

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

На правах рукописи

СТАСЕНКО ВИКТОР ДМИТРИЕВИЧ

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СКОПЛЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ
ЧЕРНЫХ ДЫР**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,
к.ф.-м.н.

_____ А. А. Кириллов

Москва 2021

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СКОПЛЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ
ЧЕРНЫХ ДЫР**

Студент	_____ В. Д. Стасенко
Научный руководитель, к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов
Рецензент, д.ф.-м.н.	_____ Ю. Н. Ерошенко
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов
Рук. учеб. прог., д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Уравнение динамики кластера первичных черных дыр	7
1.1 Приближение Фоккера-Планка	7
1.2 Интегрирование вдоль орбит	9
1.3 Конус потерь	11
1.4 Метод решения уравнения Фоккера-Планка	15
2 Слияния черных дыр	18
2.1 Оценка темпа слияний черных дыр	18
2.2 Вычисление скорости слияния черных дыр в кластере	20
3 Результаты	22
3.1 Эволюция массового распределения ПЧД	23
3.2 Темп слияний ПЧД	25
4 Заключение	28
Список литературы	29

ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза о том, что первичные черные дыры (ПЧД) могут формироваться в ранней Вселенной была предложена в [1]. Существует множество механизмов формирования ПЧД [2–8], однако на плотность ПЧД во Вселенной наложены существенные ограничения [9; 10]. Современные наблюдательные данные практически исключают возможность того, что с помощью ПЧД может быть объяснена вся скрытая масса. Тем не менее ПЧД могут пролить свет на множество проблем современной астрофизики и космологии, среди которых можно выделить следующие:

- 1) Существование сверхмассивных черных дыр с массами $10^6 \div 10^{10} M_{\odot}$ в центрах галактических ядер [11–15] и на больших красных смещениях $z > 6$ [16–20].
- 2) Сливающиеся двойные черные дыры, которые регистрируются гравитационно-волновыми интерферометрами LIGO/Virgo [21–25], сложно объяснить звездным происхождением, поэтому очень активно идет сейчас обсуждение того, что эти события могут быть от ПЧД [26–31].
- 3) Реионизация Вселенной [32–34] может быть связана с излучением от маломассивных ПЧД с нейтральным газом [35–37] или в результате аккреции вещества на массивные ПЧД [38–41].
- 4) Формирование структур при больших красных смещениях $z > 10$ [42–45] может быть индуцировано ПЧД [46–48].
- 5) Скрытая масса Вселенной может быть частично объяснена ПЧД [9; 10].

В этой работе рассматриваются скопления ПЧД (СПЧД), которые формируются в ранней Вселенной, с характеристиками, близкими к шаровым звездным скоплениям (ШЗС). Такие кластеры (кластеры и СПЧД будут употребляться в одном контексте) могут возникать из-за коллапса доменных стенок, которые формируются в результате квантовых флуктуаций скалярного поля на инфляционной стадии [49–51] (также см. обзоры [52; 53]). Следует отметить, что СПЧД могут формироваться также в моделях многопоточковой инфляции [54] и на этапе раннего формирования структур, индуцированного Пуассонов-

скими флуктуациями количества ПЧД [47; 55; 56]. Для того, чтобы применять кластеры ПЧД для решения обозначенных выше проблем, необходимо знать структуру кластера на конкретный момент истории Вселенной. Поэтому понимание эволюции скопления ПЧД начинает играть решающую роль и является основной целью данной работы.

До сих пор полноценный анализ динамики кластера ПЧД не был осуществлен. В работах [57–59] используется N-Body моделирование для изучения динамики СПЧД. Однако данный метод имеет существенный недостаток — вычислительная сложность прямого N-Body моделирования $\mathcal{O}(N^2)$, что значительно ограничивает возможности применения данного подхода к кластерам с достаточно большим количеством ПЧД $N > 10^4 - 10^5$. Следует отметить, что N-Body моделирование и не является наилучшим инструментом для изучения ШЗС, т.к. для расчета реалистичных систем требуется значительное вычислительное время. Чаще для этих целей используется Монте-Карло моделирование, основанное на уравнении Фоккера-Планка [60–65].

Другой популярный подход, который применяется к изучению ШЗС и галактических ядер, — прямое интегрирование кинетического уравнения Фоккера-Планка [66; 67]. Данный подход основан на том, что динамическая эволюция большинства гравитирующих систем происходит за счет парной релаксации, т.е. слабых, некоррелированных взаимодействий между частицами внутри скопления. Сейчас это уже хорошо проработанная методика, которая, помимо парной релаксации, включает в себя множество дополнительных эффектов, например:

- 1) Наличие массивной центральной ЧД в центре скопления [68] и возможность её роста за счет поглощения звёзд [69–73].
- 2) Возможность формирования двойных звездных систем в результате близких двухчастичных [74–76] и трехчастичных взаимодействий [77–79] звёзд и их влияния на эволюцию скопления.
- 3) Слияния нейтронных звезд и ЧД в плотных звездных скоплениях за счет эмиссии гравитационных волн [80] и непосредственные слияния звезд [81].
- 4) Вылет звезд из скопления, вызванный приливным галактическим полем [82–85].

В данной диссертации, которая является продолжением и обобщает работы [86–88], изучается динамика СПЧД в рамках усредненного вдоль орбит уравнения Фоккера-Планка. Рассматривается кластер с массой $M_{cl} = 10^5 M_{\odot}$,

который имеет широкий диапазон изменения масс ПЧД $10^{-2} - 10 M_{\odot}$ и содержит массивную черную дыру в центре (ЦЧД) $M_{\bullet} = 100 M_{\odot}$. На кластер такой массы распространяется ограничение на ПЧД по Лайман- α лесу [89] и крупномасштабной структуре [90], из которых следует, что доля СПЧД в скрытой массе $f_{cl} \lesssim 0.05$. Поэтому мы учитываем влияние скрытой массы, которая формирует гало вокруг кластера в результате «вторичной аккреции» на него [46; 48; 91–94], и показываем, что этот факт играет важную роль в эволюции массового распределения ПЧД. Оценена временная эволюция темпа слияний ПЧД, являющихся источниками гравитационных волн. В данной работе идет разделение на слияния двойных ПЧД, которые формируются в результате излучения гравитационных волн при тесных сближениях ПЧД [80; 95], и на слияния с ЦЧД, которая захватывает ПЧД с маленькими моментами импульса. Полученные результаты могут быть использованы для проверки модели кластеров ПЧД с помощью данных будущего поколения гравитационно-волновых интерферометров [96–99], которые смогут наблюдать слияния массивных ЧД, а также на больших красных смещениях $z \gtrsim 10$. Также, с помощью существующих данных о слияниях ЧД поставлено ограничение на долю СПЧД в скрытой массе.

1. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ КЛАСТЕРА ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

1.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения (ФР), — это кинетического уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (1.1)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ — это интеграл столкновений. Если учитывать только взаимодействия, при которых скорости ЧД изменяются незначительно, то интеграл столкновений принимает форму Фоккера-Планка:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (f \langle \Delta v_i \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (f \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle), \quad (1.2)$$

где $\langle \Delta v_i \rangle$, $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$ — это диффузионные коэффициенты, выражения для которых зависят от характера взаимодействия между частицами. Как было показано в работе [100], если между частицами действуют обратноквадратные силы (что, в частности, имеет место в случае гравитации), то выражения для коэффициентов примут вид:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle &= -\Gamma \sum_b m_b (m + m_b) \frac{\partial}{\partial v_i} \int \frac{f_b(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \\ \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle &= \Gamma \sum_b m_b^2 \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \int f_b(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}', \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\Gamma = 4\pi G^2 \ln \Lambda$ ($\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм, $\ln \Lambda \sim 10$) и подразумевается суммирование по всем типам сближающихся частиц (в данном случае сумма по всем массам). Следует отметить, что при записи коэффициентов (1.3) была опущена зависимость в ФР от \mathbf{r} , эта зависимость будет восстановлена в следующем разделе.

Инвариантная форма уравнения (1.2) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = - (f T^i)_{;i} + \frac{1}{2} (f S^{ij})_{;ij}, \quad (1.4)$$

где точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование, а коэффициенты даются следующими выражениями [100; 101]:

$$T^i = \Gamma \sum_b m_b (m + m_b) a^{ij} \frac{\partial}{\partial v^j} \int \frac{f_b(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \quad (1.5)$$

$$S^{ij} = \Gamma \sum_b m_b^2 \left[a^{ik} a^{jl} \left(\frac{\partial^2}{\partial v^k \partial v^l} - \Gamma_{kl}^m \frac{\partial}{\partial v^m} \right) \int f_b(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}' \right], \quad (1.6)$$

где a_{ij} — метрический тензор: $ds^2 = a_{ij} dv^i dv^j$. После некоторых преобразований можно упростить уравнение (1.4):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = -\frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} f \langle \Delta v^i \rangle)_{;i} + \frac{1}{2\sqrt{a}} (\sqrt{a} f \langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle)_{;ij}, \quad (1.7)$$

где вместо ковариантного дифференцирования используется уже обычное, a — определитель метрического тензора a_{ij} , а диффузионные коэффициенты имеют вид:

$$\langle \Delta v^i \rangle = T^i - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i S^{jk}, \quad \langle \Delta v^i \Delta v^j \rangle = S^{ij}. \quad (1.8)$$

Легко показать, что они обладают следующими трансформационными свойствами при переходе к другой системе координат:

$$\begin{aligned} \langle \Delta V^\lambda \rangle &= \frac{\partial V^\lambda}{\partial v^i} T^i(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V^\lambda}{\partial v^i \partial v^j} - \frac{\partial V^\lambda}{\partial v^k} \Gamma_{ij}^k(\mathbf{v}) \right) S^{ij}(\mathbf{v}), \\ \langle \Delta V^\mu \Delta V^\nu \rangle &= \frac{\partial V^\mu}{\partial v^i} \frac{\partial V^\nu}{\partial v^j} S^{ij}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, если новые переменные V — некоторая функция переменных v , то, используя (1.9), можно получить обобщенные диффузионные ко-

эффиценты $\langle \Delta V^\lambda \rangle$ и $\langle \Delta V^\mu \Delta V^\nu \rangle$ в зависимости от координат v с помощью формул (1.5), (1.6). Подробно все вычисления представлены в книге [101].

1.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВДОЛЬ ОРБИТ

Как было отмечено ранее, полученная форма (1.7) для столкновительно-го члена уравнения Больцмана, имеет т.н. локальную форму, т.е. зависит от координаты физического пространства. Данный факт затрудняет использование полученного результата, однако в большинстве физических приложений уравнения ФП выход строится следующим образом. В системах типа шаровых звездных скоплений (к которым относится кластер ПЧД) время релаксации велико в сравнении с орбитальным периодом. Это означает то, что характерные изменения в ФР происходят на масштабах времен больших, чем орбитальный период. Другими словами, на малых временных масштабах ФР удовлетворяет бесстолкновительному уравнению Больцмана. Согласно теореме Джинса [101; 102] решением такого уравнения будет функция, которая зависит только от интегралов движения. В сферически симметричном случае такими интегралами движения являются энергия E и момент импульса L .

Таким образом, если ФР медленно эволюционирует, то можно проинтегрировать уравнение (1.1) вдоль невозмущенного движения (вдоль орбиты), тем самым исключив из уравнения зависимость от координат физического пространства \mathbf{r} . В этом случае ФР $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(E, L)$ может быть вынесена из под знака интеграла, т.к. интегрирование идет вдоль невозмущенной траектории на которой ФР постоянна.

Для того, чтобы перейти к переменным E и L , удобно сначала записать тензоры T^i (1.5) и S^{ij} (1.6) в сферических координатах, т.е.:

$$v^1 = v, \quad v^2 = \mu = \cos \theta, \quad v^3 = \phi, \quad (1.10)$$

а затем перейти к новым переменным с помощью формул

$$E = \frac{v^2}{2} + \varphi(r), \quad L = rv\sqrt{1 - \mu^2}, \quad \phi = \phi, \quad (1.11)$$

где $\varphi(r)$ — гравитационный потенциал. Далее необходимо записать выражения

для $\langle \Delta E \rangle$, $\langle \Delta L \rangle$, $\langle \Delta E \Delta L \rangle$ и т.д. с помощью (1.9) и проинтегрировать вдоль орбит. Однако удобнее в качестве переменной момента импульса выбрать следующую

$$R = \frac{L^2}{L_c^2(E)}, \quad (1.12)$$

где $L_c(E)$ — максимальный угловой момент орбиты с энергией E , т.е. угловой момент круговой орбиты:

$$L_c^2(E) = r_c^3 \left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r_c}, \quad (1.13)$$

где r_c — радиус круговой орбиты с энергией E , который определяется как корень уравнения:

$$E + \frac{r\phi'(r)}{2} - \phi(r) = 0. \quad (1.14)$$

Удобство выбора R состоит в том, что при любом значении энергии E переменная R меняется от 0 до 1.

После всех математических преобразований можно получить уравнение Фоккера-Планка в переменных E и R , проинтегрированное вдоль орбит:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial E} (N \langle \Delta E \rangle_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} (N \langle (\Delta E)^2 \rangle_t) - \frac{\partial}{\partial R} (N \langle \Delta R \rangle_t) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (N \langle (\Delta R)^2 \rangle_t) + \frac{\partial^2}{\partial E \partial R} (N \langle \Delta E \Delta R \rangle_t), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где N — это концентрация ПЧД в пространстве (E, R) , которая связана с ФР следующим образом:

$$N(E, R) dE dR = 4\pi^2 P(E, R) L_c^2(E) f(E, R) dE dR, \quad (1.16)$$

$P(E, R)$ — орбитальный период, а индекс t означает интегрирование вдоль орбиты, например

$$\langle \Delta R \rangle_t = \frac{2}{P} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r} \langle \Delta R \rangle, \quad (1.17)$$

где v_r — радиальная скорость, а r_- , r_+ — точки поворота (корни уравнения $v_r = 0$).

Выражения для коэффициентов, входящих в уравнение (1.15), довольно громоздки и приведены в [71; 101]. Кроме того, результаты численного интегрирования показывают, что зависимость ФР от R отсутствует [66] (все моменты

импульса равновероятны) или же слабая в присутствии ЦЧД [71] (оно и понятно, ведь ЦЧД будет поглощать частицы с маленьким моментом импульса). Поэтому для упрощения вычислений проинтегрируем уравнение (1.15) по R от 0 до 1 и запишем полученное уравнение в форме уравнения неразрывности:

$$4\pi^2 p(E) \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E} \left(D_{EE} \frac{\partial f}{\partial E} + m D_E f \right), \quad (1.18)$$

где коэффициенты даются следующими формулами:

$$D_E = -16\pi^3 \Gamma \int_{\varphi(0)}^E dE' \nu(E') p(E'), \quad (1.19)$$

$$D_{EE} = -16\pi^3 \Gamma \left(q(E) \int_E^0 \mu(E') dE' + \int_{\varphi(r)}^E q(E') \mu(E') dE' \right), \quad (1.20)$$

$$p(E) = 4 \int_0^{\varphi^{-1}(E)} dr r^2 \sqrt{2(E - \varphi(r))}, \quad (1.21)$$

$$q(E) = \frac{4}{3} \int_0^{\varphi^{-1}(E)} dr r^2 \left[2(E - \varphi(r)) \right]^{3/2}, \quad (1.22)$$

где $\varphi^{-1}(E)$ — корень уравнения $\varphi(r) = E$, а $\nu(E)$ и $\mu(E)$ — это первый и второй моменты масс:

$$\nu(E) = \int f(E, m) m dm, \quad (1.23)$$

$$\mu(E) = \int f(E, m) m^2 dm. \quad (1.24)$$

В случае дискретного распределения масс интегралы (1.23) и (1.24) переходят в суммы вида $\sum m_i f_i(E)$ и $\sum m_i^2 f_i(E)$, соответственно, а уравнение (1.18) в систему уравнений. Каждое уравнение будет описывать эволюцию ФР конкретного массового сорта частиц за счет взаимодействия с этим же сортом и всеми остальными, что учитывается в коэффициентах (1.19) и (1.20).

1.3. КОНУС ПОТЕРЬ

В данной работе рассматриваются кластеры ПЧД, которые содержат массивную центральную черную дыру (ЦЧД). ЦЧД будет поглощать частицы, которые имеют достаточно маленькие моменты импульса, формируя в простран-

стве (E, R) так называемый «конус потерь». Залетая в эту область, ПЧД может поглощаться ЦЧД за один орбитальный период — режим пустого конуса потерь. Однако поглощение может и не произойти, если в результате взаимодействия с другими ПЧД, ПЧД приобретет момент импульса отличный от критического и вылетит из конуса потерь за один орбитальный период — это режим «точечного стока» (pinhole) или полный конус потерь [69]. В последнем случае поглощение будет происходить только в момент прохождения некоторой критической точки r_{crit} в окрестности ЦЧД, на которой происходит захват.

Временные масштабы вблизи конуса потерь, на которых R меняется существенным образом, много меньше, чем для E . Это связано с тем, что на временах, где существенно меняется E , характерные изменения в моменте импульса будут $\sim L_c(E)$, а мы интересуемся случаем $\delta L \ll L_c(E)$. Кроме того, градиенты в коэффициентах уравнения (1.15) по R при малых R много больше, чем по E . Таким образом, можно пренебречь частью, связанной с диффузией по координате E , и считать ее параметром в уравнении (1.15):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial R}(N\langle\Delta R\rangle_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(N\langle(\Delta R)^2\rangle_t). \quad (1.25)$$

При $R \ll 1$ выражения для коэффициентов в локальной форме в уравнении (1.25) примут вид:

$$\langle\Delta R\rangle = \frac{r^2}{L_c^2(E)}\langle\Delta v_\perp^2\rangle + \mathcal{O}(R), \quad (1.26)$$

$$\langle(\Delta R)^2\rangle = \frac{2r^2}{L_c^2(E)}R\langle\Delta v_\perp^2\rangle + \mathcal{O}(R^2), \quad (1.27)$$

где

$$\langle\Delta v_\perp^2\rangle = 4\pi m^2 \Gamma\left(\frac{4}{3}I_0 + 2J_{1/2} - \frac{2}{3}J_{3/2}\right), \quad (1.28)$$

$$I_0(E) = \int_E^0 f(E') dE', \quad (1.29)$$

$$J_n(E, r) = \int_{\varphi(r)}^E dE' f(E') \left(\frac{E' - \varphi(r)}{E - \varphi(r)}\right)^n, \quad (1.30)$$

в появившихся интегралах f является функцией только энергии. Подобное упрощение обусловлено тем, что диффузионные коэффициенты значительно

проще вычислять от изотропной ФР. Для получения изотропной версии ФР формально необходимо проинтегрировать её по R . Конкретный способ интегрирования не так важен (см. [66; 101]), т.к. в дальнейшем мы будем работать только с ФР, независимой от R . Из (1.26) видно, что в рассматриваемом приближении справедливо следующее:

$$\langle \Delta R \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} \langle (\Delta R)^2 \rangle. \quad (1.31)$$

если ввести коэффициент:

$$\mathcal{D}(E) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta R)^2 \rangle_t}{2R}, \quad (1.32)$$

то уравнение (1.25) примет следующий простой вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mathcal{D}(E) \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial N}{\partial R} \right), \quad (1.33)$$

$$\mathcal{D}(E) = \frac{2}{L_c^2(E) P(E)} \int_0^{\varphi^{-1}(E)} \frac{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle r^2 dr}{v_r}, \quad (1.34)$$

где $P(E) = P(E, R)_{R \rightarrow 0}$ — период радиальной орбиты.

Поясним смысл выражения (1.32). Пусть $\langle (\Delta v)^2 \rangle$ является диффузионным коэффициентом, т.е. показывает среднее изменение квадрата скорости частицы в единицу времени. Определим время релаксации: $t_r \langle (\Delta v)^2 \rangle \sim v^2$, где v — начальная скорость частицы. Видно, что t_r — время, требуемое для того, чтобы многократные взаимодействия с малыми изменениями скоростей, привели к суммарному эффекту, сравнимому с v . Ясно, что \mathcal{D}^{-1} имеет смысл времени релаксации для данного значения энергии E .

Найдем стационарное решение уравнения (1.33) с дополнительными условиями:

$$N(R_{lc}) = 0, \quad \bar{N}(E) = \int_{R_{lc}}^1 N(E, R) dR, \quad (1.35)$$

слева — условие поглощающей границы при R_{lc} (захват частиц ЦЧД), справа — требование того, что при интегрировании по R мы должны получить изотропную версию ФР:

$$f(E) \approx \frac{\bar{N}(E)}{4\pi^2 L_c^2(E) P(E)}. \quad (1.36)$$

В результате получим:

$$N(R, E) = \frac{\ln(R/R_{lc})}{\ln(1/R_{lc}) + R_{lc} - 1} \bar{N}(E). \quad (1.37)$$

Пусть $F(E) dE$ — поток ПЧД с энергией E в интервале dE в конус потерь (на ЦЧД). В силу того, что этот поток — это скорость изменения полного количества ПЧД в кластере, его можно записать в виде

$$F(E) dE = -\frac{d}{dt} \left(\int_{R_{lc}}^1 N(E, R) dR \right) dE. \quad (1.38)$$

Если записать уравнение (1.25) в форме уравнения неразрывности, то станет ясно, что этот интеграл есть просто разность значений потока в пространстве R в точке $R = 1$ и R_{lc} . Очевидно, что на верхнем пределе будет ноль, т.к. иное физически невозможно. На нижнем же пределе можно воспользоваться выражением для потока из уравнения (1.33), тогда получим

$$F(E) = \mathcal{D}(E) R_{lc} \left(\frac{\partial N}{\partial R} \right)_{R_{lc}} \approx \frac{g(E)}{\ln(1/R_{lc})} \frac{\bar{N} R_{lc}}{P}. \quad (1.39)$$

где

$$g(E) = \frac{P(E) \mathcal{D}(E)}{R_{lc}(E)}. \quad (1.40)$$

Последнее выражение можно переписать в виде $g L_{lc}^2 \approx P/t_r L_c^2$. С другой стороны характерные изменения момента импульса за один орбитальный период есть $\delta L^2 \sim P/t_r L_c^2$. Видно, что $g \sim \delta L^2/L_{lc}^2$ показывает, какую долю составляет изменение момента импульса δL от L_{lc} . Ясно, что (1.39) справедливо при $g \ll 1$, т.к. в противном случае изменения в моменте импульса стали бы сравнимы или выше, чем L_{lc} за один орбитальный период и условие поглощающей границы при R_{lc} было бы нарушено (был бы поток как внутрь конуса потерь, так и наружу).

Если $g \gg 1$, то процессы рассеяния ПЧД друг на друге приводят к тому, что они много раз за один орбитальный период могут залетать и вылетать из конуса потерь. В этом случае усредненным по орбитам уравнением ФП (1.25) пользоваться уже нельзя. В работе [71] было полученное стационарное выра-

жение для $N(E, R)$ вблизи конуса потерь, в этом случае:

$$N(E, R) = \frac{\ln(R/R_0)}{\ln(1/R_0) + R_0 - 1} \bar{N}(E), \quad (1.41)$$

где R_0 имеет вид [103]:

$$R_0 = R_{lc} e^{-g/\xi(g)}, \quad \xi(g) \approx \frac{g}{(g^2 + g^4)^{1/4}}. \quad (1.42)$$

Видно, что результат (1.41) совпадает по форме с (1.37). Поток частиц на ЦЧД в этом случае будет даваться выражением:

$$F(E) \approx \frac{g}{\ln(1/R_0)} \frac{\bar{N} R_{lc}}{P} = \frac{4\pi^2 \mathcal{D}(E) L_c^2(E) P(E) f(E)}{\ln(1/R_{lc}) + (g^2 + g^4)^{1/4}}. \quad (1.43)$$

Можно показать, что

$$p(E) = \int_0^{L_c^2(E)} P(E, L) dL^2. \quad (1.44)$$

Обычно $P(E, L)$ очень слабо зависит от L , тогда справедливо будет следующее

$$p(E) \approx P(E) L_c^2(E). \quad (1.45)$$

Пользуясь полученным, выражение для потока (1.43), можно записать его в виде

$$F(E) = \frac{4\pi^2 \mathcal{D}(E) p(E) f(E)}{\ln(1/R_{lc}) + \alpha} = 4\pi^2 \nu(E) p(E) f(E), \quad (1.46)$$

где $\alpha = (g^2 + g^4)^{1/4}$.

1.4. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Для исследования динамической эволюции самогравитирующей системы необходимо совместно решать уравнение Фоккера-Планка (1.18) и уравнение Пуассона для гравитационного потенциала. Техника решения этих уравнений описана в [66; 67] и усовершенствована в [73]. Следуя [73], в качестве независимой переменной вместо E выберем q . Тогда уравнение Фоккера-Планка примет

ВИД:

$$\frac{\partial f_a(q, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \left(m_a B(q) f_a + C(q) \frac{\partial f_a}{\partial q} \right) - \nu(q, t) f_a(q, t), \quad (1.47)$$

последнее выражение представляет собой «сток» ПЧД на ЦЧД, индекс a относится к a -му массовому типу ПЧД, а выражение для коэффициентов даются выражениями:

$$C(q) = 4\pi\Gamma \sum_i \frac{m_i^2}{p(q)} \left(\int_0^q dq' \frac{q'}{p(q')} f_i(q') + q \int_q^\infty dq' \frac{f_i(q')}{p(q')} \right), \quad (1.48)$$

$$B(q) = 4\pi\Gamma \sum_i m_i \int_0^q dq' f_i(q'), \quad (1.49)$$

а выражение для ν дается формулой (1.46), где для вычисления \mathcal{D} необходимо просуммировать выражения (1.28) – (1.30) по всем массовым сортам и задать R_{lc} . Известно, что Шварцшильдовская ЧД поглощает частицы, момент импульса которых $L \leq 2c r_g$ [104], где r_g – гравитационный радиус ЧД, c – скорость света. Легко показать, что в Ньютоновском пределе это отвечает орбите с перицентром $r_{lc} = 4 r_g$, тогда

$$L_{lc}^2 = 2 r_{lc}^2 \left(E + \frac{GM_\bullet}{r_{lc}} \right) \approx 8 r_g GM_\bullet, \quad (1.50)$$

где для получения последнего выражения было учтено, что в точке поворота $r_{lc} \dot{r} = 0$ и энергия ПЧД $E \ll GM_\bullet/r_{lc}$, поскольку в основном захватываются ПЧД, слабосвязанные с ЦЧД. Таким образом, R_{lc} имеет вид:

$$R_{lc}(E) = \frac{8 r_g GM_\bullet}{L_c^2(E)}. \quad (1.51)$$

Поскольку q меняется в пределах более чем двадцати порядков, то уместно перейти к равномерной сетке с помощью замены $x = \ln q$, тогда уравнение (1.47) преобразуется к следующей форме:

$$e^x \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) m_a f_a + C(x) e^{-x} \frac{\partial f_a}{\partial x} \right) - e^x \nu(x, t) f_a. \quad (1.52)$$

Решением уравнения Пуассона для гравитационного потенциала в сфери-

чески симметричном случае будут два следующих интеграла:

$$\phi(r) = -4\pi G \left(\frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right) - \frac{GM_\bullet}{r}, \quad (1.53)$$

где последнее слагаемое — потенциал ЦЧД и $\rho(r)$ — профиль плотности:

$$\rho(r) = 4\pi^2 \sum_i m_i \int_{\varphi(r)}^0 f_i(E) \sqrt{2(E - \varphi(r))} dE. \quad (1.54)$$

Решение уравнений (1.52) и (1.53) состоит из двух шагов. Сначала на шаг Δt продвигается ФР с помощью уравнения (1.52), с помощью конечно-разностной схемы Ченга-Купера [105]. Затем решается уравнение Пуассона (1.53) итерациями: $\varphi_{i+1} = \mathcal{L}^{-1}[\rho_i]$, где ρ_i дается формулой (1.54) при $\varphi(r) = \varphi_i$. Для интегрирования выражения (1.54) необходимо устанавливать соответствие между E и q с помощью (1.22), поскольку ФР является функцией q , а не энергии E . Удобство выбора в качестве независимой переменной q связано с тем, что второй этап значительно упрощается [73] по сравнению с исходным алгоритмом, предложенным в [66; 67].

Для интегрирования уравнения (1.52) необходимо задать начальные условия. Поскольку изначально в этой работе задается профиль плотности, то для получения начальной ФР используется формула Эддингтона [102]:

$$f_a(E) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2 m_a} \frac{d}{dE} \int_E^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi - E}} \frac{d\rho_a}{d\varphi}. \quad (1.55)$$

Также необходимо задать граничные условия, которые в нашем случае можно выбрать, как условия нулевого потока на границах:

$$m_a B(q) f_a + C(q) \left. \frac{\partial f_a}{\partial q} \right|_0^\infty = 0. \quad (1.56)$$

Физически эти условия означают то, что нет убыли ПЧД через границы, что, вообще говоря, на нижнем пределе не совсем так, т.к. ЦЧД является поглощающим центром. Однако поток в энергетическом пространстве на ЦЧД практически нулевой [68] и главный вклад в убыль ПЧД вносит слагаемое конуса потерь νf . Подробный анализ влияния граничных условий на решение уравнения ФП может быть найден в [73].

2. СЛИЯНИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

С регистрации гравитационных волн от слияния черных дыр с массой $\sim 30M_{\odot}$ [21] интерес к ПЧД в массовом диапазоне $20M_{\odot} < M_{\text{РВН}} < 100M_{\odot}$ как к возможной форме Скрытой массы значительно вырос [106]. Однако тщательное изучение динамики звезд в карликовых галактиках сильно ограничивает эту возможность [107–109], но идея о том, что сливающиеся черные дыры могут иметь первичное происхождение, остается очень популярной [28–31; 110; 111]. Также следует отметить, что, помимо ПЧД, очень популярной является точка зрения, что источником событий гравитационных волн могут быть ШЗС, в которых естественным образом могут формироваться двойные ЧД астрофизического происхождения [61; 112–117].

2.1. ОЦЕНКА ТЕМПА СЛИЯНИЙ ЧЕРНЫХ ДЫР

Для оценки скорости слияния черных дыр в кластере мы будем полагать, что кластер имеет массу $M = 10^5 M_{\odot}$, характерный радиус $R \sim 1$ пк и скорости ПЧД $\sqrt{GM/R} \approx 20$ км с⁻¹ [53]. Сечение слияния черных дыр с массой m и m' за счет излучения гравитационных волн дается выражением [77; 95]:

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{85\pi}{6\sqrt{2}} \right)^{2/7} \frac{G^2(m+m')^{10/7} m^{2/7} m'^{2/7}}{c^{10/7} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^{18/7}}. \quad (2.1)$$

Строго говоря, сечение (2.1) описывает формирование двойной системы, но подразумевается, что время жизни сформированной двойной системы значительно меньше динамического времени.

Темп слияния черных дыр в кластере можно оценить как $\Gamma \sim Nn\sigma v$, где N — это число ПЧД в кластере и $n = 3N/4\pi R^3$ — концентрация ПЧД. Если подразумевать, что кластер заполнен черными дырами одинаковой массы m ,

то темп слияния будет:

$$\Gamma \sim 10^{-10} \left(\frac{M}{10^5 M_\odot} \right)^{17/14} \left(\frac{R}{1 \text{ пк}} \right)^{-31/14} \text{ лет}^{-1}. \quad (2.2)$$

Кластер ПЧД, аналогично ШЗС, эволюционирует под действием парной релаксации, в результате которой черные дыры будут улетать из «кора» (центральной части скопления). Приближенно можно считать, что этот процесс сохраняет полную энергию кора кластера. Согласно теореме вириала, полная энергия кора дается выражением $E = -G(mN)^2/2R$. Тогда кор будет сжиматься по закону $R \propto N^2$, а темп слияния будет эволюционировать как $\Gamma \propto N^{-3.2}$.

Следует отметить, что существует другой канал, который может быть ответственным за слияния ЧД. Он связан с формированием двойных ЧД в результате тречастичных взаимодействий. Получившаяся двойная будет взаимодействовать с другими ПЧД в кластере и становится «жестче» [113] (ЧД внутри двойной будут сближаться). Однако такие двойные системы будут разрушаться в результате взаимодействия с ЦЧД [88]. Это связано с тем, что двойная система будет испытывать динамическое трение в результате взаимодействия с другими ПЧД как целое. Вследствие этого двойная «осядет» в центральной области скопления, где будет разрушена ЦЧД.

В этой работе рассматриваются кластеры с ЦЧД. Несмотря на то, что темпу захвата ПЧД центральной массивной ЧД был посвящен раздел 1.3 «Конус потерь», здесь приводится простая оценка для этого процесса. В результате захвата менее массивных ЧД, масса ЦЧД будет расти как $\dot{M}_\bullet = \rho \sigma_c v$, где ρ — это плотность ПЧД в кластере и $\sigma_c = 4\pi r_g^2 (c/v)^2$ — сечение гравитационного захвата частиц Шварцшильдской ЧД [104]. Оценка для \dot{M}_\bullet имеет вид

$$\dot{M}_\bullet \sim 10^{-13} \left(\frac{R}{1 \text{ пк}} \right)^{-5/2} \left(\frac{M}{10^5 M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{M_\bullet}{10^2 M_\odot} \right)^2 M_\odot \text{ лет}^{-1}. \quad (2.3)$$

Согласно представленным выше рассуждениям, в процессе эволюции кластера, темп роста ЦЧД будет меняться как $\dot{M}_\bullet \propto N^{-4.5}$. Отметим, что когда кор сожмется значительно, ЦЧД останавливает коллапс кора и вызывает стадию расширения кластера [73; 118–120]. Таким образом, в результате развития гравитационной катастрофы [67; 121; 122] (коллапса кора) темп слияний ЧД может значительно увеличиваться как между собой, так и с ЦЧД.

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ СЛИЯНИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР В КЛАСТЕРЕ

Скорость слияния черных дыр с массой m в единице фазового пространства, в единицу массы и в единицу времени дается выражением

$$\gamma = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, m) \int dm' \int d\mathbf{v}' f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', m') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \sigma(m, m', |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|), \quad (2.4)$$

где f — функция распределения ПЧД в кластере σ — это сечение слияния ЧД, которое дается выражением (2.1). Видно, что сечение имеет структуру $\sigma = \sigma(m, m') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^{-18/7}$, тогда в случае сферической симметрии в пространстве скоростей, после интегрирования по углам, уравнение (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{14\pi f(r, v, m)}{3v} \int dm' \int dv' v' \sigma(m, m') \times \\ & \times f(r, v', m') \left[(v + v')^{3/7} - |v - v'|^{3/7} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вычисление интеграла (2.5) можно упростить, если считать, что функция распределения имеет дельта-функциональный вид:

$$f_i(r, v, m) = \frac{n_i(r)}{2\pi v} \delta\left(v^2 - \overline{v_i^2}(r)\right) \delta(m - m_i), \quad (2.6)$$

где индекс i обозначает i -й массовый тип ПЧД, а $\overline{v_i^2}(r)$ — среднеквадратичная скорость [102]:

$$\overline{v_i^2}(r) = \frac{4\pi}{n_i(r)} \int_{\varphi(r)}^0 dE f_i(E) \left[2(E - \varphi(r)) \right]^{3/2}, \quad (2.7)$$

m_i и n_i масса и концентрация i -го типа ПЧД в кластере соответственно. Другими словами, считается, что на расстоянии r от центра кластера все ЧД имеют одинаковую скорость $\overline{v_i^2}(r)$, а её направление изотропно. После интегрирования уравнения (2.4), получим темп слияния ПЧД j -го типа со всеми остальными

ПЧД:

$$\Gamma_j = \frac{14\pi}{3} \sum_i \sigma(m_j, m_i) \int dr r^2 \frac{n_j n_i}{\bar{v}_j \bar{v}_i} \left[(\bar{v}_j + \bar{v}_i)^{3/7} - |\bar{v}_j - \bar{v}_i|^{3/7} \right], \quad (2.8)$$

где было введено обозначение $\sqrt{v^2} = \bar{v}$. Для того, чтобы получить темп слияния ЧД j -го типа с каким-то конкретным типом k , следует в сумме (2.8) оставить только k -ое слагаемое.

В этой работе мы не учитываем возможность формирования новых массовых сортов ПЧД в результате их слияния, как, например, в [77]. Как видно из оценки (2.2) и как мы покажем в наших расчетах на один кластер приходится ~ 1 слияния тяжелых ПЧД с массой $10 M_\odot$ за время эволюции 10 млрд. лет. В основном события гравитационных волн, источником которых может быть кластер, будут обусловлены слиянием с ЦЧД.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы рассматриваем кластер, который формируются на красном смещении $z_f \sim 10^4$ и имеет следующий профиль плотности для всех ПЧД:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right)^{-2}, \quad (3.1)$$

где ρ_0 — константа нормировки и r_0 — параметр, определяющий характерный размер скопления, мы задаем его равным $r_0 = 1$ пк. Спектр масс ПЧД в кластере имеет вид [53]:

$$\frac{dN}{dm} \propto m^{-2}, \quad (3.2)$$

с диапазоном изменения масс от $10^{-2} M_\odot$ до $10 M_\odot$, масса ЦЧД $M_\bullet = 100 M_\odot$.

Как было отмечено во введении, мы учитываем аккрецию скрытой массы на кластер. Вокруг коллапсировавшего объекта в расширяющейся Вселенной формируется гало скрытой массы с профилем плотности $\rho \propto r^{-9/4}$ [48; 93]. Показатель профиля может быть и другим, что связано с неточечным характером коллапсировавшего объекта [46; 94], и может меняться от -1 до -3 . В наших расчетах мы выбираем профиль плотности скрытой массы в виде:

$$\rho_{DM} = \rho_{0,DM} \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^{-9/4}, \quad (3.3)$$

где $\rho_{0,DM} = \bar{\rho}_{DM}(z_f) \sim 10^4 M_\odot \text{ пк}^{-3}$ — средняя плотность Скрытой массы Вселенной на момент z_f . Более точные выражения для (3.3) и (3.1) могут быть получены в результате расчета формирования и отцепления кластера от расширения Вселенной [46]. Для сравнения, мы также приводим результаты эволюции СПЧД для моделей без гало Скрытой массы и для монохроматического спектра масс $m = 10 M_\odot$.

Мы считаем, что флуктуация плотности кластера $\delta\rho/\rho \sim 1$, что является требованием для коллапса объекта. Из этого условия легко получить массу кластера. $\delta\rho/\rho \sim 1$ означает, что $\rho_{0,DM} \sim 3M_{cl}/4\pi r_0^3$, отсюда следует, что $M_{cl} \sim 10^5 M_\odot$ при $r_0 = 1$ пк.

Выбор $z_f \sim 10^4$ обусловлен тем, что в грубом приближении можно считать, что гравитационно связанные объекты не формируются до $z_{eq} \approx 3400$. А более позднее формирование кластера означало бы, что он не доминирует по плотности и является только малой флуктуацией $\delta\rho/\rho < 1$, которая, тем не менее, может запустить раннее формирование гравитационно-связанного объекта. В этом случае ПЧД не будут доминировать по плотности в получившемся гало, однако в результате динамического трения о частицы скрытой массы могут «осесть» в центре и сформировать кластер [123].

3.1. ЭВОЛЮЦИЯ МАССОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЧД

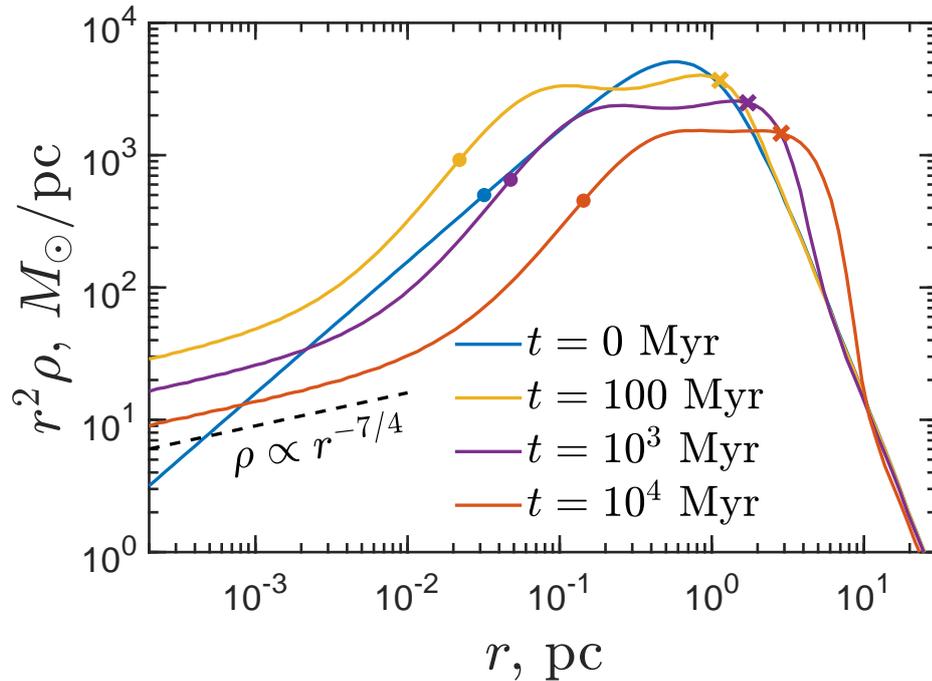


Рисунок 3.1 — Профиль плотности ПЧД в кластере для разных моментов времени. точки обозначают радиус, содержащий $M_{\bullet}(t)$ массы, кресты — радиус, содержащий половину массы

На рисунке (3.1) представлена эволюция массового распределения ПЧД в скоплении. Отметим, что $dM(r)/dr \propto r^2\rho(r)$, т.е. график отражает дифференциальное распределение массы. Можно видеть, что в центральной области скопления устанавливается касп $\rho \propto r^{-7/4}$. Это так называемый касп Баккала-Вольфа [68], но под ним сосредоточена масса $\lesssim M_{\bullet}(t)$. Основная часть массы

кластера подчиняется профилю $\rho \propto r^{-2}$ — примерно плоский максимум всех линий (кроме синей) на графике (3.1).

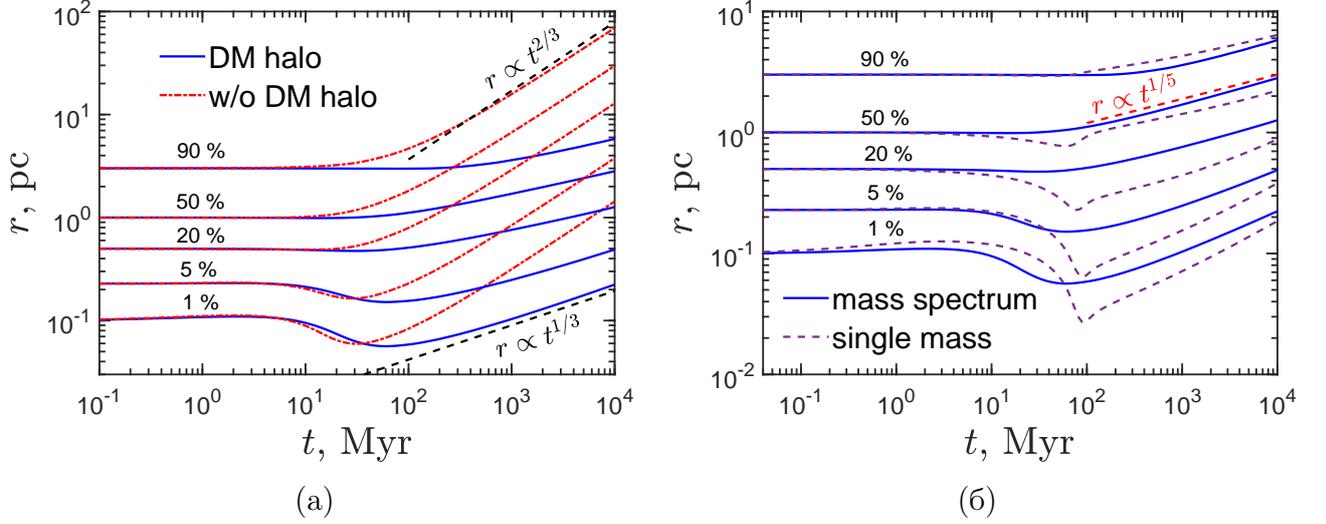


Рисунок 3.2 — Эволюция массовых оболочек, содержащих указанное количество массы (в процентах от M_{cl}). (а): Для модели кластера, окруженного гало скрытой массы и без него. (б): Для модели кластера с ПЧД одинаковой массы $m = 10 M_{\odot}$ и для спектра масс ПЧД (3.2)

График (3.2) показывает эволюцию лагранжевых координат для разных моделей. Из (3.2а) видно характерное различие в эволюции кластера с гало скрытой массы и без него. Моделирование как с гало так и без него следует классической динамике ШЗС: происходит коллапс кора и начинается стадия автомодельного расширения $r \propto t^{2/3}$, вызванная присутствием ЦЧД [73; 119]. Однако наличие гало замедляет темп этого расширения $r \propto t^{1/3}$ для внутренних оболочек и $r \propto t^{1/5}$ для внешних, что связано с динамическим трением ПЧД о частицы скрытой массы, которое приводит к тому, что ПЧД теряют энергию. В результате этого кластер практически сохраняет свой размер: $r_h \sim 30$ пк без гало и $r_h \sim 3$ пк с гало. Следует отметить, что расширение ШЗС не обязательно связано с наличием ЦЧД и имеет место в общем случае после коллапса кора, который приводит к тому, что в центре ШЗС формируется источник энергии. Например, он может быть связан с формированием двойных звездных систем, которые, взаимодействуя с другими звездами, будут сближаться, тем самым передавая им энергию [78; 124–128].

Рисунок (3.2б) показывает, что наличие широкого диапазона изменения масс ПЧД приводит к «мягкому» коллапсу кора, в то время как для кластера с монохроматическим спектром масс это явление имеет классический

«резкий» характер. Подобное различие объясняется тем, что в первом случае массивные ПЧД испытывают динамическое трение о менее массивные, что более подробно отражено на рисунке (3.3a). График (3.3б) показывает массовое распределение в конечный момент времени. Кластер приобретает «слоистую» структуру в результате динамического — чем тяжелее ПЧД, тем ближе к центру они расположены. Также следует отметить, что самые массивные ПЧД в центре имеют касп Баккала-Вольфа, в то время как более легкие имеют менее крутой касп $\rho \propto r^{-3/2}$.

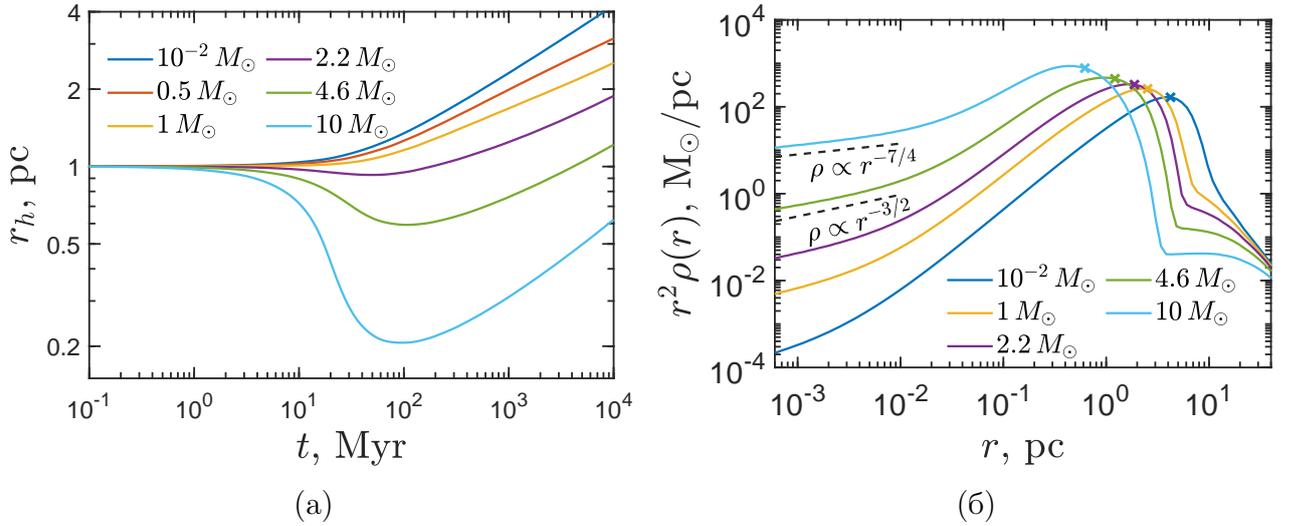


Рисунок 3.3 — (а): Эволюция радиуса, содержащего половину массы r_h , для разных массовых сортов в кластере. (б): Массовое распределение разных типов ПЧД в конечный момент времени $t = 10$ млрд. лет, кресты обозначают радиус, содержащий половину массы r_h

3.2. ТЕМП СЛИЯНИЙ ПЧД

На графике (3.4a) представлена частота слияний ПЧД с массой $10 M_\odot$ с ЦЧД в зависимости от времени для различных моделей. Первый максимум на графике связан с формированием каспа Баккала-Вольфа, второй — с коллапсом кора. Можно отметить, что в результате резкого сжатия центральных массовых оболочек для кластера с монохроматическим спектром масс (см. рисунок (3.26)) происходит резкое увеличение темпа слияний при $t \sim 100$ млн. лет. Для кластера со спектром масс (3.2) этот рост имеет более плавную зависимость из-за сегрегации масс. Дальнейший спад темпа слияний обусловлен тем, что кластер автономно расширяется. Можно видеть, что учет гало скрытой массы

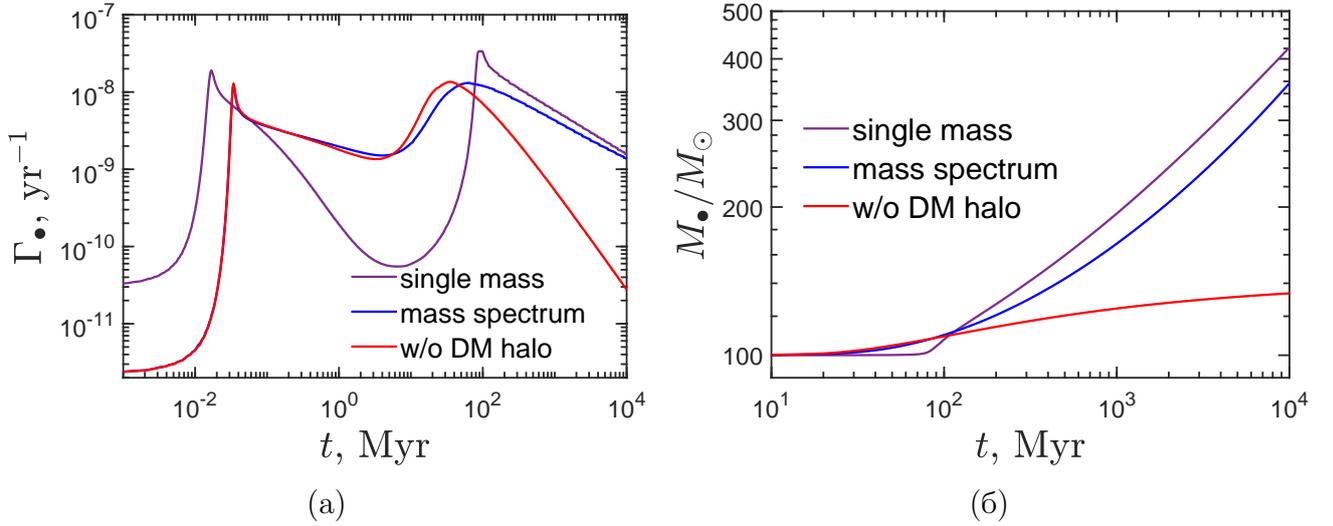


Рисунок 3.4 — (а): Скорость слияний ПЧД с массой $10 M_{\odot}$ с ЦЧД в зависимости от времени. (б): Зависимость массы ЦЧД от времени

значительно (примерно на 2 порядка) увеличивает темп слияний, однако из-за большой массы ЦЧД $\gtrsim 300 M_{\odot}$ регистрация таких событий сейчас невозможна наземными детекторами гравитационных волн.

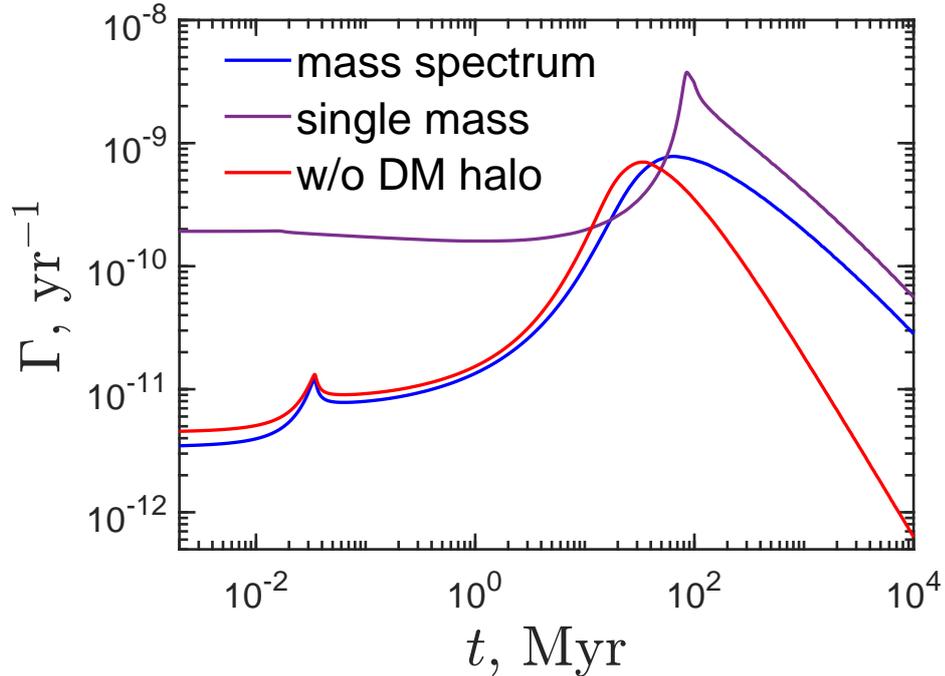


Рисунок 3.5 — Скорость слияний ПЧД с массой $10 M_{\odot}$ для различных моделей кластера

Рисунок (3.5) показывает эволюцию частоты слияний ПЧД с массой $10 M_{\odot}$. Зависимость скорости слияния ПЧД между собой и ЦЧД (рисунок (3.4a)) имеет одинаковые особенности. За время эволюции кластера ПЧД с массой $10 M_{\odot}$ испытывают ~ 1 слияния друг с другом и $\sim 20 - 30$ слияний с ЦЧД. Тем

не менее полученные результаты могут быть использованы для установления ограничения на кластеры ПЧД в современную эпоху. Скорость слияния ЧД с массой $\sim 10 M_\odot$ оценивается LIGO/Virgo как $\sim 100 \text{ лет}^{-1} \text{ Гпк}^{-3}$ [129]. Таким образом, на кластеры ПЧД возникает ограничение:

$$\frac{\Gamma f_{\text{cl}} \Omega_{DM} \rho_c}{M_{\text{cl}}} \lesssim 100 \text{ лет}^{-1} \text{ Гпк}^{-3}, \quad (3.4)$$

где $\rho_c \approx 126 M_\odot \text{ кпк}^{-3}$ — критическая плотность Вселенной и $\Omega_{DM} \approx 0.27$ — доля скрытой массы [130]. Из рисунка (3.5) следует, что $\Gamma \approx 3 \times 10^{-11} \text{ лет}^{-1}$, тогда с учетом $M_{\text{cl}} = 10^5 M_\odot$ получим, что $f_{\text{cl}} \lesssim 0.01$. Полученный результат сильнее, чем ограничения по Лайман- α лесу [89]: $f_{\text{cl}} \lesssim 0.05$.

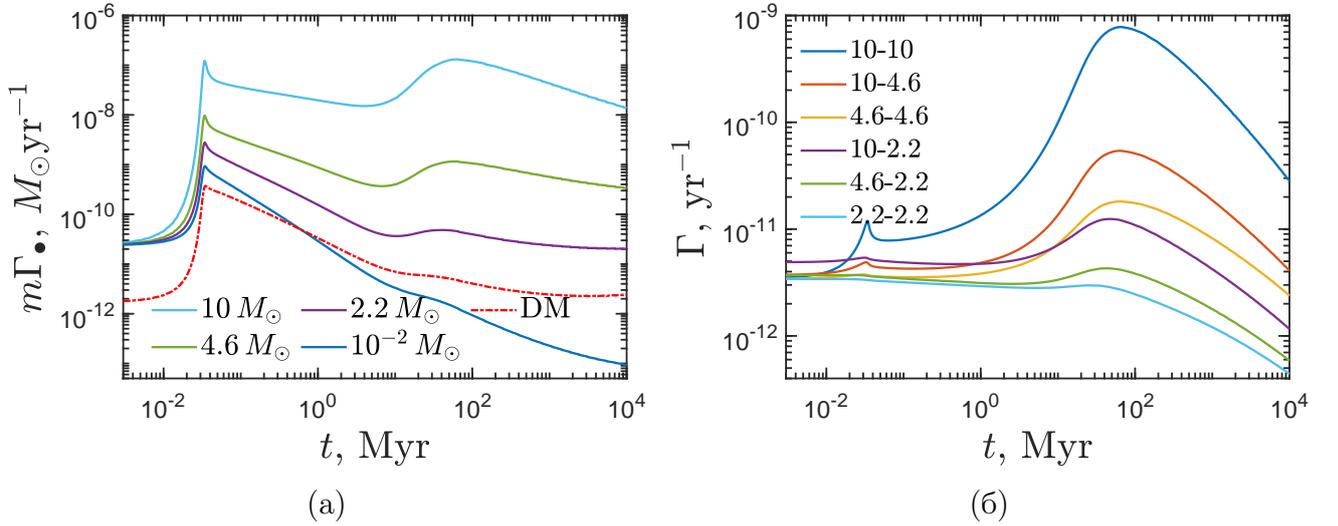


Рисунок 3.6 — (а): Скорость потери массы каждым массовым компонентом в зависимости от времени, в результате их поглощения ЦЧД. (б): Темп слияний ПЧД различных масс в зависимости от времени, на легенде указаны массы сливающихся ЧД в массах солнца. Оба графика представлены для модели со спектром масс ПЧД (3.2) и гало скрытой массы

Рисунок (3.6) отражает тот факт, что основной вклад в темп слияний ПЧД вносят только самые тяжелые массовые компоненты. Например, ~ 4 событий слияния происходит для ПЧД с массой $4.6 M_\odot$ с ЦЧД к моменту времени $t = 10$ млрд. лет, в то время как для ПЧД $10 M_\odot$ — ~ 30 .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучена эволюция скопления ПЧД в приближении Фоккера-Планка. Для кластера с полной массой $M_{cl} = 10^5 M_{\odot}$ и спектром масс (3.2) была получена эволюция массовых оболочек и профили плотности различных типов ПЧД в кластере. Было изучено влияние гало скрытой массы на динамику скопления и установлено, что наличие гало замедляет темп расширения кластера из-за динамического трения ПЧД о частицы скрытой массы. Также для сравнения были приведены результаты моделирования эволюции кластера без гало и с монохроматическим спектром масс ПЧД с $m = 10 M_{\odot}$.

Были исследованы скорости слияний ПЧД между собой и с ЦЧД. Было получено, что масса ЦЧД увеличивается до $M_{\bullet} \sim 400 M_{\odot}$ для кластера, окруженного гало скрытой массы и до $M_{\bullet} \sim 120 M_{\odot}$ без учета гало. По темпу слияний ПЧД с массой $10 M_{\odot}$ поставлено ограничение на долю кластеров ПЧД в скрытой массе $f_{cl} \lesssim 0.01$.

Было установлено, что кластеры ПЧД могут обладать уникальной сигнатурой эволюции темпа слияний черных дыр. А именно — значительное увеличение частоты событий слияний к моменту коллапса кора. Полученные результаты могут быть использованы для проверки модели кластеров ПЧД с помощью данных будущего поколения гравитационно-волновых детекторов, способных регистрировать слияния ЧД на больших красных смещениях $z \gtrsim 10$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Sov. Astron.* — 1967. — Vol. 10. — P. 602.
2. *Hawking S.* Gravitationally collapsed objects of very low mass // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1971. — Vol. 152. — P. 75.
3. *Carr B. J., Hawking S. W.* Black holes in the early Universe // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1974. — Vol. 168. — P. 399–416.
4. *Chapline G. F.* Cosmological effects of primordial black holes // *Nature.* — 1975. — Vol. 253, no. 5489. — P. 251–252.
5. *Dolgov A., Silk J.* Baryon isocurvature fluctuations at small scales and baryonic dark matter // *Phys. Rev. D.* — 1993. — Vol. 47, no. 10. — P. 4244–4255.
6. *García-Bellido J., Linde A., Wands D.* Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Vol. 54, no. 10. — P. 6040–6058. — arXiv: [astro-ph/9605094](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9605094) [[astro-ph](#)].
7. *Khlopov M. Y.* Primordial black holes // *Res. Astron. Astrophys.* — 2010. — Vol. 10, no. 6. — P. 495–528. — arXiv: [0801.0116](https://arxiv.org/abs/0801.0116) [[astro-ph](#)].
8. *García-Bellido J., Ruiz Morales E.* Primordial black holes from single field models of inflation // *Physics of the Dark Universe.* — 2017. — Vol. 18. — P. 47–54. — arXiv: [1702.03901](https://arxiv.org/abs/1702.03901) [[astro-ph.CO](#)].
9. *Carr B., Kühnel F., Sandstad M.* Primordial black holes as dark matter // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Vol. 94, no. 8. — P. 083504. — arXiv: [1607.06077](https://arxiv.org/abs/1607.06077) [[astro-ph.CO](#)].
10. *Carr B., Kühnel F.* Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments // *Annual Review of Nuclear and Particle Science.* — 2020. — Vol. 70, no. 1. — P. 355–394. — arXiv: [2006.02838](https://arxiv.org/abs/2006.02838) [[astro-ph.CO](#)].

11. The Demography of Massive Dark Objects in Galaxy Centers / J. Magorrian [et al.] // *Astron. J.* — 1998. — Vol. 115, no. 6. — P. 2285–2305. — arXiv: [astro-ph/9708072](#) [[astro-ph](#)].
12. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion / K. Gebhardt [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2000. — Vol. 539, no. 1. — P. L13–L16. — arXiv: [astro-ph/0006289](#) [[astro-ph](#)].
13. *Ferrarese L., Merritt D.* A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies // *Astrophys. J. Lett.* — 2000. — Vol. 539, no. 1. — P. L9–L12. — arXiv: [astro-ph/0006053](#) [[astro-ph](#)].
14. Two ten-billion-solar-mass black holes at the centres of giant elliptical galaxies / N. J. McConnell [et al.] // *Nature*. — 2011. — Vol. 480, no. 7376. — P. 215–218. — arXiv: [1112.1078](#) [[astro-ph.CO](#)].
15. Supermassive Black Holes and Their Host Spheroids. II. The Red and Blue Sequence in the $M_{BH} - M_{*,sph}$ Diagram / G. A. D. Savorgnan [et al.] // *Astrophys. J.* — 2016. — Vol. 817, no. 1. — P. 21. — arXiv: [1511.07437](#) [[astro-ph.GA](#)].
16. The Final SDSS High-redshift Quasar Sample of 52 Quasars at $z > 5.7$ / L. Jiang [et al.] // *Astrophys. J.* — 2016. — Vol. 833, no. 2. — P. 222. — arXiv: [1610.05369](#) [[astro-ph.GA](#)].
17. Physical Properties of 15 Quasars at $z \gtrsim 6.5$ / C. Mazzucchelli [et al.] // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 849, no. 2. — P. 91. — arXiv: [1710.01251](#) [[astro-ph.GA](#)].
18. An 800-million-solar-mass black hole in a significantly neutral Universe at a redshift of 7.5 / E. Bañados [et al.] // *Nature*. — 2018. — Vol. 553, no. 7689. — P. 473–476. — arXiv: [1712.01860](#) [[astro-ph.GA](#)].
19. Discovery of the First Low-luminosity Quasar at $z > 7$ / Y. Matsuoka [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2019. — Vol. 872, no. 1. — P. L2. — arXiv: [1901.10487](#) [[astro-ph.GA](#)].
20. Pōniuā'ena: A Luminous $z = 7.5$ Quasar Hosting a 1.5 Billion Solar Mass Black Hole / J. Yang [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2020. — Vol. 897, no. 1. — P. L14. — arXiv: [2006.13452](#) [[astro-ph.GA](#)].

21. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 6. — P. 061102. — arXiv: [1602.03837 \[gr-qc\]](#).
22. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence / B. P. Abbott [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 24. — P. 241103. — arXiv: [1606.04855 \[gr-qc\]](#).
23. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs / B. P. Abbott [et al.] // Physical Review X. — 2019. — Vol. 9, no. 3. — P. 031040. — arXiv: [1811.12907 \[astro-ph.HE\]](#).
24. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object / R. Abbott [et al.] // Astrophys. J. Lett. — 2020. — Vol. 896, no. 2. — P. L44. — arXiv: [2006.12611 \[astro-ph.HE\]](#).
25. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run / R. Abbott [et al.] // Phys. Rev. X. — 2021. — Vol. 11. — P. 021053. — arXiv: [2010.14527 \[gr-qc\]](#).
26. Did LIGO Detect Dark Matter? / S. Bird [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 20. — P. 201301. — arXiv: [1603.00464 \[astro-ph.CO\]](#).
27. Solving puzzles of GW150914 by primordial black holes / S. Blinnikov [et al.] // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2016. — Vol. 2016, no. 11. — P. 036. — arXiv: [1611.00541 \[astro-ph.HE\]](#).
28. *Clesse S., García-Bellido J.* Seven hints for primordial black hole dark matter // Physics of the Dark Universe. — 2018. — Vol. 22. — P. 137–146. — arXiv: [1711.10458 \[astro-ph.CO\]](#).
29. *Raidal M., Vaskonen V., Veermäe H.* Gravitational waves from primordial black hole mergers // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2017. — Vol. 2017, no. 9. — P. 037. — arXiv: [1707.01480 \[astro-ph.CO\]](#).

30. *Ali-Haïmoud Y., Kovetz E. D., Kamionkowski M.* Merger rate of primordial black-hole binaries // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 96, issue 12. — P. 123523.
31. Formation and evolution of primordial black hole binaries in the early universe / M. Raidal [et al.] // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* — 2019. — Vol. 2019, no. 2. — P. 018. — arXiv: [1812.01930](https://arxiv.org/abs/1812.01930) [[astro-ph.CO](#)].
32. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / Planck Collaboration [et al.] // *Astron. & Astrophys.* — 2020. — Vol. 641. — A6. — arXiv: [1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [[astro-ph.CO](#)].
33. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology / D. N. Spergel [et al.] // *Astrophys. J. Suppl.* — 2007. — Vol. 170, no. 2. — P. 377–408. — arXiv: [astro-ph/0603449](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603449) [[astro-ph](#)].
34. Evidence for Reionization at $z \sim 6$: Detection of a Gunn-Peterson Trough in a $z = 6.28$ Quasar / R. H. Becker [et al.] // *Astron. J.* — 2001. — Vol. 122, no. 6. — P. 2850–2857. — arXiv: [astro-ph/0108097](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0108097) [[astro-ph](#)].
35. *Belotsky K. M., Kirillov A. A.* Primordial black holes with mass $10^{16}–10^{17}$ g and reionization of the Universe // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* — 2015. — Vol. 2015, no. 1. — P. 041. — arXiv: [1409.8601](https://arxiv.org/abs/1409.8601) [[astro-ph.CO](#)].
36. *Belotsky K. M., Kirillov A. A., Rubin S. G.* Clusters of primordial black holes and reionization problem // *Physics of Atomic Nuclei.* — 2015. — Vol. 78, no. 3. — P. 387–393.
37. Reionization effect enhancement due to primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // *Int. J. Mod. Phys. D.* — 2017. — Vol. 26, no. 9. — P. 1750102. — arXiv: [1702.06338](https://arxiv.org/abs/1702.06338) [[astro-ph.CO](#)].
38. *Ricotti M., Ostriker J. P.* Reionization, chemical enrichment and seed black holes from the first stars: is Population III important? // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2004. — Vol. 350, no. 2. — P. 539–551. — arXiv: [astro-ph/0310331](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310331) [[astro-ph](#)].
39. *Dijkstra M., Haiman Z., Loeb A.* A Limit from the X-Ray Background on the Contribution of Quasars to Reionization // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 613, no. 2. — P. 646–654. — arXiv: [astro-ph/0403078](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0403078) [[astro-ph](#)].

40. *Djorgovski S. G.* Black Holes from the Dark Ages.: Exploring the Reionization ERA and Early Structure Formation with Quasars and Gamma-Ray Bursts // The Tenth Marcel Grossmann Meeting. On recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories. — 2006. — P. 422. — arXiv: [astro-ph/0409378](#) [[astro-ph](#)].
41. *Ricotti M., Ostriker J. P., Mack K. J.* Effect of Primordial Black Holes on the Cosmic Microwave Background and Cosmological Parameter Estimates // *Astrophys. J.* — 2008. — Vol. 680, no. 2. — P. 829–845. — arXiv: [0709.0524](#) [[astro-ph](#)].
42. *Kashlinsky A.* LIGO Gravitational Wave Detection, Primordial Black Holes, and the Near-IR Cosmic Infrared Background Anisotropies // *Astrophys. J. Lett.* — 2016. — Vol. 823, no. 2. — P. L25. — arXiv: [1605.04023](#) [[astro-ph.CO](#)].
43. Evidence for GN-z11 as a luminous galaxy at redshift 10.957 / L. Jiang [et al.] // *Nature Astronomy.* — 2021. — Vol. 5. — P. 256–261. — arXiv: [2012.06936](#) [[astro-ph.HE](#)].
44. Detecting Population III Stars through Observations of Near-Infrared Cosmic Infrared Background Anisotropies / A. Kashlinsky [et al.] // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 608, no. 1. — P. 1–9. — arXiv: [astro-ph/0401401](#) [[astro-ph](#)].
45. First Star Signature in Infrared Background Anisotropies / A. Cooray [et al.] // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 606, no. 2. — P. 611–624. — arXiv: [astro-ph/0308407](#) [[astro-ph](#)].
46. *Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N., Rubin S. G.* Early formation of galaxies induced by clusters of black holes // *Astron. Rep.* — 2008. — Vol. 52, no. 10. — P. 779–789. — arXiv: [0801.0885](#) [[astro-ph](#)].
47. *Inman D., Ali-Haïmoud Y.* Early structure formation in primordial black hole cosmologies // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100, no. 8. — P. 083528. — arXiv: [1907.08129](#) [[astro-ph.CO](#)].

48. *Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N.* A Stochastic Model for Correlations between Central Black Hole Masses and Galactic Bulge Velocity Dispersions // *Astron. Lett.* — 2001. — Vol. 27, no. 12. — P. 759–764. — arXiv: [astro-ph/0202019](#) [[astro-ph](#)].
49. *Rubin S. G., Khlopov M. Y., Sakharov A. S.* Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition // *Grav. Cosmol.* — 2000. — Vol. S6. — P. 51–58. — arXiv: [hep-ph/0005271](#) [[hep-ph](#)].
50. *Rubin S. G., Sakharov A. S., Khlopov M. Y.* The Formation of Primary Galactic Nuclei during Phase Transitions in the Early Universe // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2001. — Vol. 92, no. 6. — P. 921–929. — arXiv: [hep-ph/0106187](#) [[hep-ph](#)].
51. *Khlopov M. Y., Rubin S. G., Sakharov A. S.* Primordial structure of massive black hole clusters // *Astropart. Phys.* — 2005. — Vol. 23, no. 2. — P. 265–277. — arXiv: [astro-ph/0401532](#) [[astro-ph](#)].
52. Signatures of primordial black hole dark matter / K. M. Belotsky [et al.] // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2014. — Vol. 29, no. 37. — P. 1440005. — arXiv: [1410.0203](#) [[astro-ph.CO](#)].
53. Clusters of Primordial Black Holes / K. M. Belotsky [et al.] // *Eur. Phys. J. C.* — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: [1807.06590](#) [[astro-ph.CO](#)].
54. Detectability of gravitational waves from the coalescence of massive primordial black holes with initial clustering / Q. Ding [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100, no. 10. — P. 103003. — arXiv: [1903.07337](#) [[astro-ph.CO](#)].
55. *Afshordi N., McDonald P., Spergel D. N.* Primordial Black Holes as Dark Matter: The Power Spectrum and Evaporation of Early Structures // *Astrophys. J. Lett.* — 2003. — Vol. 594, no. 2. — P. L71–L74. — arXiv: [astro-ph/0302035](#) [[astro-ph](#)].
56. *Jedamzik K.* Primordial black hole dark matter and the LIGO/Virgo observations // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* — 2020. — Vol. 2020, no. 9. — P. 022. — arXiv: [2006.11172](#) [[astro-ph.CO](#)].

57. *Trashorras M., García-Bellido J., Nesseris S.* The clustering dynamics of primordial black holes in N -body simulations // Universe. — 2021. — Vol. 7. — P. 18. — arXiv: [2006.15018 \[astro-ph.CO\]](#).
58. Merger rates in primordial black hole clusters without initial binaries / V. Korol [et al.] // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2020. — Vol. 496, no. 1. — P. 994–1000. — arXiv: [1911.03483 \[astro-ph.HE\]](#).
59. *Khromykh L. A., Kirillov A. A.* The gravitational dynamics of the primordial black holes cluster // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — Vol. 1390. — P. 012090.
60. *Freitag M., Benz W.* A new Monte Carlo code for star cluster simulations. I. Relaxation // Astron. & Astrophys. — 2001. — Vol. 375. — P. 711–738. — arXiv: [astro-ph/0102139 \[astro-ph\]](#).
61. Post-Newtonian Dynamics in Dense Star Clusters: Highly Eccentric, Highly Spinning, and Repeated Binary Black Hole Mergers / C. L. Rodriguez [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 120, no. 15. — P. 151101. — arXiv: [1712.04937 \[astro-ph.HE\]](#).
62. *Vasiliev E.* A new Monte Carlo method for dynamical evolution of non-spherical stellar systems // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2015. — Vol. 446, no. 3. — P. 3150–3161. — arXiv: [1411.1757 \[astro-ph.GA\]](#).
63. *Joshi K. J., Rasio F. A., Portegies Zwart S.* Monte Carlo Simulations of Globular Cluster Evolution. I. Method and Test Calculations // Astrophys. J. — 2000. — Vol. 540, no. 2. — P. 969–982. — arXiv: [astro-ph/9909115 \[astro-ph\]](#).
64. *Hypki A., Giersz M.* MOCCA code for star cluster simulations - I. Blue stragglers, first results // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2013. — Vol. 429, no. 2. — P. 1221–1243. — arXiv: [1207.6700 \[astro-ph.GA\]](#).
65. *Giersz M.* Monte Carlo simulations of star clusters - I. First Results // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 1998. — Vol. 298, no. 4. — P. 1239–1248. — arXiv: [astro-ph/9804127 \[astro-ph\]](#).
66. *Cohn H.* Numerical integration of the Fokker-Planck equation and the evolution of star clusters // Astrophys. J. — 1979. — Vol. 234. — P. 1036–1053.

67. *Cohn H.* Late core collapse in star clusters and the gravothermal instability // *Astrophys. J.* — 1980. — Vol. 242. — P. 765–771.
68. *Bahcall J. N., Wolf R. A.* Star distribution around a massive black hole in a globular cluster. // *Astrophys. J.* — 1976. — Vol. 209. — P. 214–232.
69. *Lightman A. P., Shapiro S. L.* The distribution and consumption rate of stars around a massive, collapsed object. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 211. — P. 244–262.
70. *Bahcall J. N., Wolf R. A.* The star distribution around a massive black hole in a globular cluster. II. Unequal star masses. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 216. — P. 883–907.
71. *Cohn H., Kulsrud R. M.* The stellar distribution around a black hole: numerical integration of the Fokker-Planck equation. // *Astrophys. J.* — 1978. — Vol. 226. — P. 1087–1108.
72. *Murphy B. W., Cohn H. N., Durisen R. H.* Dynamical and Luminosity Evolution of Active Galactic Nuclei: Models with a Mass Spectrum // *Astrophys. J.* — 1991. — Vol. 370. — P. 60.
73. *Vasiliev E.* A New Fokker-Planck Approach for the Relaxation-driven Evolution of Galactic Nuclei // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 848, no. 1. — P. 10. — arXiv: [1709.04467](https://arxiv.org/abs/1709.04467) [[astro-ph.GA](https://arxiv.org/abs/1709.04467)].
74. *Ostriker J. P.* Physical interactions between stars. // *Dynamics of Star Clusters*. Vol. 113 / ed. by J. Goodman, P. Hut. — 1985. — P. 347–357.
75. *Lee H. M.* Dynamical Effects of Successive Mergers on the Evolution of Spherical Stellar Systems // *Astrophys. J.* — 1987. — Vol. 319. — P. 801.
76. *Statler T. S., Ostriker J. P., Cohn H. N.* Evolution of N-Body Systems with Tidally Captured Binaries through the Core Collapse Phase // *Astrophys. J.* — 1987. — Vol. 316. — P. 626.
77. *Cohn H., Hut P., Wise M.* Gravothermal Oscillations after Core Collapse in Globular Cluster Evolution // *Astrophys. J.* — 1989. — Vol. 342. — P. 814.

78. *Takahashi K.* Fokker-Planck Models of Star Clusters with Anisotropic Velocity Distributions II. Post-Collapse Evolution // Publ. Astron. Soc. Jpn. — 1996. — Vol. 48. — P. 691–700. — arXiv: [astro-ph/9609025](#) [[astro-ph](#)].
79. Anisotropic Fokker-Planck Models for the Evolution of Globular Star Clusters: The Core-Halo Connection / G. A. Drukier [et al.] // Astrophys. J. — 1999. — Vol. 518, no. 1. — P. 233–245.
80. *Quinlan G. D., Shapiro S. L.* Dynamical Evolution of Dense Clusters of Compact Stars // Astrophys. J. — 1989. — Vol. 343. — P. 725.
81. *Quinlan G. D., Shapiro S. L.* The Dynamical Evolution of Dense Star Clusters in Galactic Nuclei // Astrophys. J. — 1990. — Vol. 356. — P. 483.
82. *Lee H. M., Ostriker J. P.* The Evolution and Final Disintegration of Spherical Stellar Systems in a Steady Galactic Tidal Field // Astrophys. J. — 1987. — Vol. 322. — P. 123.
83. *Chernoff D. F., Weinberg M. D.* Evolution of Globular Clusters in the Galaxy // Astrophys. J. — 1990. — Vol. 351. — P. 121.
84. *Takahashi K., Lee H. M., Inagaki S.* Evolution of tidally truncated globular clusters with anisotropy // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 1997. — Vol. 292, no. 2. — P. 331–337. — arXiv: [astro-ph/9705012](#) [[astro-ph](#)].
85. *Takahashi K., Portegies Zwart S. F.* The Disruption of Globular Star Clusters in the Galaxy: A Comparative Analysis between Fokker-Planck and N-Body Models // Astrophys. J. Lett. — 1998. — Vol. 503, no. 1. — P. L49–L52. — arXiv: [astro-ph/9805310](#) [[astro-ph](#)].
86. *Stasenko V. D., Kirillov A. A.* Dynamical evolution of a cluster of primordial black holes // Bled Workshop in Physics. — 2020. — Vol. 21. — P. 162–167. — arXiv: [2011.03099](#) [[astro-ph.CO](#)].
87. *Stasenko V. D., Kirillov A. A.* Evolution of the cluster of primordial black holes within the Fokker-Planck approach // J. Phys.: Conf. Ser. — 2020. — Vol. 1690. — P. 012147. — arXiv: [2103.10503](#) [[astro-ph.CO](#)].

88. *Stasenko V. D., Kirillov A. A.* The Merger Rate of Black Holes in a Primordial Black Hole Cluster // *Physics*. — 2021. — Vol. 3, no. 2. — P. 372–378. — arXiv: [2105.14523 \[astro-ph.CO\]](#).
89. Lyman- α Forest Constraints on Primordial Black Holes as Dark Matter / R. Murgia [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Vol. 123, no. 7. — P. 071102. — arXiv: [1903.10509 \[astro-ph.CO\]](#).
90. *Carr B., Silk J.* Primordial black holes as generators of cosmic structures // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Vol. 478, no. 3. — P. 3756–3775. — arXiv: [1801.00672 \[astro-ph.CO\]](#).
91. *Gunn J. E., Gott J. Richard I.* On the Infall of Matter Into Clusters of Galaxies and Some Effects on Their Evolution // *Astrophys. J.* — 1972. — Vol. 176. — P. 1.
92. *Gunn J. E.* Massive galactic halos. I. Formation and evolution. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 218. — P. 592–598.
93. *Bertschinger E.* Self-similar secondary infall and accretion in an Einstein-de Sitter universe // *Astrophys. J. Suppl.* — 1985. — Vol. 58. — P. 39–65.
94. *Mack K. J., Ostriker J. P., Ricotti M.* Growth of Structure Seeded by Primordial Black Holes // *Astrophys. J.* — 2007. — Vol. 665, no. 2. — P. 1277–1287. — arXiv: [astro-ph/0608642 \[astro-ph\]](#).
95. *Mouri H., Taniguchi Y.* Runaway Merging of Black Holes: Analytical Constraint on the Timescale // *Astrophys. J. Lett.* — 2002. — Vol. 566, no. 1. — P. L17–L20. — arXiv: [astro-ph/0201102 \[astro-ph\]](#).
96. Sensitivity studies for third-generation gravitational wave observatories / S. Hild [et al.] // *Classical Quant. Grav.* — 2011. — Vol. 28, no. 9. — P. 094013. — arXiv: [1012.0908 \[gr-qc\]](#).
97. Laser Interferometer Space Antenna / P. Amaro-Seoane [et al.] // arXiv e-prints. — 2017. — arXiv: [1702.00786 \[astro-ph.IM\]](#).
98. Exploring the sensitivity of next generation gravitational wave detectors / B. P. Abbott [et al.] // *Classical Quant. Grav.* — 2017. — Vol. 34, no. 4. — P. 044001. — arXiv: [1607.08697 \[astro-ph.IM\]](#).

99. KAGRA: 2.5 generation interferometric gravitational wave detector / Kagra Collaboration [et al.] // *Nature Astron.* — 2019. — Vol. 3. — P. 35–40. — arXiv: [1811.08079 \[gr-qc\]](#).
100. *Rosenbluth M. N., MacDonald W. M., Judd D. L.* Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force // *Phys. Rev.* — 1957. — Vol. 107, issue 1. — P. 1–6.
101. *Merritt D.* Dynamics and Evolution of Galactic Nuclei. — Princeton : Princeton University Press, 2013.
102. *Binney J., Tremaine S.* Galactic Dynamics: Second Edition. — Princeton : Princeton University Press, 2008.
103. *Merritt D.* Loss-cone dynamics // *Classical Quant. Grav.* — 2013. — Vol. 30, no. 24. — P. 244005. — arXiv: [1307.3268 \[astro-ph.GA\]](#).
104. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* The classical theory of fields. — Oxford : Pergamon Press, 1975.
105. *Chang J. S., Cooper G.* A Practical Difference Scheme for Fokker-Planck Equations // *J. Comput. Phys.* — 1970. — Vol. 6, no. 1. — P. 1–16.
106. Did LIGO Detect Dark Matter? / S. Bird [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 116, issue 20. — P. 201301.
107. *Brandt T. D.* Constraints on MACHO Dark Matter from Compact Stellar Systems in Ultra-faint Dwarf Galaxies // *Astrophys. J. Lett.* — 2016. — Vol. 824, no. 2. — P. L31. — arXiv: [1605.03665 \[astro-ph.GA\]](#).
108. *Koushiappas S. M., Loeb A.* Dynamics of Dwarf Galaxies Disfavor Stellar-Mass Black Holes as Dark Matter // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 119, no. 4. — P. 041102. — arXiv: [1704.01668 \[astro-ph.GA\]](#).
109. Primordial black holes as dark matter: constraints from compact ultra-faint dwarfs / Q. Zhu [et al.] // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Vol. 476, no. 1. — P. 2–11. — arXiv: [1710.05032 \[astro-ph.CO\]](#).
110. *Vaskonen V., Veermäe H.* Lower bound on the primordial black hole merger rate // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 101, no. 4. — P. 043015. — arXiv: [1908.09752 \[astro-ph.CO\]](#).

111. *Koushiappas S. M., Loeb A.* Maximum Redshift of Gravitational Wave Merger Events // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 119, no. 22. — P. 221104. — arXiv: [1708.07380 \[astro-ph.CO\]](#).
112. *Gürkan M. A., Freitag M., Rasio F. A.* Formation of Massive Black Holes in Dense Star Clusters. I. Mass Segregation and Core Collapse // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 604, no. 2. — P. 632–652. — arXiv: [astro-ph/0308449 \[astro-ph\]](#).
113. *Kritos K., Cholis I.* Evaluating the merger rate of binary black holes from direct captures and third-body soft interactions using the Milky Way globular clusters // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 102, no. 8. — P. 083016. — arXiv: [2007.02968 \[astro-ph.GA\]](#).
114. The Star Clusters That Make Black Hole Binaries across Cosmic Time / N. Choksi [et al.] // *Astrophys. J.* — 2019. — Vol. 873, no. 1. — P. 100. — arXiv: [1809.01164 \[astro-ph.GA\]](#).
115. Post-Newtonian dynamics in dense star clusters: Formation, masses, and merger rates of highly-eccentric black hole binaries / C. L. Rodriguez [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, no. 12. — P. 123005. — arXiv: [1811.04926 \[astro-ph.HE\]](#).
116. Black Hole Mergers from Star Clusters with Top-heavy Initial Mass Functions / N. C. Weatherford [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2021. — Vol. 907, no. 2. — P. L25. — arXiv: [2101.02217 \[astro-ph.GA\]](#).
117. The astro-primordial black hole merger rates: a reappraisal / K. Kritos [et al.] // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* — 2021. — Vol. 2021, no. 5. — P. 039. — arXiv: [2012.03585 \[gr-qc\]](#).
118. *Marchant A. B., Shapiro S. L.* Star clusters containing massive, central black holes. III - Evolution calculations // *Astrophys. J.* — 1980. — Vol. 239. — P. 685–704.
119. *Shapiro S. L.* Star clusters, self-interacting dark matter halos, and black hole cusps: The fluid conduction model and its extension to general relativity // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, no. 2. — P. 023021. — arXiv: [1809.02618 \[astro-ph.HE\]](#).

120. *Shapiro S. L.* The dissolution of globular clusters containing massive black holes. // *Astrophys. J.* — 1977. — Vol. 217. — P. 281–286.
121. *Lynden-Bell D., Wood R.* The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1968. — Vol. 138. — P. 495.
122. *Lynden-Bell D., Eggleton P. P.* On the consequences of the gravothermal catastrophe // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1980. — Vol. 191. — P. 483–498.
123. Formation and Clustering of Primordial Black Holes in Brans-Dicke Theory / V. Berezhin [et al.] // *Universe.* — 2020. — Vol. 6, no. 10. — P. 158. — arXiv: [2007.15347](https://arxiv.org/abs/2007.15347) [[astro-ph.CO](#)].
124. *Hénon M.* Two Recent Developments Concerning the Monte Carlo Method // *Dynamics of the Solar Systems.* Vol. 69 / ed. by A. Hayli. — 1975. — P. 133.
125. *Inagaki S., Lynden-Bell D.* Self-similar solutions for post-collapse evolution of globular clusters. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1983. — Vol. 205. — P. 913–930.
126. *Heggie D. C.* Post-collapse evolution of a gaseous cluster model // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1984. — Vol. 206. — P. 179–195.
127. *Cohn H.* Direct Fokker-Planck calculations. // *Dynamics of Star Clusters.* Vol. 113 / ed. by J. Goodman, P. Hut. — 1985. — P. 161–177.
128. *Heggie D. C., Ramamani N.* Evolution of star clusters after core collapse // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1989. — Vol. 237. — P. 757–783.
129. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2 / B. P. Abbott [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 118, no. 22. — P. 221101. — arXiv: [1706.01812](https://arxiv.org/abs/1706.01812) [[gr-qc](#)].
130. Review of Particle Physics / Particle Data Group [et al.] // *Prog. Theor. Exp. Phys.* — 2020. — Vol. 2020, no. 8. — P. 083C01.