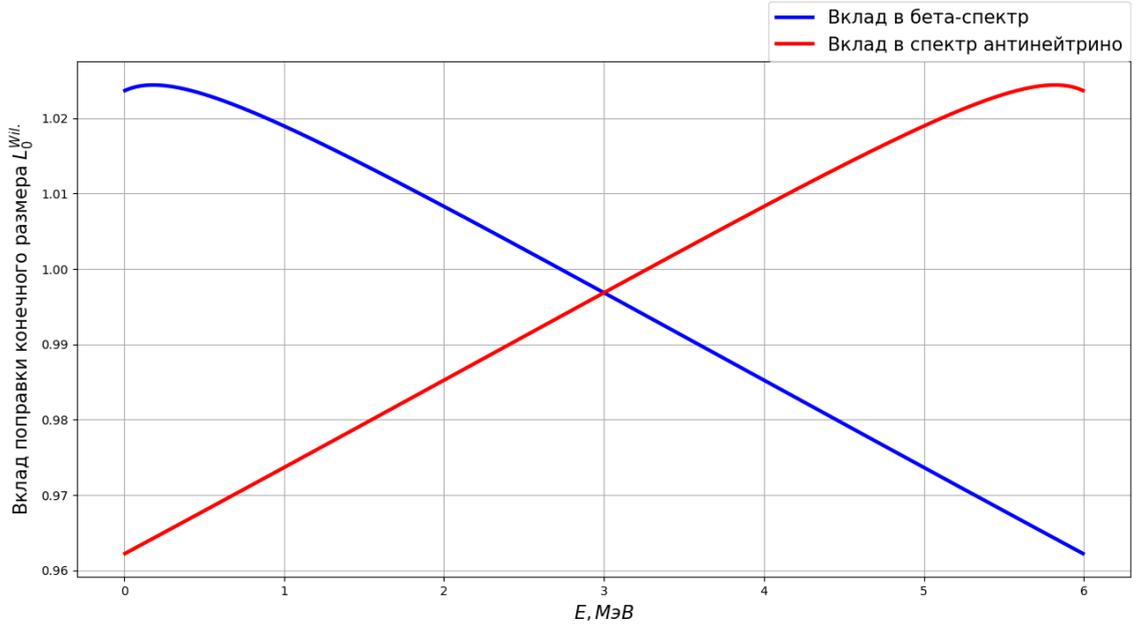


Рисунок 2.6 — Вклад поправки конечного размера  $L_0^{\text{Wil.}}$  в форму спектров,  $Z = 46$ ,  $Q = 6$  МэВ.

Из рисунка 2.6 видно, что изменение формы достигает порядка 2–4% при  $Q = 6$  МэВ (при  $Q \approx 1 - 2$  МэВ вклад будет порядка 1 – 2%).

Помимо представленной выше модели, существует несколько других подходов. Так, в работе [3] рассматриваются более простые поправки вида:

$$L_0^{\text{Vog.}}(Z, E) = 1 - \frac{10}{9} Z \alpha R E, \quad (2.17)$$

$$L_0^{\text{Hayes}}(Z, E) = 1 - \frac{8}{5} Z \alpha R E \left( 1 + \frac{9}{28} \frac{m_e^2}{E^2} \right). \quad (2.18)$$

Заметим, что выражения (2.16 - 2.18) представляются разложениями по малым величинам ( $\alpha Z$ )  $\approx 0.34$  (при  $Z \approx 46$ ) и  $(ER) \approx 0.24$  (при  $E \approx 8$  МэВ и  $R \approx 6$  фм), причем (2.17) и (2.18) даны до первого порядка по  $(\alpha ZER)$ . Исходя из этого, выражение (2.16) представляется более точным, поэтому в нашей модели за поправку конечного размера  $L_0$  мы примем модель [26], т.е.  $L_0 = L_0^{\text{Wil.}}$ .

Описанная выше функция  $L_0$  связана с конечным размером дочернего ядра при рассмотрении электромагнитного взаимодействия и является дополнением к функции Ферми. Помимо неё существует поправка конечного размера родительского ядра, связанная уже с неточностью слабого взаимодействия (а именно — с конечными длинами волн лептонов

и распределением нуклонов внутри ядра ) [26]. Её явный вид зависит от разрешенности и типа перехода. В случае разрешенных переходов гамов-теллеровского типа она описывается следующим уравнением [9, 22, 26]:

$$C(Z, E, E_0) = 1 + C_0 + C_1 \cdot E + C_2 \cdot E^2, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{233}{630}(\alpha Z)^2 - \frac{(E_0 R)^2}{5} + \frac{2}{35}E_0 R \alpha Z, \\ C_1 &= -\frac{21}{35}R \alpha Z + \frac{4}{9}E_0 R^2, \\ C_2 &= -\frac{4}{9}R^2 \end{aligned}$$

На рисунке 2.7 показан вклад поправки  $C(Z, E, E_0)$  в форму одиночных спектров, а на рисунке 2.8 — результирующий вклад обеих поправок конечного размера.

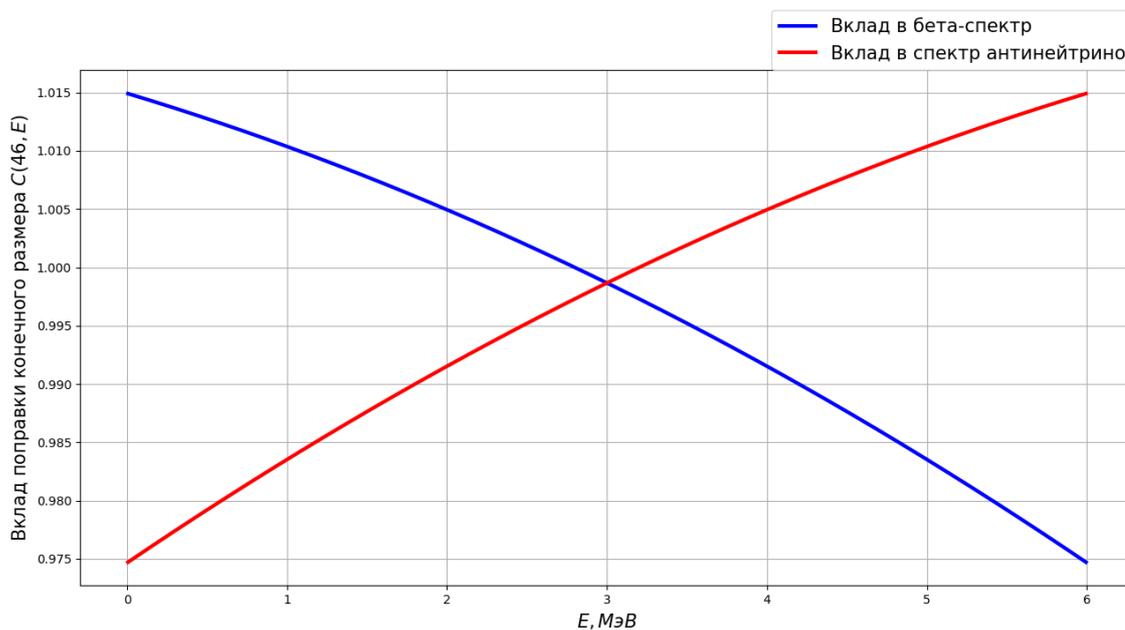


Рисунок 2.7 — Вклад поправки конечного размера  $C(Z, E, E_0)$ ,  $Z = 46$ ,  $Q = 6$  МэВ.

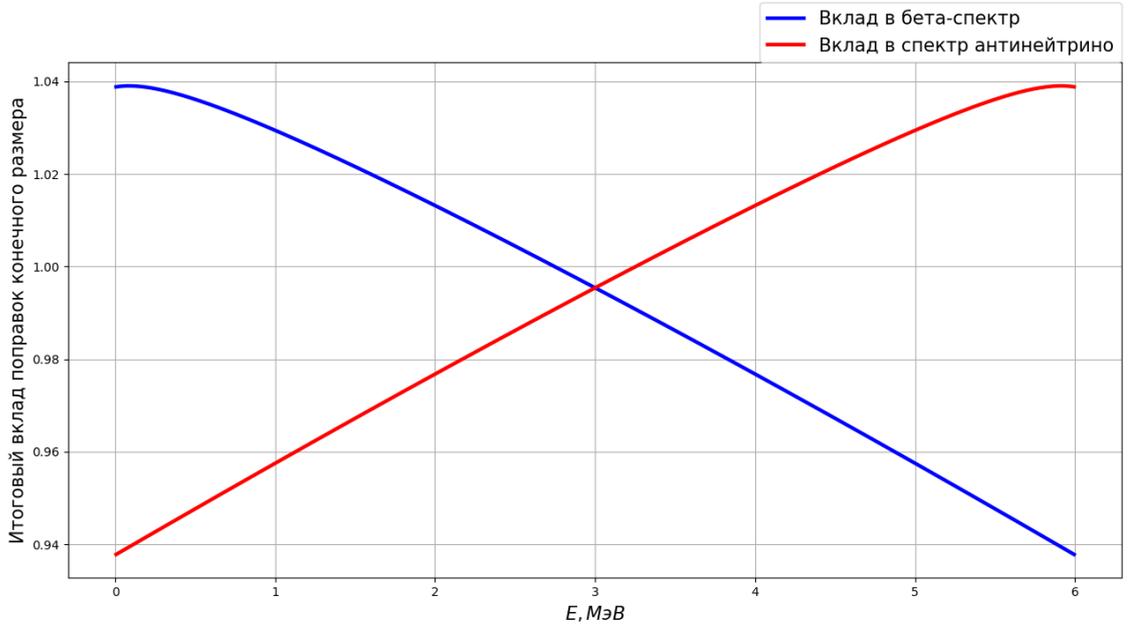


Рисунок 2.8 — Итоговый вклад поправок конечного размера,  $Z = 46$ ,  $Q = 6$  МэВ.

Из рисунков видно, что вклад  $C(Z, E, E_0)$  меняет форму на  $\approx 1.5 - 2.5\%$ . Итоговый же вклад эффекта конечного размера может достигать до  $6\%$ .

### 2.1.3. ЭКРАНИРОВАНИЕ

Поправка на экранирование  $S(Z, E)$  учитывает экранирование электрического заряда ядра электронами с оболочек атома, что эффективно уменьшает заряд, с которым взаимодействует  $\beta$ -электрон. Наиболее используемая в литературе модель  $S(Z, E)$  посчитана в работе [27]:

$$S(Z, E) = \begin{cases} \frac{\bar{E}}{E} \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{(2\gamma-1)} e^{\pi(\bar{y}-y)} \frac{|\Gamma(\gamma+i\bar{y})|^2}{|\Gamma(\gamma+iy)|^2}, & \text{если } \bar{E} > m_e \\ 1, & \text{если } \bar{E} < m_e \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\bar{E} = E - V_0, \quad \bar{p} = \sqrt{\bar{E}^2 - m_e^2}, \quad y = \frac{\alpha Z E}{p}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha Z \bar{E}}{\bar{p}},$$

$V_0$  — потенциал экранирования:

$$V_0 = \alpha^2(Z-1)^{4/3} N(Z-1), \quad (2.21)$$

$N(Z)$  — линейная интерполяция значений, представленных в таблице A2.

На рисунке 2.9 представлен вклад в форму одиночных спектров от поправки экранирования.

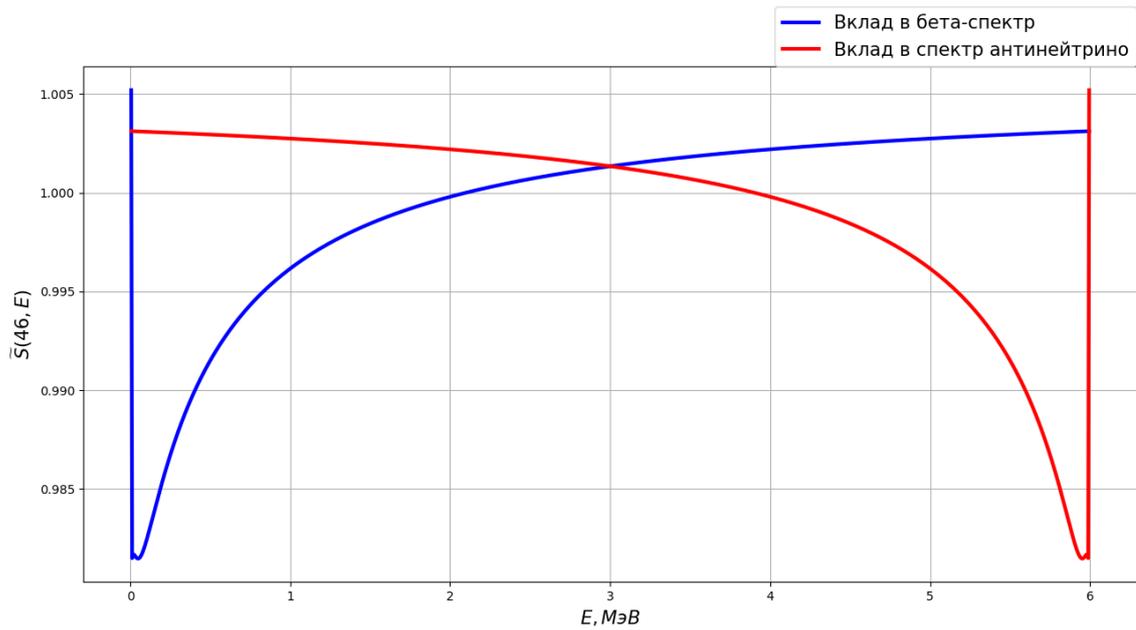


Рисунок 2.9 — Вклад поправки на экранирование в форму одиночного спектра,  $Z = 46$ ,  $Q = 6$  МэВ.

Как видно из рисунка 2.9, изменение формы спектра за счет экранирования может достигать до 2.5% при  $Q \approx 6$  МэВ (при  $Q \approx 2$  МэВ получим изменение формы на 1%, а при  $Q \approx 8$  МэВ форма спектра изменится примерно на 2%).

В литературе встречаются и другие выражения для поправки на экранирования. Основные из них представлены в обзорной работе [22]; в ней же показано, что в среднем эти выражения отличаются друг от друга на десятые доли процента. По этой причине использовать выражение (2.20) в наших целях представляется разумным.

### 2.1.4. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

Радиационные поправки учитывают испускание виртуальных и реальных фотонов при взаимодействии заряженных частиц, участвующих в реакции бета-распада.

Поправки первого порядка по  $\alpha$  были вычислены в работах [28, 30] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_\beta(E_\beta, E_0) &= 1 + \alpha / (2\pi) \cdot g_\beta(E_\beta, E_0), \\ H_\nu(\hat{E}, E_0) &= 1 + \alpha / (2\pi) \cdot h_\nu(\hat{E}, E_0), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} g_\beta &= 3 \ln \left( \frac{m_N}{m_e} \right) - \frac{3}{4} + 4 \left( \frac{\tanh^{-1} \beta}{\beta} - 1 \right) \left[ \frac{E_0 - E_\beta}{3E_\beta} - \frac{3}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left( \frac{2(E_0 - E_\beta)}{m_e} \right) \right] + \frac{4}{\beta} L \left( \frac{2\beta}{1 + \beta} \right) + \frac{1}{\beta} \tanh^{-1} \beta \cdot \\ &\quad \cdot \left[ 2(1 + \beta^2) + \frac{(E_0 - E_\beta)^2}{6E_\beta^2} - 4 \tanh^{-1} \beta \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} h_\nu &= 3 \ln \left( \frac{m_N}{m_e} \right) + \frac{23}{4} + \frac{8}{\hat{\beta}} L \left( \frac{2\hat{\beta}}{1 + \hat{\beta}} \right) + 8 \left( \frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} - 1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \ln \left( \frac{2\hat{E}\hat{\beta}}{m_e} \right) + 4 \frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} \left( \frac{7 + 3\hat{\beta}^2}{8} - 2 \tanh^{-1} \hat{\beta} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь  $m_N$  — масса нуклона,  $\beta = p_\beta/E_\beta$ ,  $\hat{E} = E_0 - E_\nu$ ,  $\hat{\beta} = \hat{p}/\hat{E}$ . Функция  $L(x)$ , фигурирующая в (2.23) — (2.24), есть функция Спенса, определяемая как

$$L(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \quad (2.25)$$

На рисунке 2.10 показан вклад радиационных поправок в бета-спектр и спектр антинейтрино.

В случае бета-спектра изменение формы составляет порядка 6%, в случае спектра антинейтрино порядка 0.5%.

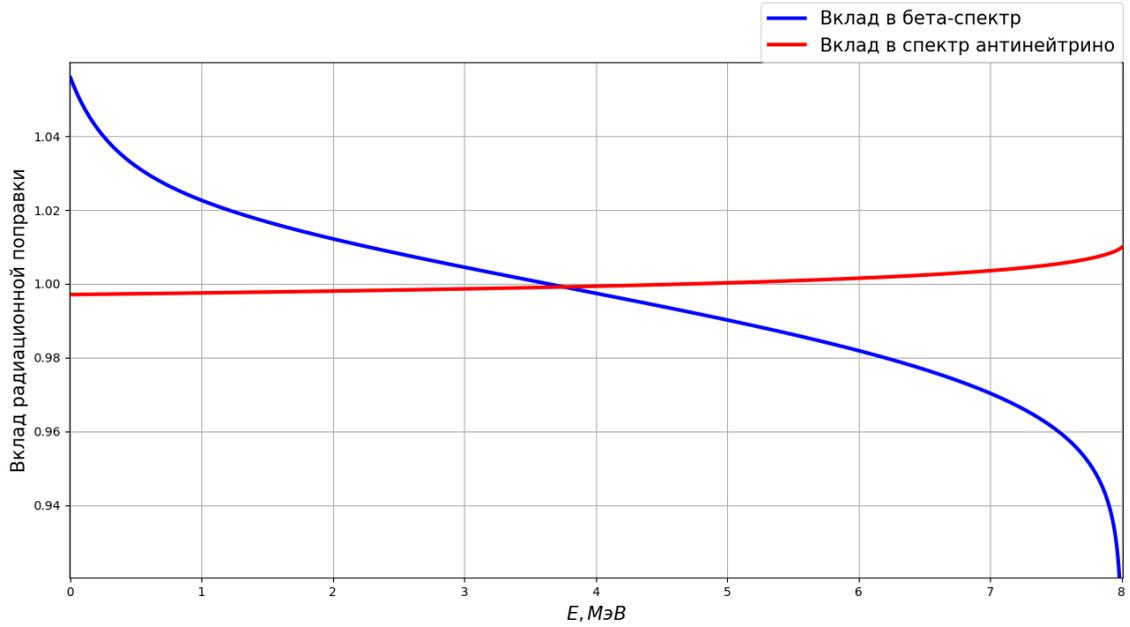


Рисунок 2.10 — Вклад радиационных поправок в форму одиночного спектра,  $Q = 8$  МэВ.

Для поправки  $h_\nu$  в первом порядке по  $\alpha$  существует и другой рецепт, представленный в работе [29], который, во-первых, достаточно сложно реализуется и содержит интегралы, которые не выражаются в элементарных функциях, а во-вторых, в среднем, отличается от приведенного выше выражения на 5% (анализ обоих выражений был проведен в работе [9]). С учетом того, что поправка  $h_\nu$  сама по себе достаточно мала, мы будем использовать более простое выражение (2.24) для наших целей.

### 2.1.5. СЛАБЫЙ МАГНЕТИЗМ

Слабый магнетизм вызван вкладом дополнительного формфактора, кроме  $g_a$  и  $g_v$  в слабое взаимодействие, что эффективно приводит в взаимодействию магнитного момента ядра и  $\beta$ -электрона. В случае разрешенных переходов гамов-теллеровского типа поправка имеет вид [31]:

$$\delta_{\text{WM}} = \frac{4}{3} E_\beta \left[ \frac{\mu_\nu + \frac{\langle J_f | \vec{\Delta} | J_i \rangle}{\langle J_f | \vec{\Sigma} | J_i \rangle}}{2m_N g_A} \right] \left( 2 - \frac{m_e^2}{E_\beta^2} - \frac{E_0}{E_\beta} \right), \quad (2.26)$$

где  $m_N$  — масса нуклона,  $g_A$  — аксиальный формфактор (при низких энергиях его можно считать постоянной величиной),  $\mu_\nu$  — магнитный момент

нуклона,  $\vec{\Sigma} = \sum_i \tau_i \vec{\sigma}_i$  — оператор спина,  $\vec{\Lambda} = \sum_i \tau_i \vec{l}_i$  — оператор углового момента. Здесь  $\vec{l}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$  — орбитальный момент  $i$ -ого нуклона,  $\vec{\sigma}_i = 2\vec{S}_i$ ,  $\vec{S}_i$  — спин  $i$ -ого нуклона.

Строго говоря, отношение матричных элементов  $\frac{\langle J_f | \vec{\Lambda} | J_i \rangle}{\langle J_f | \vec{\Sigma} | J_i \rangle}$  необходимо рассчитывать для каждого перехода индивидуально, однако часто в литературе для простоты его полагают равным  $-1/2$ . Данное приближение было подробно рассмотрено в работе [31], там же было показано, что оно вносит менее 1% неопределенности в кумулятивные спектры антинейтрино.

Таким образом, окончательно поправка слабого магнетизма имеет вид:

$$\delta_{\text{WM}} \approx \frac{4}{3} E_\beta \frac{\mu_\nu - 1/2}{g_A m_N} \left( 1 - \frac{m_e^2}{2E_\beta^2} - \frac{E_0}{2E_\beta} \right) \approx 0.5\% E_\beta \quad (2.27)$$

На рисунке 2.11 показан вклад поправки слабого магнетизма  $1 + \delta_{\text{WM}}$ . Из рисунка видно, что слабый магнетизм меняет форму одиночного спектра примерно на 2 - 2.5% при высоких значениях  $Q$  (при низких  $Q \approx 1 - 2$  МэВ вклад будет порядка 1%).

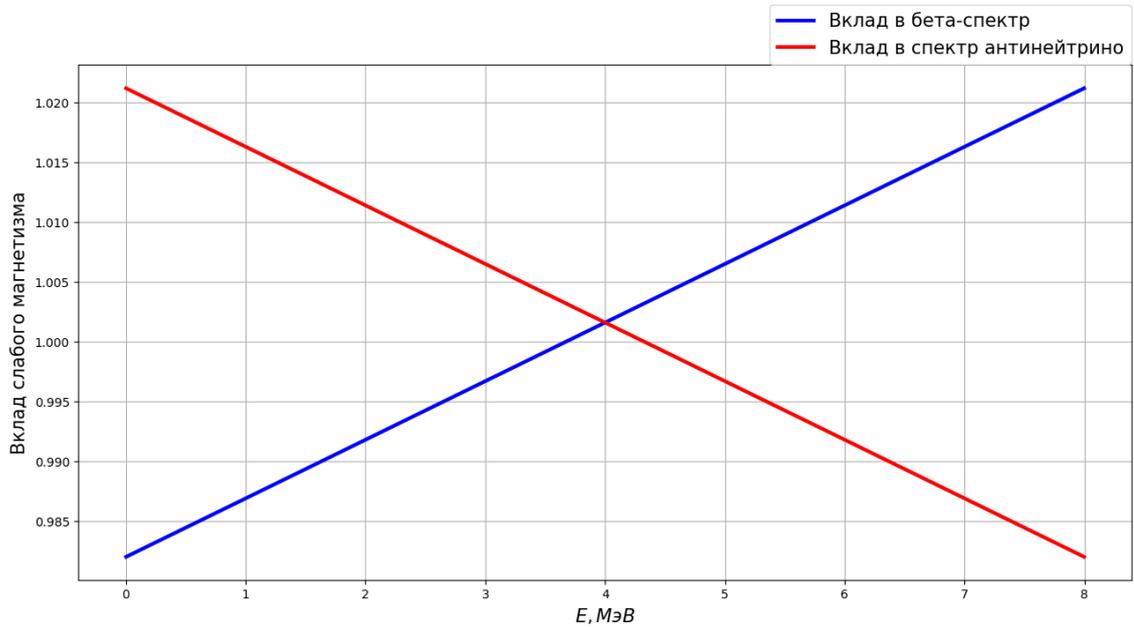


Рисунок 2.11 — Вклад поправки слабого магнетизма к форме одиночного спектра,  $Q = 8$  МэВ.

## 2.1.6. АТОМНЫЙ ОБМЕН

Неортогональность волновых функций начального и конечного состояний атома приводит к дополнительным процессам, в ходе которых  $\beta$ -электрон может занять одно из возможных состояний на атомной оболочке, вытесняя с неё тем самым первоначально связанный электрон атома. Экспериментально этот процесс невозможно отличить от обычного  $\beta$ -распада, однако можно теоретически описать вклад данного процесса в форму одиночных бета-спектров.

Подробное обсуждение этой поправки представлено в работе [22], мы же воспользуемся полученным там результатом. Поправка  $X(Z, E)$  параметризована в следующем виде [22]:

$$X(Z, E) \approx 1 + \left( a/W' + b/W'^2 + c \cdot \exp(-dW') + e \sin [(W - f)^g + h]/W^i \right) \eta(W - f), \quad (2.28)$$

где  $W = (T_\beta + m_e)/m_e$ ,  $W' = W - 1$ ,  $\eta(x)$  — функция Хэвисайда, набор параметров аппроксимации  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  зависит от  $Z$  (явные значения этих параметров для  $2 < Z < 120$  представлены в работе [22]). Множитель  $\eta(W - f)$  мы добавили искусственно, чтобы гарантировать, что отрицательное число не будет возводиться в действительную степень (речь идет про первое слагаемое в аргументе  $\sin$  в выражении 2.28).

Вклад этой поправки в форму одиночных спектров сильно зависит от  $Z$ , что иллюстрирует ниже рисунок 2.12. При определенных значениях  $Z$  вклад поправки  $X(Z, E) \ll 1\%$ , при других может достигать до 4%.

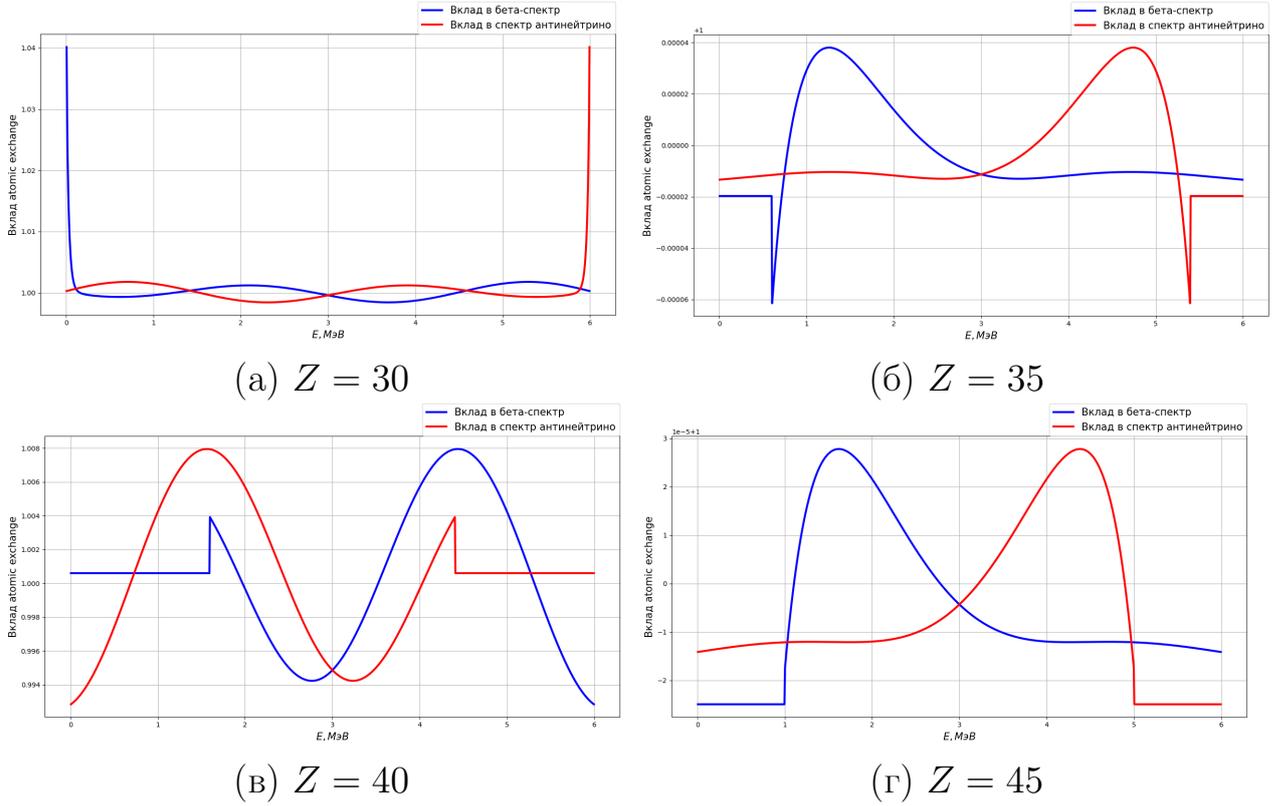


Рисунок 2.12 — Вклад поправки атомного обмена (atomic exchange) в форму одиночных спектров для различных  $Z$  при  $Q = 6$  МэВ

### 2.1.7. АТОМНОЕ НЕСООТВЕТСТВИЕ

Данная поправка, как и атомный обмен, связана с тем, что волновые функции начального и конечного состояний атома не являются ортогональными, то есть принадлежат разным гамильтонианам. Атомное несоответствие учитывает несколько эффектов, основной из которых заключается в перестройке электронных оболочек атома [22].

Поправка основана на рассмотрении замены  $E_0$  на  $E_0 - \overline{\Delta E}_{\text{ex}}$ , где  $\overline{\Delta E}_{\text{ex}}$  — разность между энергиями связи начального и конечного атомов.

Явный вид поправки описывается следующим уравнением

$$r(Z, E) = 1 - \frac{1}{m_e(E_0 - E)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial Z^2} B, \quad (2.29)$$

где  $B(Z)$  — полная энергия связи нейтрального атома с  $Z + 1$  протоном в ядре.

Вторая производная  $B(Z)$  по  $Z$ , фигурирующая в (2.29), связана с величиной  $\overline{\Delta E}_{\text{ex}}$  следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} B = -2\overline{\Delta E}_{\text{ex}}. \quad (2.30)$$

Удобно использовать следующую параметризацию, полученную на основе численных расчетов [22]:

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} B = (44.200 Z^{0.41} + 2.3196 \cdot 10^{-7} Z^{4.45}) \cdot 10^{-6} \text{ МэВ}. \quad (2.31)$$

На рисунке 2.13 представлен вклад поправки атомного несоответствия (atomic mismatch) к форме одиночных спектров.

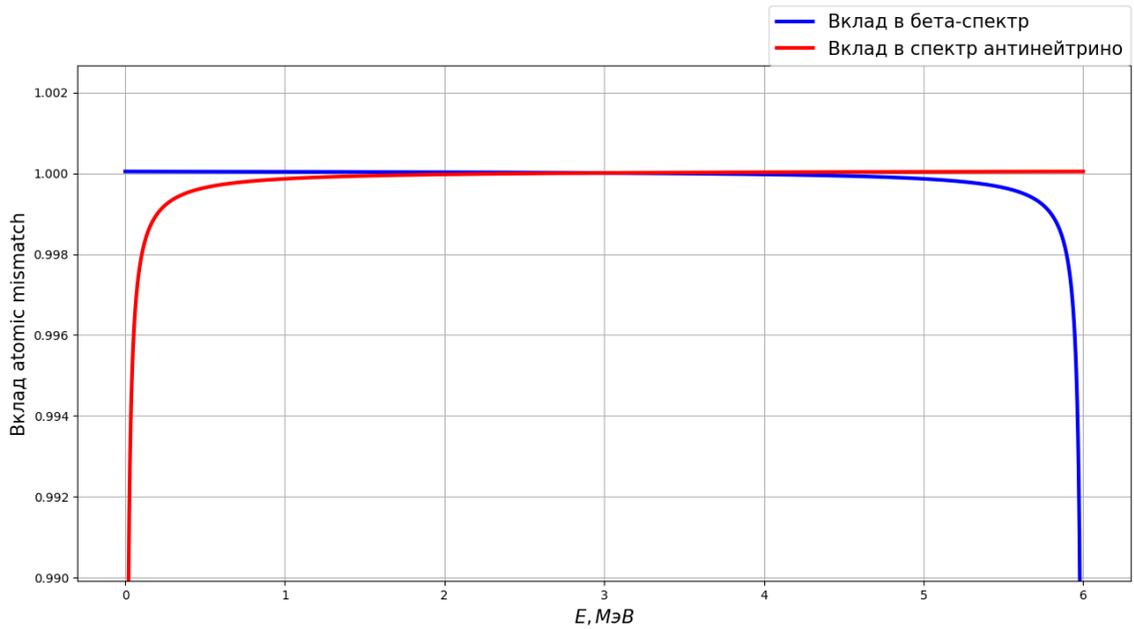


Рисунок 2.13 — Вклад поправки atomic mismatch к форме одиночных спектров,  $Z = 46$ ,  $Q = 6$  МэВ.

Из явного вида (2.29) и рисунка 2.13 видно, что поправка в основном проявляет себя на отрезке  $T \in [Q - 50 \text{ кэВ}; Q]$  (в случае бета-спектра) — в остальной части спектра ею можно пренебречь. При реализации конверсии данная поправка учитывается "автоматически", что связано с регуляризацией спектра на концах отрезка  $[0, Q]$  (в случае бета-спектра) или  $[0, E_0]$  (в случае спектра антинейтрино).

## 2.1.8. ВЫВОДЫ

Подытожив вышеизложенное, приведем в сводной таблице 2 характерные вклады от каждой поправки и проиллюстрируем их на рисунках 2.14 — 2.15.

**Таблица 2.** Характерный вклад поправок в форму одиночных спектров

№	Поправка $\Delta$	Формула	$\max 1 - \Delta , \%$
1	Функция Ферми $F(Z, E)$	2.13	$\approx 100$
2	Конечный размер $L_0(Z, E)$	2.16	$\approx 1 - 2$
3	Конечный размер $C(Z, E, E_0)$	2.19	$\approx 1.5 - 2.5$
4	Экранирование $S(Z, E)$	2.20	$\approx 2.5$
5	Радиационные поправки $G_\beta (H_\nu)$	2.22	$\approx 6 (1)$
6	Слабый магнетизм $1 + \delta_{\text{WM}}$	2.27	$\approx 2 - 2.5$
7	Atomic exchange $X(Z, E)$	2.28	Существенно зависит от $Z$

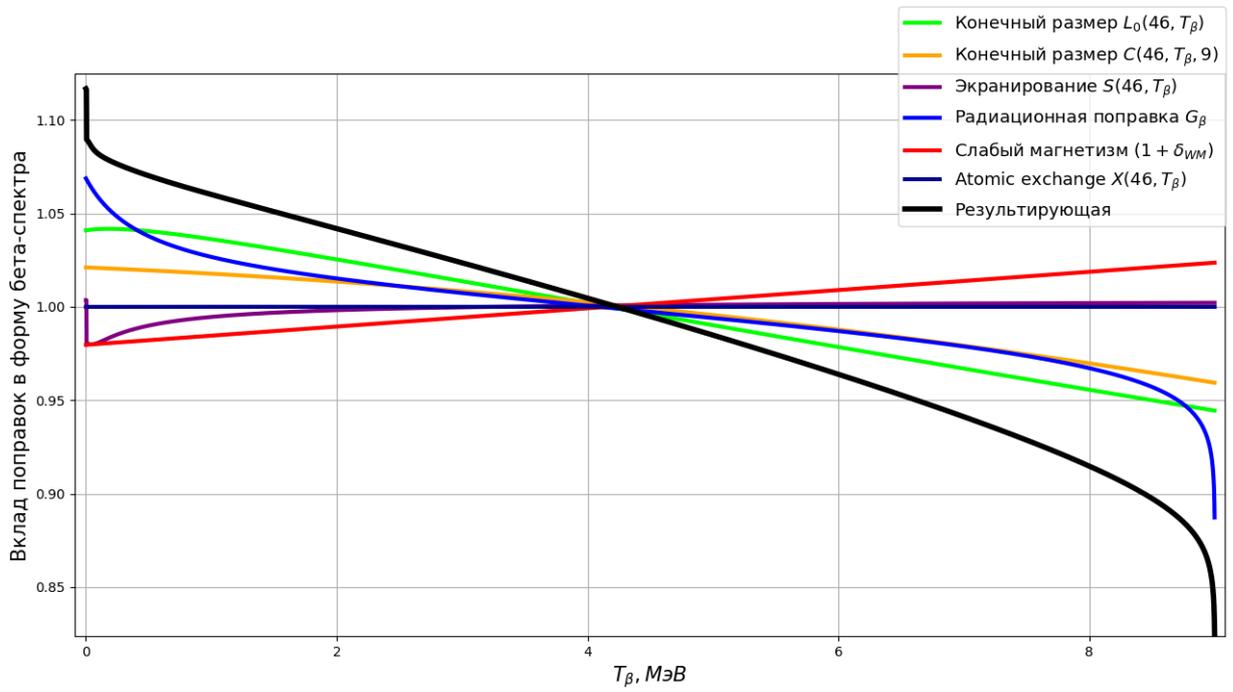


Рисунок 2.14 — Вклад поправок в форму одиночного бета-спектра,  $Z = 46$ ,  $Q = 9$  МэВ.

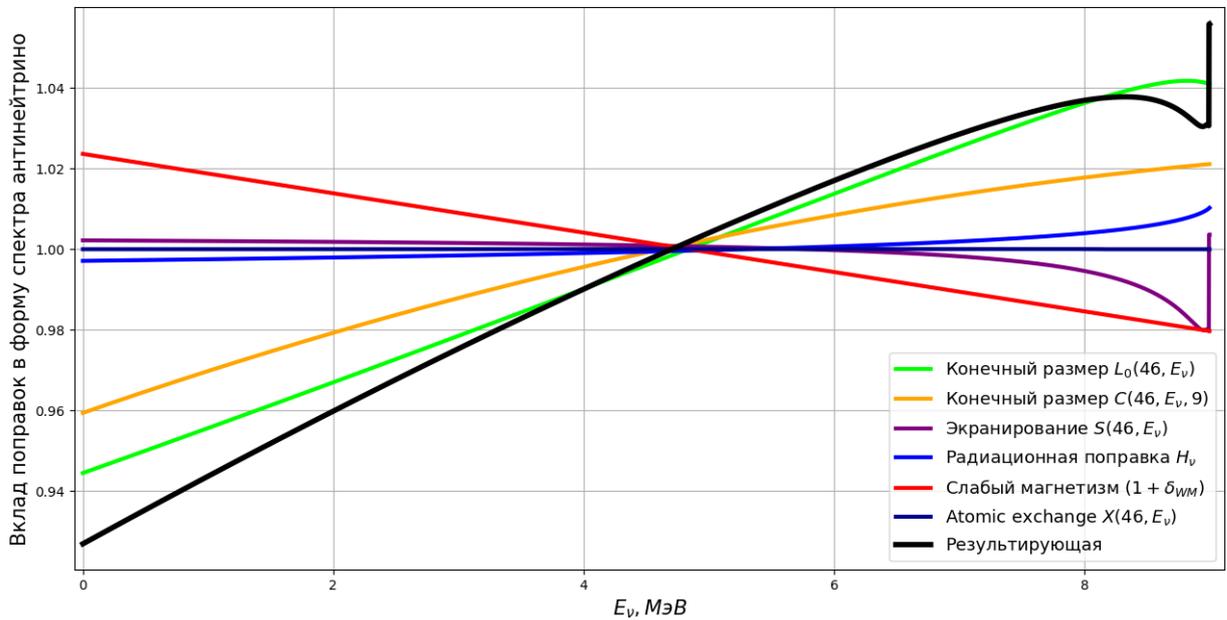


Рисунок 2.15 — Вклад поправок в форму одиночного спектра антинейтрино,  $Z = 46$ ,  $Q = 9$  МэВ.

## 2.2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПЕРЕСЧЕТА

Кумулятивные спектры  $\beta$ -электронов  $\rho_\beta(E_\beta)$  и антинейтрино  $\rho_\nu(E_\nu)$  имеют очень схожие формы при кинетических энергиях  $E > 2.5$  МэВ — основные различия вытекают из различной массы и электрического заряда. В [10] связь между двумя спектрами устанавливается в виде:

$$\rho_\beta(E_\beta - E_{\text{shift}}) \cdot k(E) = \rho_\nu(E_\nu), \quad (2.32)$$

где  $E_{\text{shift}}$  — усредненный сдвиг энергии, учитывающий кулоновское взаимодействие электрона и ядра ( $E_{\text{shift}} \in [0; 100]$  кэВ). Поправочная функция  $k(E)$  учитывает в себе все остальные различия и не имеет какой-либо физической интерпретации. Ее мы будем называть корреляционной функцией пересчета.

Бета-спектр  $^{238}\text{U}$  был получен в работе [33] с использованием  $\rho_\beta^{235}$ , однако в связи с малой статистикой экспериментальных данных и большой погрешностью измерений ( $\delta \in [3.2\%; 28\%]$ ) провести его полноценную инверсию нельзя. Вместо этого в этой же работе предлагается использовать корреляционную функцию пересчета  $k(E)$  для нахождения  $\rho_\nu^{238}$ , которая определяется из метода *ab initio* и экспериментальных данных ILL (разумнее всего получить её из спектров  $^{235}\text{U}$ ). Кулоновская сдвигка  $E_{\text{shift}}$  полагается равной 50 кэВ.

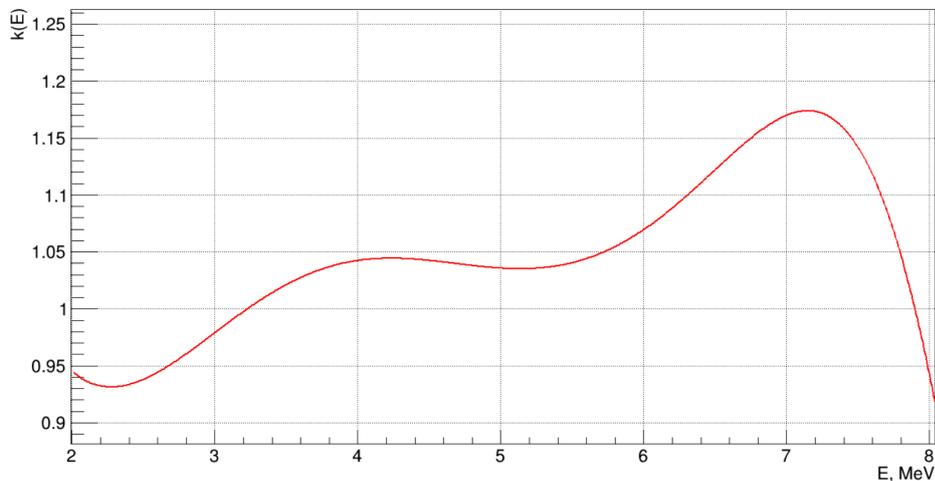


Рисунок 2.16 — Корреляционная функция пересчета,  $E_{\text{shift}} = 50$  кэВ

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ, АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Экспериментальные данные эксперимента ILL с мелким шагом (50 кэВ для  $^{235}\text{U}$  и 100 кэВ для  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$ ) представлены в работе [32] (в дальнейшем мы будем обозначать их  $\rho_{\beta, \text{ILL}}^i$ , где индекс  $i$  принимает значения 235, 239 и 241 соответственно). Помимо этого, по результатам эксперимента НИЦ КИ [15] были получены данные вида:

$$R = \frac{\rho_{\beta, \text{КИ}}^{235} / \rho_{\beta, \text{ILL}}^{235}}{\rho_{\beta, \text{КИ}}^{239} / \rho_{\beta, \text{ILL}}^{239}}, \quad (3.1)$$

график которых представлен на рисунке 3.1. Отметим, что экспериментальные данные в [32] для  $^{235}\text{U}$  приведены в интервале [1.5; 9.6] МэВ и для  $^{239}\text{Pu}$  в [1.5; 8] МэВ. Экспериментальные данные НИЦ КИ лежат в интервале [1.5; 8] МэВ.

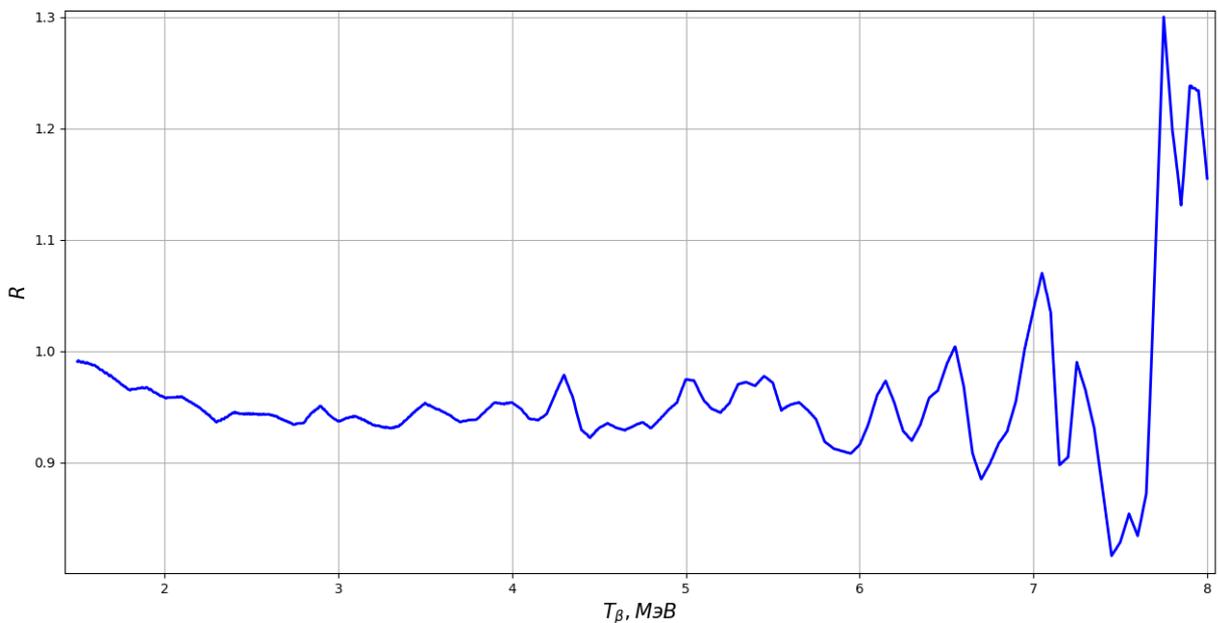


Рисунок 3.1 — Экспериментальные данные НИЦ КИ — отношение отношений кумулятивных спектров  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$  (3.1)

График 3.1 иллюстрирует, что отношение  $\rho_{\beta, \text{KI}}^{(235)}/\rho_{\beta, \text{KI}}^{239}$  лежит ниже отношения  $\rho_{\beta, \text{ILL}}^{235}/\rho_{\beta, \text{ILL}}^{239}$  на  $\approx 5\%$ .

Рассмотрим две предельные гипотезы:

- 1) Кривая спектра  $\beta$ -частиц  $^{235}\text{U}$  группы ILL ошибочно завышена на  $\approx 5\%$ ;
- 2) Кривая спектра  $\beta$ -частиц  $^{239}\text{Pu}$  группы ILL ошибочно занижена на  $\approx 5\%$ ;

Для удобства изложения введем "функцию"  $\text{Convers}(\rho_{\beta}^i, N_S \times N_p)$ , где первый аргумент  $\rho_{\beta}^i$  — кумулятивный бета-спектр, который будет инвертироваться в спектр антинейтрино,  $N_S$  — число срезов,  $N_p$  — число точек в срезе. Спектры  $\rho_{\beta, \text{KI}}$  определим в соответствии с гипотезами как

$$\begin{aligned}\rho_{\beta, \text{KI}}^{235} &= \rho_{\beta, \text{ILL}}^{235} \cdot R, \\ \rho_{\beta, \text{KI}}^{239} &= \rho_{\beta, \text{ILL}}^{239} / R.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Для спектров  $\rho_{\beta, \text{KI}}^{235}$ ,  $\rho_{\beta, \text{ILL}}^{235}$ ,  $\rho_{\beta, \text{KI}}^{239}$ ,  $\rho_{\beta, \text{ILL}}^{239}$  реализуем конверсию по изложенному в части (2.1) методу, подбирая число точек  $N_p$  в одном срезе так, чтобы ширина среза составляла порядка 250 кэВ:

$$\begin{aligned}\rho_{\nu, \text{KI}}^{235} &= \text{Convers}(\rho_{\beta, \text{KI}}^{235}, 26 \times 5), \\ \rho_{\nu, \text{KI}}^{239} &= \text{Convers}(\rho_{\beta, \text{KI}}^{239}, 22 \times 3), \\ \rho_{\nu, \text{KI convers ILL}}^{235} &= \text{Convers}(\rho_{\beta, \text{ILL}}^{235}, 26 \times 5), \\ \rho_{\nu, \text{KI convers ILL}}^{239} &= \text{Convers}(\rho_{\beta, \text{ILL}}^{239}, 22 \times 3).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Представим полученные результаты на рисунках 3.2 — 3.3 (черные линии соответствуют сравнению нашей конверсии и конверсии Huber [9]). Заметим, что различия нашей модели с моделью Huber в случае  $^{235}\text{U}$  составляют порядка  $\pm 0.5\%$  (при энергиях 8 МэВ разница увеличивается до  $\pm 2\%$ , что связано с выбором начальной точки конверсии), а в случае  $^{239}\text{Pu}$  — до  $\pm 4\%$ . В среднем же модели хорошо совпадают — средняя величина отклонения  $\approx 0.1\%$ , что можно не учитывать по сравнению с погрешностями процедуры и значением поправки  $\bar{R} \approx \pm 5\%$ .

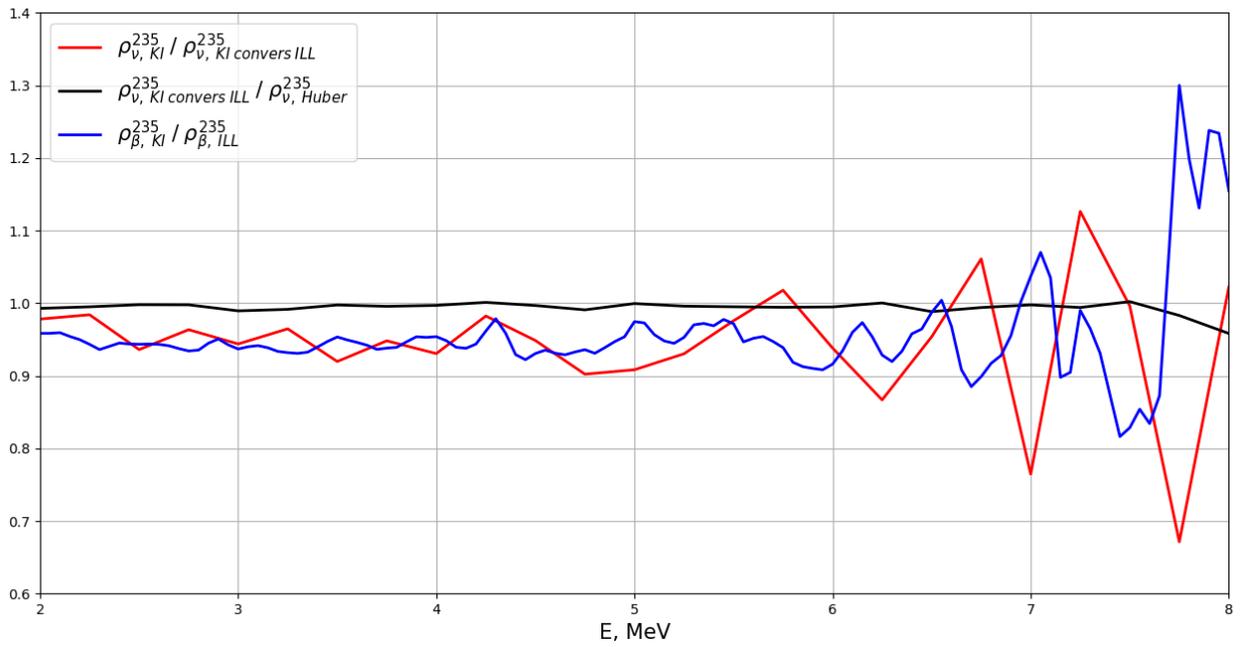


Рисунок 3.2 — Отношения спектров  $\rho_{KI}^{235}/\rho_{ILL}^{235}$ , гипотеза 1

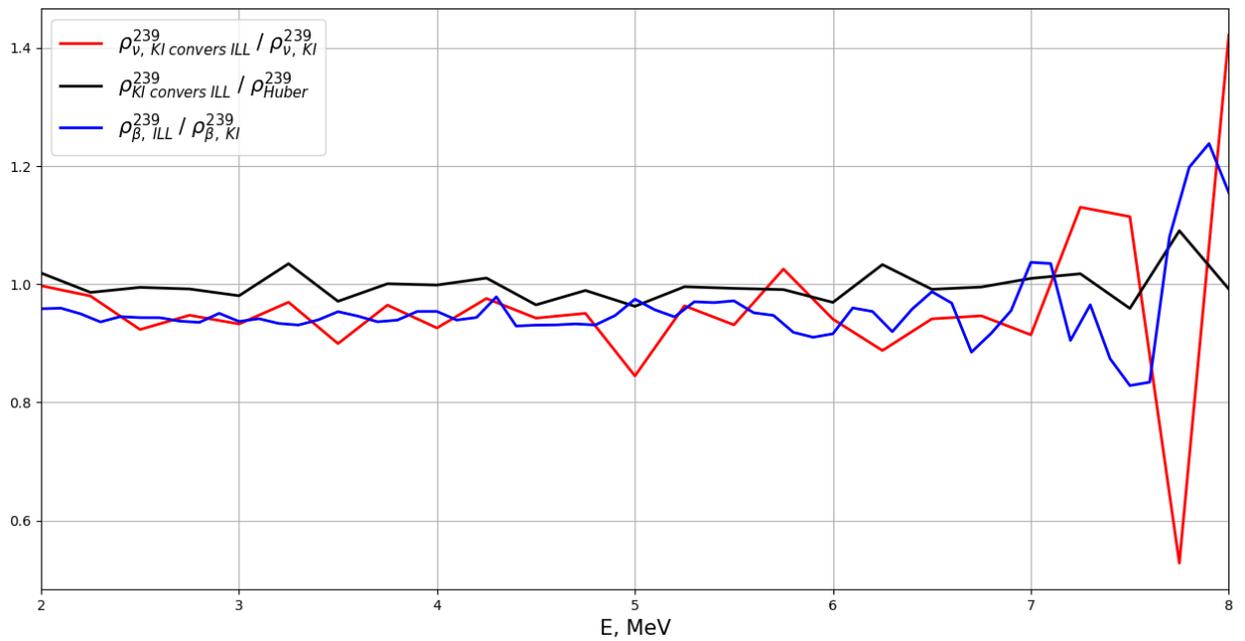


Рисунок 3.3 — Отношения спектров  $\rho_{ILL}^{239}/\rho_{KI}^{239}$ , гипотеза 2

Заметим, что процедура конверсии в среднем устойчива относительно изменения исходных спектров ILL на  $\approx 5\%$  — спектры антинейтрино отличаются на эту же величину.

Полученные спектры антинейтрино мы аппроксимируем функцией (2.7), полученные параметры приведены в таблице 3.

**Таблица 3.** Результаты аппроксимации полиномом 5-ой степени логарифма спектров антинейтрино

	235 KI	239 KI	235 KI convers ILL	239 KI convers ILL
$a_1$	$4.44 \pm 0.04$	$4.636 \pm 0.014$	$4.365 \pm 0.017$	$4.84 \pm 0.03$
$a_2$	$-4.61 \pm 0.02$	$-5.342 \pm 0.009$	$-4.578 \pm 0.011$	$-5.42 \pm 0.02$
$a_3$	$2.0886 \pm 0.007$	$2.580 \pm 0.003$	$2.099 \pm 0.004$	$2.555 \pm 0.006$
$a_4$	$(-5.29 \pm 0.02) \cdot 10^{-1}$	$(-6.609 \pm 0.009) \cdot 10^{-1}$	$(-5.294 \pm 0.010) \cdot 10^{-1}$	$(-6.58 \pm 0.02) \cdot 10^{-1}$
$a_5$	$(6.29 \pm 0.06) \cdot 10^{-2}$	$(7.65 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}$	$(6.19 \pm 0.03) \cdot 10^{-2}$	$(7.91 \pm 0.05) \cdot 10^{-2}$
$a_6$	$(-2.91 \pm 0.07) \cdot 10^{-3}$	$(-3.32 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}$	$(-2.77 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}$	$(-3.68 \pm 0.07) \cdot 10^{-3}$

Согласно [17], спектр позитронов можно представить в виде:

$$\rho_e(E_\nu) = \rho_\nu \left( E_\nu + \frac{2E_\nu E_e + (m_n - m_p)^2 - m_e^2}{2m_p} \right) \cdot \sigma(E_\nu), \quad (3.4)$$

где  $E_e = E_\nu - (m_n - m_p)$  — энергия позитрона,  $m_n, m_p$  — массы нейтрона и протона соответственно,  $\sigma(E_\nu)$  — полное сечение обратного бета-распада. Мы рассмотрим две модели сечения, описанные в главе 1. Напомним, что ”наивное” описывается уравнением [17]:

$$\sigma_{\text{Naive}} = 9.52 \cdot 10^{-44} p_e E_e \text{ cm}^2, \quad (3.5)$$

а модель [19]:

$$\sigma_{\text{Str}} = p_e E_e E_\nu^{-0.07056+0.02018 \cdot \ln(E_\nu) - 0.001953 \cdot \ln^3(E_\nu)} \cdot 10^{-43} \text{ cm}^2 \quad (3.6)$$

Наконец, взвешенное сечение есть:

$$\sigma^i = \int_{1.8}^8 \rho_e^i(E_\nu) dE_\nu. \quad (3.7)$$

Полученные значения взвешенных сечений для моделей Naive и Strumia2003 представлены в таблице 4.

**Таблица 4.** Значения взвешенных сечений

	Naive, cm <sup>2</sup> /fission	Strumia2003, cm <sup>2</sup> /fission
$\sigma_{ILL}^{235}$	$(6.61 \pm 0.11) \cdot 10^{-43}$	$(6.49 \pm 0.10) \cdot 10^{-43}$
$\sigma_{KI}^{235}$	$(6.22 \pm 0.12) \cdot 10^{-43}$	$(6.11 \pm 0.10) \cdot 10^{-43}$
$\sigma_{ILL}^{239}$	$(4.28 \pm 0.11) \cdot 10^{-43}$	$(4.21 \pm 0.10) \cdot 10^{-43}$
$\sigma_{KI}^{239}$	$(4.59 \pm 0.10) \cdot 10^{-43}$	$(4.48 \pm 0.10) \cdot 10^{-43}$

Из результатов, представленных в таблице 4, следует, что отношение сечений:

$$\left( \frac{\sigma_{KI}^{235}}{\sigma_{ILL}^{239}} \right)_{\text{Str.}} = \left( \frac{\sigma_{KI}^{235}}{\sigma_{ILL}^{239}} \right)_{\text{Naive}} = \left( \frac{\sigma_{ILL}^{235}}{\sigma_{KI}^{239}} \right)_{\text{Str.}} = \left( \frac{\sigma_{ILL}^{235}}{\sigma_{KI}^{239}} \right)_{\text{Naive}} \approx 1.45 \pm 0.05 \quad (3.8)$$

является постоянной величиной и не зависит от выбора гипотезы. Заметим также, что отношение сечений с "поправкой"  $R$  отличается от отношения сечений без "поправки" на  $\approx 5\%$ .

В таблице 5 приведены итоговое сравнение измеренных [5,6] сечений и расчетных.

**Таблица 5.** Значения взвешенных сечений, полученные из экспериментов и по расчетным конверсионным спектрам.

	$\sigma^{235}$	$\sigma^{239}$	$\sigma^{235}/\sigma^{239}$
Daya Bay [6]	$6.10 \pm 0.15$	$4.32 \pm 0.25$	$1.41 \pm 0.09$
RENO [5]	$6.15 \pm 0.19$	$4.18 \pm 0.26$	$1.47 \pm 0.10$
Среднее	$\approx 6.13$	$\approx 4.25$	$1.44 \pm 0.10$
Huber-Mueller	$6.60 \pm 0.14$	$4.33 \pm 0.11$	$1.52 \pm 0.05$
KI	$6.11 \pm 0.10$	$4.21 \pm 0.11$	$1.45 \pm 0.05$

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была предложена модель конверсии для расчета реакторных спектров антинейтрино, на основе которой было разработано программное обеспечение для реализации описанной процедуры. Программа была опробована на данных Монте-Карло моделирования синтетических кумулятивных бета-спектров, после чего была воспроизведена конверсия реальных экспериментальных данных группы ILL с поправкой НИЦ "КИ", в результате чего получены спектры антинейтрино от изотопов  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{241}\text{Pu}$ . С использованием полученного спектра  $\rho_{\nu}^{235}$  был пересчитан спектр  $\rho_{\nu}^{238}$ . Предложенное программное обеспечение было запатентовано в рамках внутренней НИР НИЦ КИ "Наука и практика нейтринных исследований на АЭС".

В работе показано, что процедура конверсии устойчива к спектральной поправке и, как следствие, к ней устойчивы и отношения взвешенных сечений. Полученные значения  $\sigma^{235}$ ,  $\sigma^{239}$  и их отношения согласуются с последними экспериментальными данными в пределах погрешностей, что косвенно подтверждает гипотезу о неправильной нормировке спектров  $\beta$ -частиц  $^{235}\text{U}$  группы ILL и решает проблему реакторной антинейтринной аномалии.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Pontecorvo B. Inverse  $\beta$ -decay // National Research Council of Canada, Chalk River — 1946 г (Report PD-205).
- [2] Ольшевский А. Г. Результаты и перспективы нейтринных реакторных экспериментов // Успехи физических наук. — 2014. — сент. — т. 184, №.5 — 6 с.
- [3] Hayes A. C., Vogel P. Reactor Neutrino Spectra // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2016. — окт. — т. 66, №1. — 30 с. — arXiv:[1605.02047](https://arxiv.org/abs/1605.02047) [hep-ph]
- [4] Evolution of the Reactor Antineutrino Flux and Spectrum at Daya Bay / F. An [и др.] // Phys. Rev. Lett — 2017. — апр. — 7 с. — arXiv:[1704.01082](https://arxiv.org/abs/1704.01082) [hep-ex]
- [5] Fuel-composition dependent reactor antineutrino yield at RENO / G. Bak [и др.] // Phys. Rev. Lett — 2018. — июнь — 6 с. — arXiv:[1806.00574](https://arxiv.org/abs/1806.00574) [hep-ex]
- [6] Extraction of the  $^{235}\text{U}$  and  $^{239}\text{Pu}$  Antineutrino Spectra at Daya Bay / F. An [и др.] // Phys. Rev. Lett — 2019. — апр. — 7 с. — arXiv:[1904.07812](https://arxiv.org/abs/1904.07812) [hep-ex]
- [7] Kopeikin V. I. Flux and spectrum of reactor antineutrinos // Phys. Atom. Nucl. — 2012. — апр. — т.75, №2 — 10 с.
- [8] Improved predictions of reactor antineutrino spectra / Mueller T. A. [и др.] // Phys. Rev. — 2011. — май. — т. 83, №5. — 17 с. — arXiv:[1101.2663](https://arxiv.org/abs/1101.2663) [hep-ex]

- [9] Huber P. Determination of antineutrino spectra from nuclear reactors // Phys. Rev. — 2011. — авг. — т. 84, №2 — 20 с. — arXiv:[1106.0687](https://arxiv.org/abs/1106.0687) [hep-ph]
- [10] Schreckenbach K., Colvin G., Gelletly W., Von Feilitzsch F. Determination of the antineutrino spectrum from  $^{235}\text{U}$  thermal neutron fission products up to 9.5 MeV // Phys. Letters — 1985. — окт. — с. 325 – 330
- [11] Hanh A., Schreckenbach K., Gelletly W., Von Feilitzsch F., Colvin G. and Kruscheb B. Antineutrino spectra from  $^{241}\text{Pu}$  and  $^{239}\text{Pu}$  thermal neutron fission products // Phys. Letters B. — 1989. — февраль — с. 365 – 368
- [12] Von Feilitzsch F., Hahn A., Schreckenbach K. Experimental beta-spectra from  $^{239}\text{Pu}$  and  $^{235}\text{U}$  thermal neutron fission products and their correlated antineutrino spectra // Phys. Letters B. — 1982. — дек. — с. 162 – 166
- [13] The Reactor Antineutrino Anomaly / G. Mention [и др.] // Phys.Rev.D — 2011. — март. — 21 с. — arXiv:[1101.2755v4](https://arxiv.org/abs/1101.2755v4) [hep-ex]
- [14] Копейкин В.И., Панин Ю.Н., Сабельников А.А. Измерение отношения кумулятивных спектров бета-частиц от продуктов деления  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$  для решения задач физики реакторных антинейтрино // Ядерная физика — 2021. — том 84 №1. — с. 3 – 11 — DOI: [10.31857/S0044002721010128](https://doi.org/10.31857/S0044002721010128)
- [15] Kopeikin V., Skorokhvatov M., Titov O. Reevaluating reactor antineutrino spectra with new measurements of the ratio between  $^{235}\text{U}$  and  $^{239}\text{Pu}$   $\beta$  spectra // arXiv preprint — 2021. — март. — arXiv:[2103.01684](https://arxiv.org/abs/2103.01684) [nucl-ex]
- [16] Reines F., Cowan C. L. Detection of the Free Neutrino // Phys. Rev. — 1953. — нояб. — с. 830 – 831 — [Physical review journals archive](https://ui.adsabs.org/abs/1953PhysRev.86.830R)
- [17] Фаянс С.А. Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции  $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$  при низких энергиях // Ядерная физика. — 1985. — т. 42, вып. 4(10) — 12 с.
- [18] Vogel P., Beacom J.F. The angular distribution of the reaction  $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$  // Phys. Rev. D. — 1999. — март. — 10 с. — arXiv:[hep-ph/9903554](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9903554)

- [19] Strumia A., Vissani F. Precise quasielastic neutrino/nucleon cross section // Phys. Letters B — 2003. — фев. — 12 с. — arXiv:[astro-ph/0302055](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302055)
- [20] Vogel P. Conversion of electron spectrum associated with fission into the antineutrino spectrum // Phys. Rev. — 2007. — авг. — 8 с. — arXiv:[0708.0556](https://arxiv.org/abs/0708.0556) [hep-ph]
- [21] Huber P., Schwetz T. Precision spectroscopy with reactor antineutrinos // Phys. Rev. D. — 2004. — сент. — DOI: [10.1103/PhysRevD.70.053011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.053011)
- [22] High precision analytical description of the allowed  $\beta$  spectrum shape / Hayen L. [и др.] // Reviews of modern physics — 2018. — март. — 63 с. — arXiv:[1709.07530](https://arxiv.org/abs/1709.07530) [nucl-th]
- [23] Fermi E. Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen. I // Zeitschrift für Physik — 1934. — март. — с. 161 – 177 — DOI:[10.1007/BF01351864](https://doi.org/10.1007/BF01351864)
- [24] Elton L. R. B. A semi-empirical formula for the nuclear radius // Nuclear physics — 1958. — март — с. 173 – 178 — DOI:[10.1016](https://doi.org/10.1016)
- [25] Behrens H., Janecke J. Numerical Tables for Beta-Decay and Electron Capture // Springer — 1969. — DOI:[10.1007/b19939](https://doi.org/10.1007/b19939)
- [26] Wilkinson D. H. Evaluation of Beta-Decay II. Finite mass and size effects // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment — 1990. — май — с. 509 – 515
- [27] Behrens H., Buhning W. Electron radial wave functions and nuclear beta-decay // Clarendon press, Oxford — 1982.
- [28] Sirlin A. General Properties of the Electromagnetic Corrections to the Beta Decay of a Physical Nucleon // Phys. Rev — 1967. — дек. — т. 167, №1767 — 9 с. — [Physical review journals archive](https://arxiv.org/archive/physics)
- [29] Batkin I.S., Sundaresan M.K. Effect of radiative corrections on the solar neutrino spectrum // Phys. Rev. D. — 1995. — ноябрь. — с. 5362 – 5365 — DOI:[10.1103/PhysRevD.52.5362](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5362)

- [30] Sirlin A. Radiative Correction to the  $\bar{\nu}_e$  ( $\nu_e$ ) Spectrum in  $\beta$ -decay // Phys.Rev.D — 2011. — май — 7 с. — arXiv:[1105.2842 \[hep-ph\]](#)
- [31] Hayes A., Wang X. Weak magnetism correction to allowed  $\beta$  decay for reactor antineutrino spectra // Phys. Rev. C — 2017. — июнь — DOI:[10.1103/PhysRevC.95.064313](#)
- [32] Haag N., von Feilitzsch F., Oberauer L., Potzel W., Schreckenbach K. Re-publication of the data from the BILL magnetic spectrometer: The cumulative  $\beta$ -spectra of the fission products of  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  and  $^{241}\text{Pu}$  // arXiv e-prints. — 2014. — май — 5 с. — arXiv:[1405.3501 \[nucl-ex\]](#)
- [33] Experimental Determination of the Antineutrino Spectrum of the Fission Products of  $^{238}\text{U}$  / Haag N. [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — дек. — 5 с. — arXiv:[1312.5601 \[nucl-ex\]](#)

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

**Таблица А1.** Коэффициенты параметризации поправки  $L_0(Z, E)$  для электронов: воспроизведение таблицы 1 работы [26].

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
$a_{-1}$	0.115	-1.8123	8.2498	-11.223	-14.854	32.086
$a_0$	-0.00062	0.007165	0.01841	-0.53736	1.2691	-1.5467
$a_1$	0.02482	-0.5975	4.84199	-15.3374	23.9774	-12.6534
$a_2$	-0.14038	3.64953	-38.8143	172.137	-346.708	288.787
$a_3$	0.008152	-1.15664	49.9663	-273.711	657.629	-603.703
$a_4$	1.2145	-23.9931	149.972	-471.299	662.191	-305.68
$a_5$	-1.5632	33.4192	-255.133	938.53	-1641.28	1095.36

**Таблица А2.** Узлы сеточной функции  $N(\tilde{Z})$  для параметризации поправки на экранирование: воспроизведение таблицы 4.7 работы [27].

$\tilde{Z}$	1	8	13	16	23	27	29	49	84	92
$N(\tilde{Z})$	1.000	1.420	1.484	1.497	1.52	1.544	1.561	1.637	1.838	1.907

# ПРИЛОЖЕНИЕ В

## КУМУЛЯТИВНЫЕ СПЕКТРЫ РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО ДЛЯ $^{235}\text{U}$ И $^{238}\text{U}$

**Таблица В1.** Кумулятивные спектры антинейтрино изотопов  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$  с учетом спектральной поправки НИЦ "КИ".

$E_\nu$ , MeV	$\rho_\nu^{235}$ , fission $^{-1}\text{MeV}^{-1}$	$\delta^{235}$ , %	$\rho_\nu^{238}$ , fission $^{-1}\text{MeV}^{-1}$	$\delta^{238}$ , %	
2.00	1.28	< 1.0	1.58	$\approx 3.5$	
2.25	1.10		1.40		
2.50	$8.55 \cdot 10^{-1}$		1.16		
2.75	$7.40 \cdot 10^{-1}$		1.05		
3.00	$6.08 \cdot 10^{-1}$		$8.95 \cdot 10^{-1}$		
3.25	$5.29 \cdot 10^{-1}$		$7.61 \cdot 10^{-1}$		3.1
3.50	$4.16 \cdot 10^{-1}$		$6.05 \cdot 10^{-1}$		2.6
3.75	$3.44 \cdot 10^{-1}$	1.1	$5.12 \cdot 10^{-1}$	2.6	
4.00	$2.73 \cdot 10^{-1}$	1.2	$4.12 \cdot 10^{-1}$	2.6	
4.25	$2.26 \cdot 10^{-1}$	1.4	$3.44 \cdot 10^{-1}$	2.8	
4.50	$1.69 \cdot 10^{-1}$	1.7	$2.62 \cdot 10^{-1}$	2.9	
4.75	$1.23 \cdot 10^{-1}$	1.8	$1.93 \cdot 10^{-1}$	3.3	
5.00	$9.98 \cdot 10^{-2}$	1.9	$1.54 \cdot 10^{-1}$	3.7	
5.25	$8.00 \cdot 10^{-2}$	2.0	$1.24 \cdot 10^{-1}$	4.1	
5.50	$6.27 \cdot 10^{-2}$	2.2	$1.00 \cdot 10^{-1}$	5.0	
5.75	$5.16 \cdot 10^{-2}$	2.4	$7.83 \cdot 10^{-2}$	5.9	
6.00	$3.63 \cdot 10^{-2}$	2.7	$5.24 \cdot 10^{-2}$	7.6	
6.25	$2.49 \cdot 10^{-2}$	3.0	$3.45 \cdot 10^{-2}$	10.6	
6.50	$2.05 \cdot 10^{-2}$	3.0	$2.94 \cdot 10^{-2}$	12.6	
6.75	$1.69 \cdot 10^{-2}$	3.3	$2.88 \cdot 10^{-2}$	11.7	
7.00	$8.70 \cdot 10^{-3}$	3.6	$1.60 \cdot 10^{-2}$	14.1	
7.25	$6.03 \cdot 10^{-3}$	4.1	$9.58 \cdot 10^{-3}$	21.9	
7.50	$4.63 \cdot 10^{-3}$	4.4	$7.12 \cdot 10^{-3}$	30	
7.75	$2.96 \cdot 10^{-3}$	5.0	$4.93 \cdot 10^{-3}$	$\approx 30$	
8.00	$1.59 \cdot 10^{-3}$	7.0	$3.09 \cdot 10^{-3}$	$\approx 30$	