МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

На правах рукописи

МУРЫГИН БОРИС СЕРГЕЕВИЧ

ОБРАЗОВАНИЕ ДОМЕННЫХ СТЕНОК И СТРУН В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,
к.ф.-м.н. ________ А. А. Кириллов

Москва 2021

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

ОБРАЗОВАНИЕ ДОМЕННЫХ СТЕНОК И СТРУН В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Студент	________ Б. С. Мурыгин
Научный руководитель, к.ф.-м.н.	________ А. А. Кириллов
Рецензент, к.ф.-м.н.	________ В. А. Гани
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	________ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	________ М. Д. Скорохватов
Рук. учеб. прог., д.ф.-м.н., проф.	________ М. Д. Скорохватов

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует множество моделей инфляции, с потенциалами степенной и нестепенной формы (см., например, [1–8]). Некоторые из таких потенциалов содержат множество вакуумов, а также седловые точки [9]. Сложная форма потенциалов делает возможным образование топологических дефектов в ранней Вселенной [10–13]. Существование топологических дефектов — солитонов может влиять на эволюцию ранней вселенной, при достаточной их распространенности [14]. Коллапс доменных стенок или струн может, при определенных условиях, привести к образованию отдельных ПЧД [15–20] или даже кластеров ПЧД [21; 22].

В настоящей работе рассматривается механизм образования солитонов, а именно струн и доменных стенок, в результате классической эволюции конфигурации двух действительных скалярных полей. Динамика системы рассматривается в (2+1)-пространстве времени. Ранее подобная система рассматривалась в (1+1)-мерии [23; 24], а также были получены первые результаты в (2+1)-мерном случае [25; 26]. В данной работе продолжается и обобщается уже проделанная работа в данном направлении.

Рассмотрение (2+1)-мерной системы означает, что мы изучаем двухмерные срезы трехмерной конфигурации, поэтому окончательные выводы об эволюции таких систем могут быть сделаны только в трехмерном случае. Однако, некоторые выводы об эволюции полной структуры могут быть сделаны и из такого рассмотрения. Как будет показано далее, существующие отдельно солитоны могут быть получены только локально, то есть в пределах некоторого среза в рамках которого граничные значения полей невакуумные, в действительности же картина сводится к появлению либо «пузырей», солитонных образований, состоящих только из доменных стенок, либо «блинов», то есть доменных стенок, соединённых струнами. В данной работе, во-первых, проводится такое локальное исследование солитонов и, во-вторых, исследуются такие двухмерные срезы, которые дают представление о возможном поведении трехмерной структуры в целом.

2. МОДЕЛЬ

Лагранжиан двух вещественных скалярных полей определяется выражением

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi + \partial^\mu\chi\partial^\nu\chi) - \mathcal{V}(\varphi, \chi), \tag{2.1}$$

где $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор Фридмана-Робертсона-Уолкера

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\big(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)\big), \tag{2.2}$$

$a(t) = \exp Ht$ — масштабный фактор на инфляционной стадии.

Рассмотрим модель двух действительных скалярных полей φ, χ, где потенциал $\mathcal{V}$ выбирается в виде

$$\mathcal{V}(\varphi, \chi) = \frac{m^2}{2}(\varphi^2 + \chi^2) + \Lambda^4 \exp\Big[- \lambda\big((\varphi - \varphi_0)^2 + (\chi - \chi_0)^2\big)\Big]. \tag{2.3}$$

Здесь m — масса каждого скалярного поля. Второй член соответствует локальному максимуму в точке (φ_0, χ_0). Положительные параметры Λ и λ описывают высоту и ширину локального максимума, соответственно. Потенциал аппроксимирует теории с глобальным минимумом, седловой точкой и локальным максимумом. Рассматриваемая форма потенциала часто встречается в теориях модифицированной многомерной гравитации [27]. Кроме того, в супергравитации и теории струн возникают модели с эффективными потенциалами, которые могут быть локально описаны рассматриваемой формой потенциала [8].

После окончания инфляции поля начинают подчиняться классическим уравнениям движения, которые для (2+1) пространства-времени имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + 3H\varphi_t - \varphi_{xx} - \varphi_{yy} &= -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\varphi}, \\ \chi_{tt} + 3H\chi_t - \chi_{xx} - \chi_{yy} &= -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\chi}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $H = \dot{a}/a$-параметр Хаббла, $H_I \sim 10^{13}$ ГэВ для стадии инфляции и становится меньше после окончания инфляции. Для простоты мы пренебрегаем зависимостью параметра Хаббла от времени, поскольку $3H\varphi_t$ и $3H\chi_t$ являются членами трения и их значения определяют частоту колебаний, но не влияют на окончательное распределение полей. В разделе 2.4 приведены результаты с учетом меняющегося со временем параметра Хаббла. Как будет показано, учет этой зависимости не изменяет топологию получившихся решений. Отметим также, что значение H_I указывает естественный масштаб энергии для системы. Здесь и далее все значения указаны в единицах H_I.

Плотность энергии ρ конфигурации полей определяется первой компонентой тензора энергии-импульса $\rho = T^{00}$, где $T^{\mu\nu}$ задаётся выражением

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \partial^\nu \varphi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{2.5}$$

Таким образом, для (2.1) плотность энергии ρ имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=t,x,y} (\varphi_i^2 + \chi_i^2) + \mathcal{V}(\varphi, \chi). \tag{2.6}$$

Чтобы продемонстрировать образование и проследить эволюцию локальных конфигураций типа струн и стенок, необходимо выбрать соответствующее отображение из полевого пространства (φ, χ) в физическое пространство (x, y) в качестве начального условия. Во время космологической инфляции топологически подобные отображения возникают с ненулевой вероятностью из-за квантовых флуктуаций полей. Поэтому, для простоты, выберем начальные условия для (2.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,0) &= \mathcal{R}\cos\Theta + \varphi_1, \quad \varphi_t(x,y,0) = 0; \\ \chi(x,y,0) &= \mathcal{R}\sin\Theta + \chi_1, \quad \chi_t(x,y,0) = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\mathcal{R}(r) = \mathcal{R}_0 \cosh^{-1}\frac{r_0}{r}, \quad \Theta = \theta. \tag{2.8}$$

Это отображение позволяет дискообразному распределению начальных полей покрывать всю физическую плоскость xy. Параметры (φ_1, χ_1) задают центр дискообразного распределения с радиусом R_0. Параметры r и θ являются полярными координатами на плоскости xy.

Естественными граничными условиями являются свободные:

$$\begin{aligned} \varphi_x(\pm\infty, y, t) = 0, \ \ \varphi_y(x, \pm\infty, t) = 0; \\ \chi_x(\pm\infty, y, t) = 0, \ \ \chi_y(x, \pm\infty, t) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

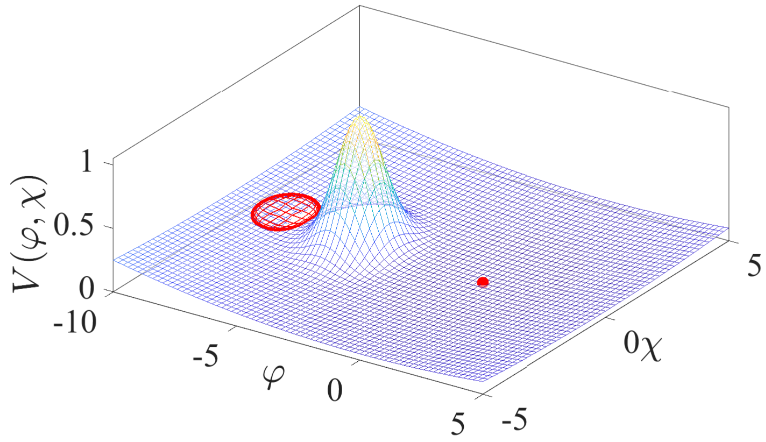
После того, как начальные и граничные условия определены в (2.7)–(2.9), уравнения (2.4) могут быть решены численно с помощью метода матричной факторизации. Алгоритм решения приведён в приложении A.

2.1. ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ СРЕЗОВ, СОДЕРЖАЩИХ ДОМЕННЫЕ СТЕНКИ И СТРУНЫ

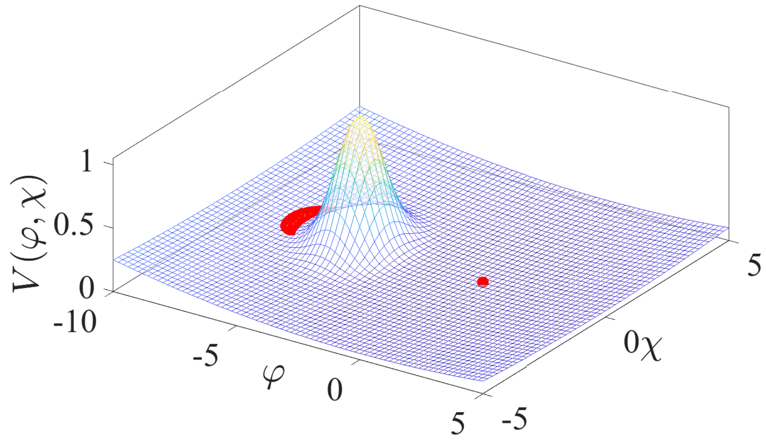
В диссертации представлены результаты для двух случаев, чтобы продемонстрировать основные возможности. В обоих случаях параметры потенциала, определенные в (2.3), были выбраны следующим образом: $m = 0.06$, $\Lambda = 1$, $\lambda = 1$, $\varphi_0 = -5$, $\chi_0 = 0$, а параметры начальных условий (2.7) равны $\mathcal{R}_0 = 1$, $r_0 = 1$, $\chi_1 = 0$.

В первом случае расположение начальных условий определяется параметром $\varphi_1 = -8$. Эволюция полевой конфигурации для этого случая изображена на рис. 2.1. Начальное расположение полей φ и χ близко к седловой точке. Распределение полей стремится к минимуму потенциала, но локальный максимум препятствует этому и расщепляет решение на две траектории. Плотность энергии можно рассчитать с помощью (2.6). Она изображена для конечного состояния на рис. 2.3а. Распределение соответствует доменной стенке в трехмерном пространстве и качественно совпадает с результатами [23; 24] для числа намоток $N = 1$.

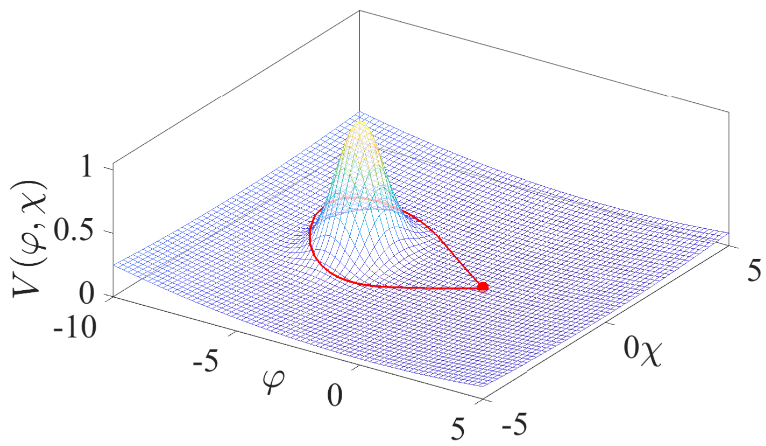
Второй случай отличается от первого только значением параметра, определяющего расположение начальных условий $\varphi_1 = -5$. Параметр подбирается таким образом, чтобы в начальное распределение полей входил пик потенциала. На рис. 2.2 показаны этапы эволюции во втором случае. Распределение полей стремится минимизировать энергию, что вызывает спад полей с пика потенциала. Окончательное распределение плотности энергии показано на рис. 2.3б.



(а)

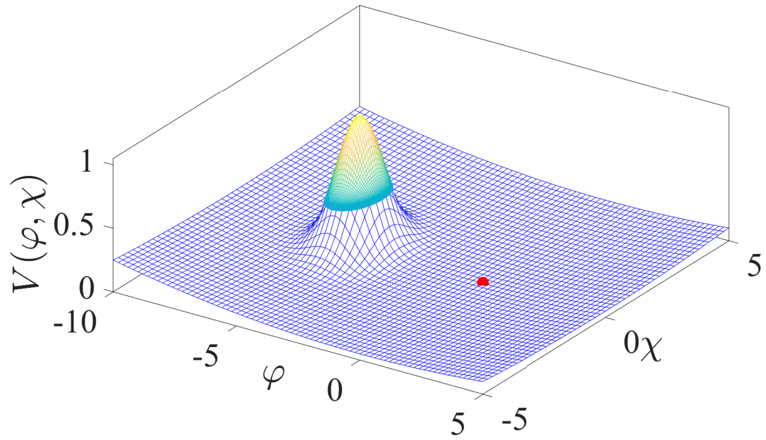


(б)

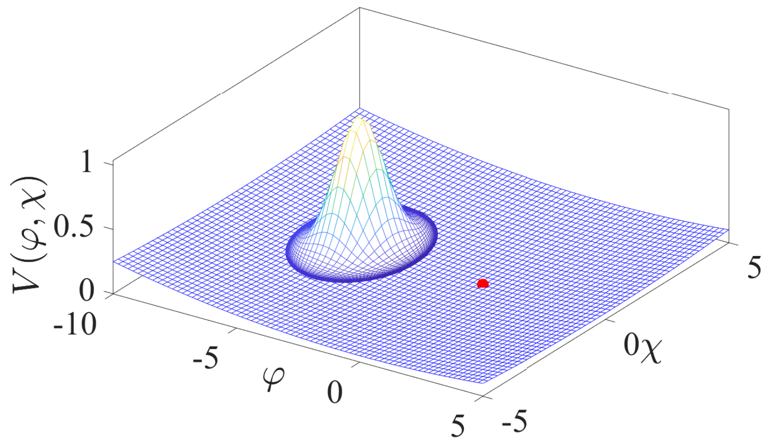


(в)

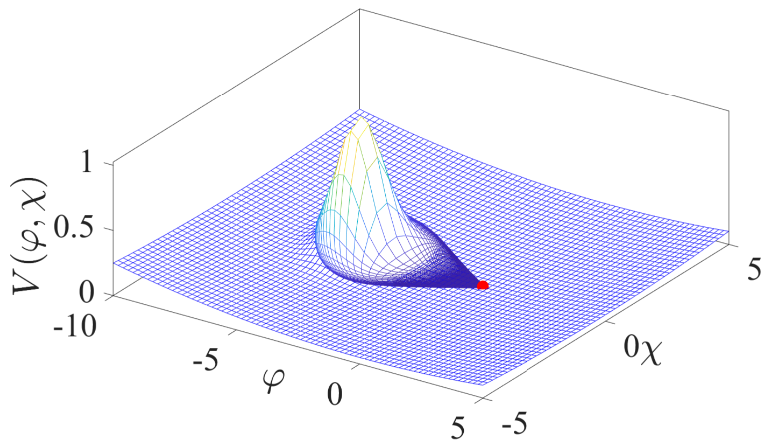
Рисунок 2.1 — Потенциал (2.3) со значениями параметров $m = 0.06$, $\Lambda = 1$, $\lambda = 1$, $\varphi_0 = -5$, $\chi_0 = 0$ и начальные условия (2.7) с $\mathcal{R}_0 = 1$, $r_0 = 1$, $\varphi_1 = -8$, $\chi_1 = 0$



(а)

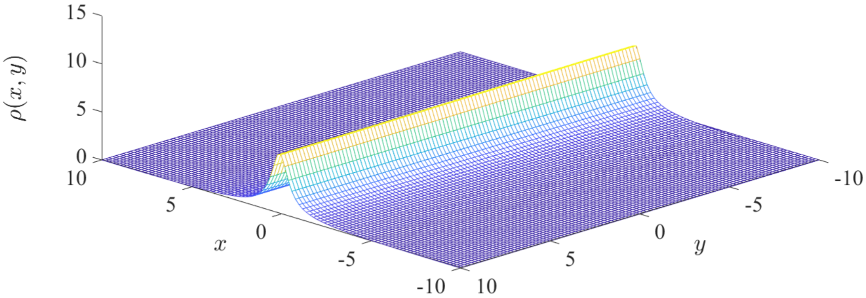


(б)

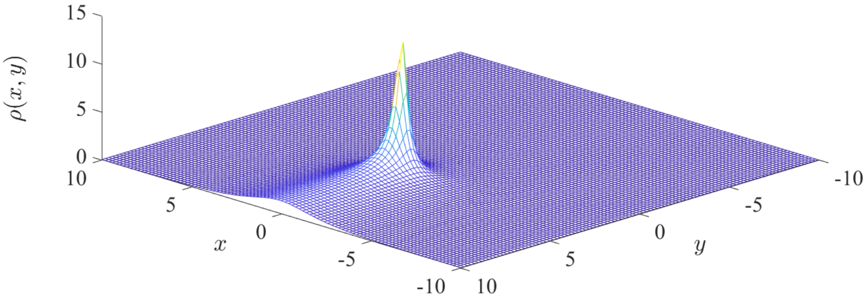


(в)

Рисунок 2.2 — Потенциал (2.3) со значениями параметров $m = 0.06$, $\Lambda = 1$, $\lambda = 1$, $\varphi_0 = -5$, $\chi_0 = 0$ и начальные условия (2.7) с $\mathcal{R}_0 = 1$, $r_0 = 1$, $\varphi_1 = -5$, $\chi_1 = 0$



(а) Доменная стенка образуется в первом случае

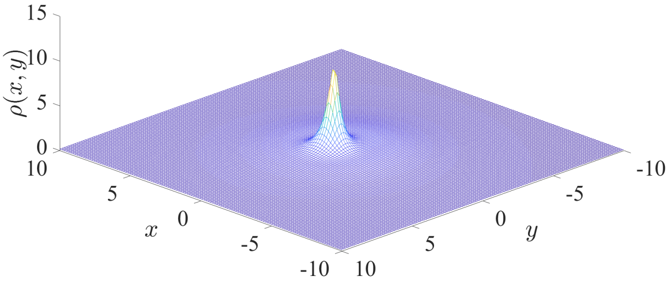


(б) Струна формируется во втором случае

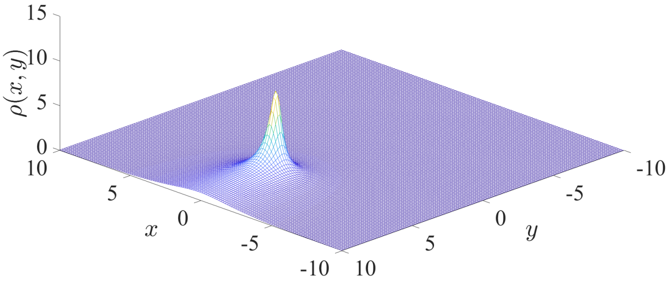
Рисунок 2.3 — Окончательные распределения плотности энергии (а) —для стенки; (б) —для струны

Распределение соответствует струне с образованием гребня в трехмерном пространстве. Гребень появляется из-за наклона потенциала. Появление гребня отражает наличие натяжения, которое стремится привести распределение в минимум потенциала. В результате действия натяжения распределение движется в сторону гребня (см. рис. 2.4).

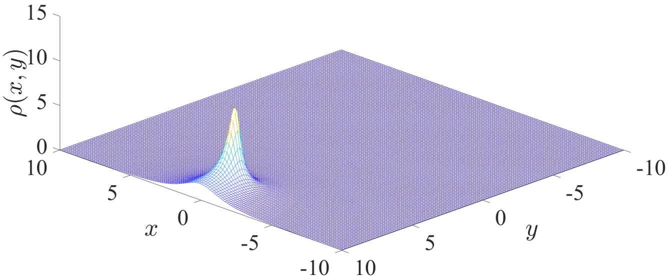
Таким образом, стабильной конфигурацией может быть только доменная стенка. Струна, в свою очередь, имеет гребень в распределении энергии и движется по направлению к нему. Заметим, что при выбранных граничных условиях значения полей на границе выбранной нами физической области невакуумные. Поэтому, выбранные нами двухмерные срезы не охватывают трехмерную конфигурацию целиком, а показывают лишь ее часть.



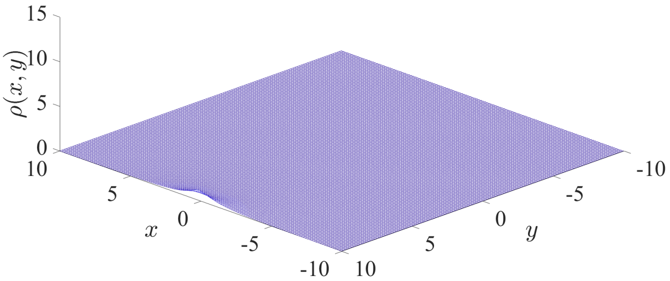
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 2.4 — Движение струны в сторону гребня. Между показанными картинками проходит промежуток времени $\Delta t = 15$ (в хаббловских единицах)

2.2. ЭВОЛЮЦИЯ ДВУХМЕРНЫХ СРЕЗОВ ЦЕЛЬНЫХ СТРУКТУР

Для того, чтобы получить срез цельной трёхмерной структуры, то есть такой срез, который охватывает всю конфигурацию, окруженную вакуумом, нужно в рассмотрении положить граничные условия вакуумными. Кроме того, начальное распределение должно приводить в результате своей эволюции к появлению солитонных решений. Пример такой конфигурации показан на рис. 2.5. Образование подобной конфигурации можно представить следующим образом: на определенном этапе инфляции изначально имевшееся в области значение поля $\Phi_{in} = (\varphi_{in}, \chi_{in})$ профлуктуировало в двух соседних областях в разные значения Φ_1 и Φ_2. После окончания инфляции начинает доминировать классическая динамика полей, которая рассматривается в данной работе.

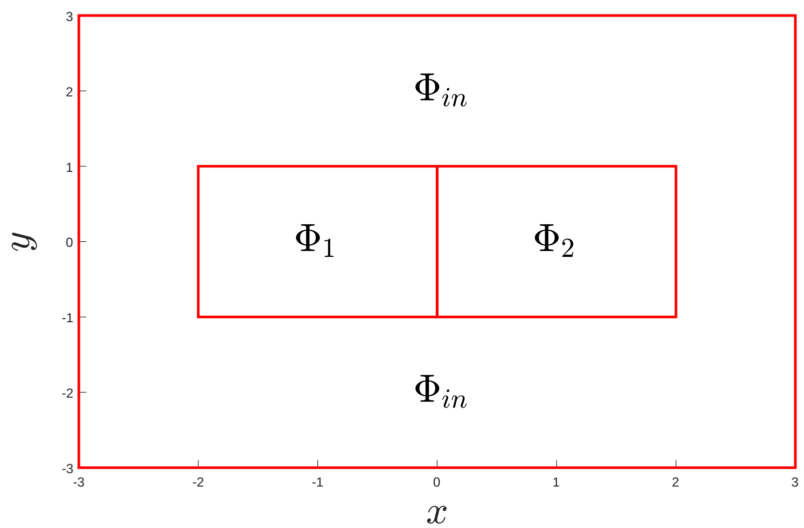


Рисунок 2.5 — Схема полевой конфигурации в физическом пространстве необходимой для изучения полного двухмерного среза

Так как предполагается образование начального распределения полей на этапе инфляции, следовательно, такие конфигурации будут образовываться во Вселенной с ненулевой вероятностью. Вычисление вероятности образования таких начальных условий требуют исследования квантовых флуктуаций на инфляции, что выходит за рамки настоящей работы. Начальное распределение в зависимости от своего расположения на потенциале может приводить к появлению либо трёхмерных солитонных структур типа «пузырей», либо «блинов», либо к скатыванию всей конфигурации в вакуум в тривиальном случае.

Чтобы удовлетворить условиям, необходимым для образования пузырей и блинов, нужно, чтобы конфигурация, изображённая на рис. 2.5, отображалась в пространство полей определенными способами. Отображение, необходимое для получения пузыря, показано на рис. 2.6. Заметим, что вся конфигурация отделена от минимума локальным максимумом и, таким образом, должна эволюционировать аналогично показанной на рис. 2.1.

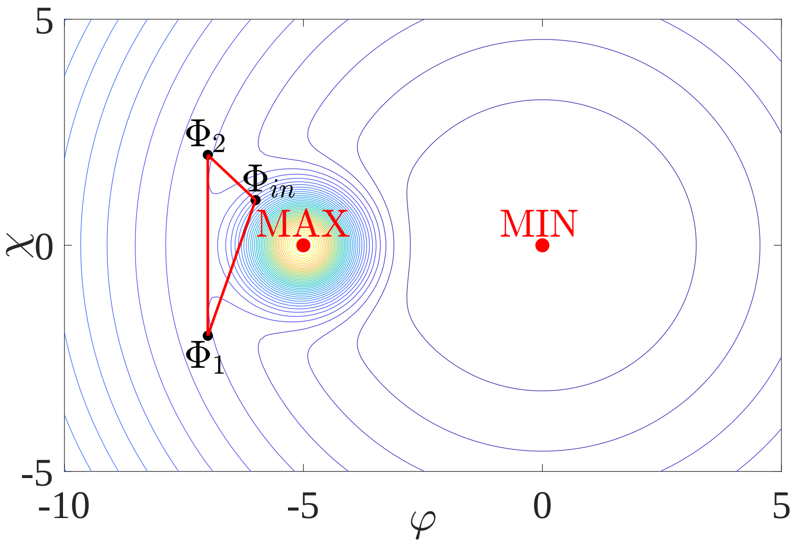


Рисунок 2.6 — Расположение областей $\Phi_{in} = [-6, 1]$, $\Phi_1 = [-7, -2]$ и $\Phi_2 = [-7, 2]$ на потенциале, приводящее к образованию пузыря

Эволюция такой конфигураций показана на рис. 2.8. Из рисунка видно, что образовавшийся пузырь вначале стягивается, а затем схлопывается.

Отображение, необходимое для получения блина, показано на рис. 2.7. На рисунке видно, что конфигурация должна лежать на максимуме, что следует из требования образования струн для получения блина.

Эволюция блина представлена на рис. 2.9. Из рисунка видно, что появляются две струны, соединенные доменной стенкой; далее струны стягиваются друг к другу вдоль стенки. Это происходит из-за стремления блина к минимизации энергии поверхностного натяжения. Итогом эволюции является схлопывание блина.

При рассмотрении эволюции блина следует учитывать, что рассматривается эволюция двумерного среза, а не цельной структуры. Поэтому существование отдельных незамкнутых струн с гребнями становится топологически невозможным. По сути, мы имеем дело с одной струной, которая пересекает

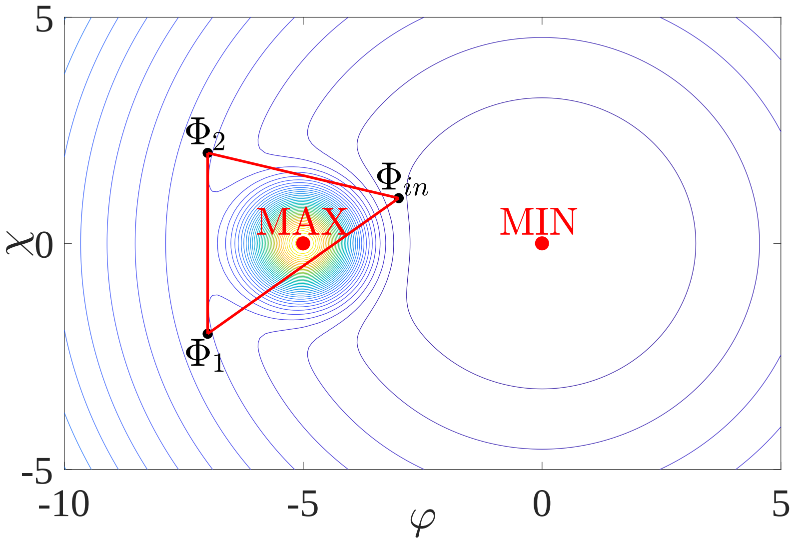
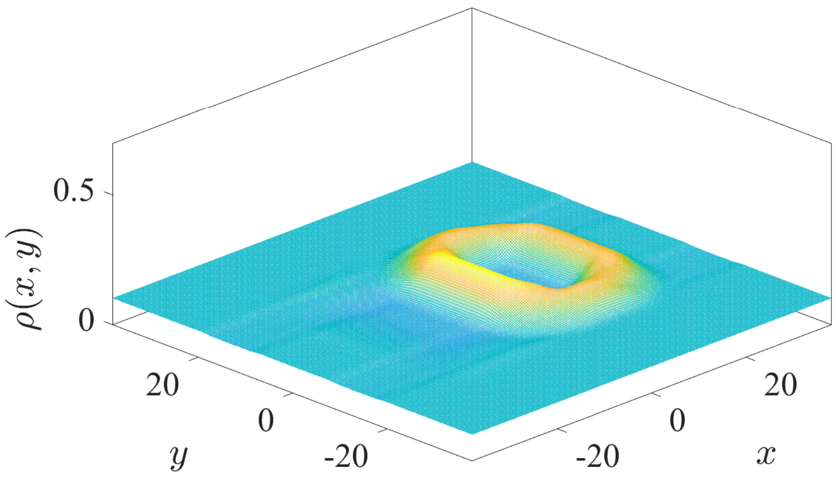


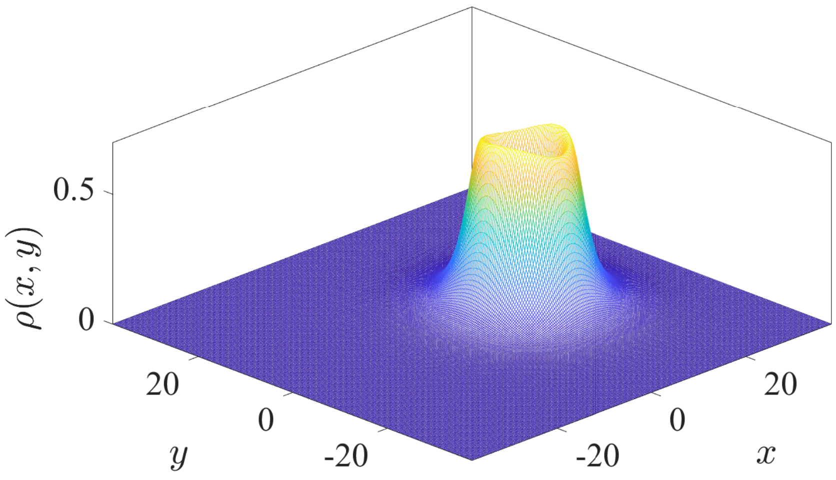
Рисунок 2.7 — Расположение областей $\Phi_{in} = [-3, 1]$, $\Phi_1 = [-7, -2]$ и $\Phi_2 = [-7, 2]$ на потенциале, приводящее к образованию блина

рассматриваемый срез два раза, что также подтверждается стремлением к стягиванию конфигурации.

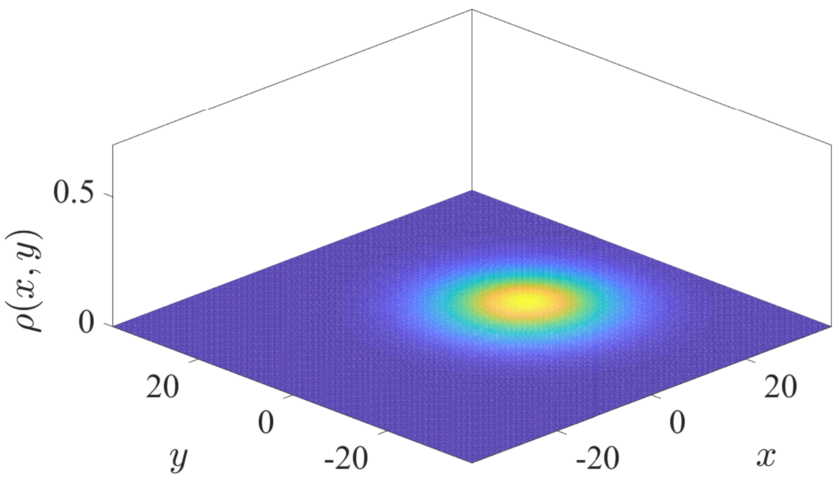
Отметим, что блин топологически идентичен пузырю с дыркой. Такая конфигурация была бы невозможна в случае, когда стенка образуется между разными вакуумами. То есть образование блина возможно только в случае если его доменная стенка разделяет две области с одним и тем же вакуумом.



(а)

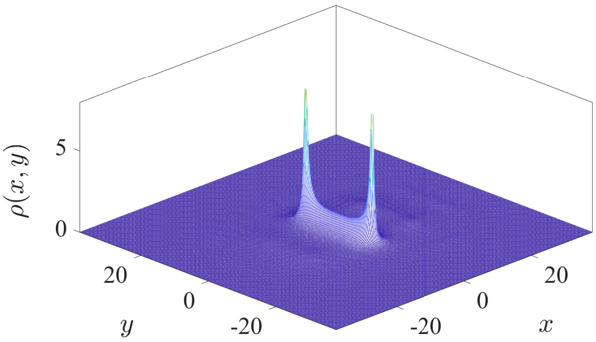


(б)

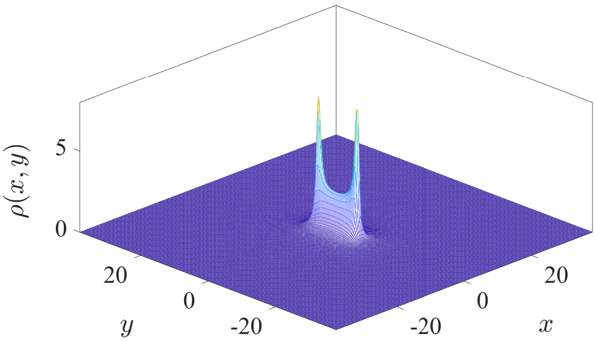


(в)

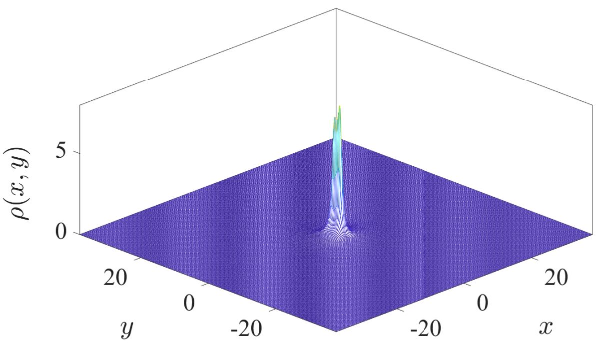
Рисунок 2.8 — Эволюция конфигурации типа пузыря



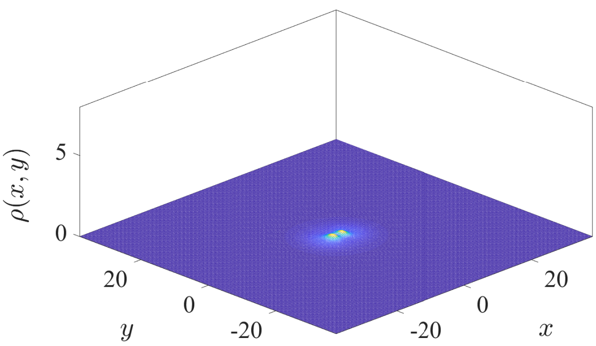
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 2.9 — Эволюция конфигурации типа блина

2.3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОБРАЗОВАНИЯ ДОМЕННЫХ СТЕНОК И СТРУН

Оценим вероятность образования этих структур при флуктуациях полей на стадии инфляции. Как объяснялось выше, для тщательного анализа необходимо рассматривать цельные 3-мерные структуры, в то время как рассматриваемые в данной работе являются их локальными 2-мерными срезами. Однако качественная оценка помогает понять, являются ли конструкции со струнами более вероятными, чем конструкции со стенами. Тщательный анализ всех трехмерных конфигураций — это задача для будущих исследований.

Чтобы качественно оценить относительную вероятность образования доменных стенок $P_{\rm dw}$ и струн $P_{\rm s}$, предположим, что скалярные поля имеют некоторые начальные значения $\Phi_{\rm in} \equiv (\varphi_{\rm in}, \chi_{\rm in})$ в начале инфляционного процесса (в момент t), см. рис. 2.10. В момент $t + \delta t$ квантовые флуктуации приводят к значениям полей Φ_1 и Φ_2 в различных причинно-связанных пространственных областях. Если значение Φ_1 близко к пику потенциала (внутри красной области на рис. 2.10), дальнейшие флуктуации могут (с повышенной вероятностью) привести к появлению начального состояния (как на рис. 2.2), ведущего к формированию струн. Если значение Φ_2 близко к седловой точке (зеленая область на рис. 2.10), возрастает вероятность формирования начального условия, необходимого для появления стен (рис. 2.1).

Простая геометрическая оценка отношения $\varkappa = P_{\rm dw}/P_{\rm s}$ может быть сделана следующим образом. Отношение между площадью зеленой области на рис. 2.10, где появляются доменные стенки, и площадью красной области, где появляются струны, показывает относительную вероятность образования того или иного типа солитонов. Обе площади найдены численно и схематически проиллюстрированы на рис. 2.10, для рассматриваемых потенциальных параметров соотношение дает множитель $\varkappa \sim 10^3$. Все остальные положения Φ_i приводят к вакуумному решению во всей xy-плоскости. Здесь мы пренебрегаем тем фактом, что флуктуации Φ, ведущие к различным точкам потенциала Φ_i, происходят с разной вероятностью [28]. Более точная оценка должна учитывать положение начальной точки $\Phi_{\rm in}$.

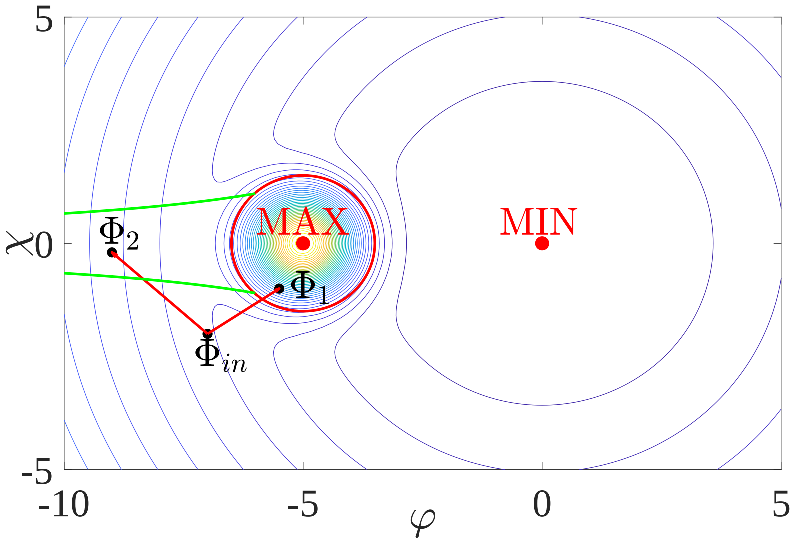


Рисунок 2.10 — Потенциал скалярных полей (2.1). Красные и зеленые области показывают области, которые могут быть достигнуты с помощью квантовых флуктуаций с образованием струн и доменных стенок, соответственно. Их площади отличаются на множитель $\varkappa \sim 10^3$. Если флуктуации приводят к значению поля Φ_i, находящемуся вне областей, неизбежно возникает вакуумное решение. Схематично показано начальное возможное значение поля Φ_{in} и последующие $\Phi_{1,2}$, возникшие из-за флуктуаций

Таким образом, вероятность образования струн P_{s} подавлена фактором $\varkappa \sim 10^3$ по сравнению с вероятностью образования доменных стенок P_{dw} для рассматриваемого потенциала. Отметим, что $\varkappa$ не зависит от радиуса диска начального распределения $\mathcal{R}_0$ и параметра Λ, определяющего высоту локального максимума, но существенно зависит от масс полей m. Однако для любого разумного набора параметров $\varkappa > 1$ и производство струн подавлено по сравнению с доменными стенками.

2.4. УЧЕТ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРА ХАББЛА

Как указывалось ранее, в расчетах мы пренебрегали изменением параметра Хаббла во времени. В данном разделе учтём эту зависимость и оценим её влияние на эволюцию системы. Зависимость параметра Хаббла от времени в рамках инфляционной модели Старобинского [29], данная модель выбрана из-за наилучшего совпадения ее предсказаний с наблюдательными данными [30].

Потенциал данной модели имеет вид

$$V = V_0 \left(1 - \exp^{-\sqrt{2/3}\sigma}\right)^2, \tag{2.10}$$

где V_0 — параметр, фиксируемый из наблюдательных данных. Поле σ —инфлатон данной модели. Зависимость параметра Хаббла от времени в этой модели имеет следующий вид, представленный на рис. 2.11, [31].

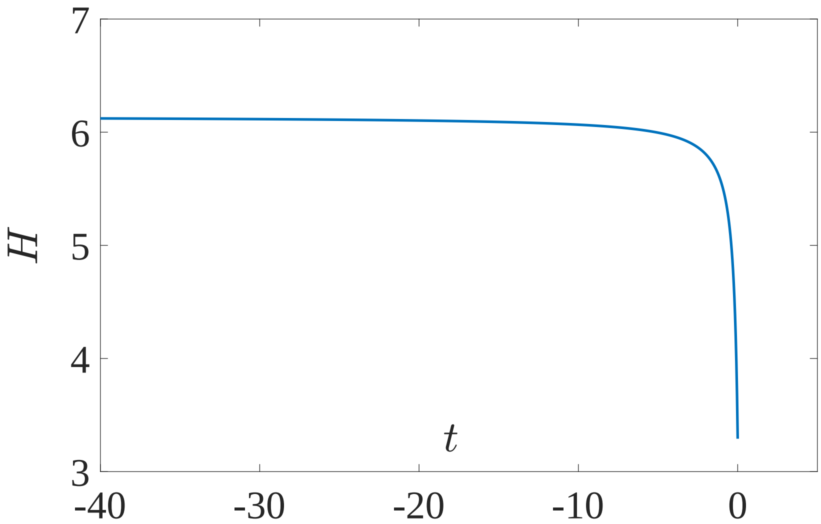


Рисунок 2.11 — Зависимость параметра Хаббла от времени на стадии инфляции в модели Старобинского. Момент времени $t = 0$ соответствует концу инфляции. Заметим, что зависимость параметра Хаббла от времени может изменяться в некоторых пределах, допустимых наблюдательными данными [30]

Анализ показал, что учет временной зависимости параметра Хаббла не влияет на топологию солитонных конфигураций, приведенных в предыдущих разделах. Таким образом, качественные изменения отсутствуют. Однако увеличенное значение H (в единицах H_I) на ранних e-фолдах приводит, как и ожидалось, к более медленной эволюции решений. Также стоит отметить, что на поздних e-фолдах значение параметра Хаббла становится сильно меньше H_I, что приводит к усилению колебаний системы.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено образование струн и доменных стенок в результате эволюции полевой конфигурации в типичном для ряда инфляционных моделей потенциале, имеющем седловую точку и локальный максимум. В результате, получено два солитонных образования, а также рассмотрена эволюция двумерного среза цельной конфигурации, в которой такие солитоны образуются. Качественный анализ цельной трехмерной структуры показал, что она может представлять из себя либо солитонное образование типа «пузыря», либо «блина». Также было показано, что космические струноподобные структуры в рассматриваемой модели не могут быть получены отдельно от доменной стенки, в трёхмерном пространстве такая конфигурация является космическим «блином». Также в рассмотрение была включена зависимость параметра Хаббла от времени, однако к качественным изменениям в эволюции структур это не привело.

Также была качественно рассмотрена вероятность появления доменных стенок и струн в рассматриваемой модели. Показано, что вероятность появления струн подавлена относительно вероятности появления стенок.

Развитием этой работы может стать более аккуратный расчёт вероятности появления в ранней Вселенной таких солитонных конфигураций. Для этого необходимо получить вероятность появления начальной конфигурации, соответствующей требованиям для образования цельных структур, приведенных в разделе 2.2, в результате квантовых флуктуаций на этапе инфляции. Однако это выходит за рамки настоящей диссертации и является целью дальнейших исследований.

Приложение А
Метод матричной факторизации

Метод прогонки очень эффективно используется для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), имеющих трехдиагональную матрицу. Такой вид матриц часто возникает в случае разностной аппроксимации уравнений в частных производных с одной пространственной координатой. Однако в случае большего количества координат матрица системы уже не является трехдиагональной, и обычный метод прогонки уже не подходит. В этом случае необходимо пользоваться более общим методом матричной прогонки (факторизации). В данной работе разностная аппроксимация системы уравнений (2.4) приводит к СЛАУ, подходящей для решения методом матричной факторизации. В этом приложении показаны основные этапы вывода уравнений для данного метода.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_i\mathbf{u}_{i-1} - \mathbf{C}_i\mathbf{u}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_{i+1} = -\mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \\ \mathbf{C}_0\mathbf{u}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_0, \\ -\mathbf{A}_N\mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{C}_N\mathbf{u}_N = \mathbf{F}_N,\end{gathered} \tag{А.1}$$

где $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{F}_i$ — векторы размерности M_i, $\mathbf{A}_i$ — матрица размерности $M_i \times M_{i-1}$, $\mathbf{B}_i$ — матрица размерности $M_i \times M_{i+1}$, $\mathbf{C}_i$ — матрица размерности $M_i \times M_i$.

Решение задачи (А.1) ищем в виде:

$$\mathbf{u}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} + \boldsymbol{\beta}_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, ..., 1, 0, \tag{А.2}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_i$ — матрица размерности $M_{i-1} \times M_i$, $\boldsymbol{\beta}_i$ — вектор размерности M_{i-1}.

Из (А.1) и (А.2) получаем

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} = (\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\alpha}_i)^{-1}\boldsymbol{\beta}_i, \\ \boldsymbol{\beta}_{i+1} = (\boldsymbol{C}_i + \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\alpha}_i)^{-1}(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\beta}_i).\end{cases} \tag{А.3}$$

Далее при помощи граничных условий и (A.2) находятся значения $\boldsymbol{u}$.

Метод матричной факторизации устойчив при выполнении условий:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{C}_0^{-1}\boldsymbol{B}_0\| \le 1; \quad \|\boldsymbol{C}_N^{-1}\boldsymbol{A}_N\| \le 1; \\ \|\boldsymbol{C}_0^{-1}\boldsymbol{B}_i\| \le 1; \quad \|\boldsymbol{C}_i^{-1}\boldsymbol{A}_i\| \le 1. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Здесь индекс $i = 1, 2, ..., N-1$.

Проиллюстрируем использование метода для задачи (2.4). Рассмотрим разностную аппроксимацию вторых частных производных в первом уравнении

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &\approx \frac{\varphi_{j,k}^{i} - 2\varphi_{j,k}^{i-1} + \varphi_{j,k}^{i-2}}{2\Delta t}, \\ \varphi_{xx} &\approx \frac{\varphi_{j+1,k}^{i} - 2\varphi_{j,k}^{i} + \varphi_{j-1,k}^{i}}{2\Delta t}, \\ \varphi_{yy} &\approx \frac{\varphi_{j,k+1}^{i} - 2\varphi_{j,k}^{i} + \varphi_{j,k-1}^{i}}{2\Delta t}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

где i — номер временного слоя, j и k — номера узлов сетки по x и y соответственно. Δt, Δx, Δy — шаги по переменным t, x, y, соответственно.

Из первого выражения в (A.5) можно оставить только первый член, убрав остальные в правую часть. Теперь, считая, что j — номер вектора $\mathbf{u}$ в (A.1), а k — номер элемента каждого вектора $\mathbf{u}$, приходим к системе векторных уравнений, идентичной (A.1).

Список используемых источников

1. Natural inflation: Particle physics models, power-law spectra for large-scale structure, and constraints from the Cosmic Background Explorer / F. C. Adams [et al.] // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 47, no. 2. — P. 426–455. — arXiv: 9207245 [hep-ph].
2. *Linde A.* Hybrid inflation // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49, no. 2. — P. 748–754. — arXiv: 9307002 [astro-ph].
3. *Liddle A. R.*, *Mazumdar A.*, *Schunck F. E.* Assisted inflation // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol. 58, no. 6. — P. 061301. — arXiv: 9804177 [astro-ph].
4. *Kim J. E.*, *Nilles H. P.*, *Peloso M.* Completing natural inflation // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2005. — Vol. 2005, no. 1. — P. 005. — arXiv: 0409138 [hep-ph].
5. *Battefeld D.*, *Battefeld T.* A smooth landscape: ending saddle point inflation requires features to be shallow // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2013. — Vol. 2013, no. 7. — P. 038. — arXiv: 1304.0461 [hep-th].
6. *Peloso M.*, *Unal C.* Trajectories with suppressed tensor-to-scalar ratio in Aligned Natural Inflation // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2015. — Vol. 2015, no. 6. — P. 040. — arXiv: 1504.02784 [astro-ph.CO].
7. *Evans J. L.*, *Gherghetta T.*, *Peloso M.* Affleck-Dine sneutrino inflation // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 021303. — arXiv: 1501.06560 [hep-ph].
8. *Ketov S. V.* Multi-Field versus Single-Field in the Supergravity Models of Inflation and Primordial Black Holes // Universe. — 2021. — Vol. 7, no. 5. — P. 115.
9. *Susskind L.* The Anthropic Landscape of String Theory // The Davis Meeting On Cosmic Inflation. — 2003. — P. 26. — arXiv: 0302219 [hep-th].
10. *Basu R.*, *Guth A. H.*, *Vilenkin A.* Quantum creation of topological defects during inflation // Phys. Rev. D. — 1991. — Vol. 44, no. 2. — P. 340–351.

11. *Garriga J., Vilenkin A., Zhang J.* Black holes and the multiverse // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2016. — Vol. 2016, no. 2. — P. 064. — arXiv: 1512.01819 [hep-th].

12. *Deng H., Garriga J., Vilenkin A.* Primordial black hole and wormhole formation by domain walls // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2017. — Vol. 2017, no. 4. — P. 050. — arXiv: 1612.03753 [gr-qc].

13. *Deng H., Vilenkin A.* Primordial black hole formation by vacuum bubbles // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2017. — Vol. 2017, no. 12. — P. 044. — arXiv: 1710.02865 [gr-qc].

14. *Vilenkin A., Shellard E.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000.

15. *Garriga J., Vilenkin A.* Black holes from nucleating strings // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 47, no. 8. — P. 3265–3274. — arXiv: 9208212 [hep-ph].

16. *Hansen R. N., Christensen M., Larsen A. L.* Cosmic String Loops Collapsing to Black Holes // Int. J. Mod. Phys. A. — 2000. — Vol. 15, no. 28. — P. 4433–4445. — arXiv: 9902048 [gr-qc].

17. *Hiramatsu T., Kawasaki M., Saikawa K.* Gravitational waves from collapsing domain walls // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2010. — Vol. 2010, no. 5. — P. 032. — arXiv: 1002.1555 [astro-ph.CO].

18. *Vilenkin A., Levin Y., Gruzinov A.* Cosmic strings and primordial black holes // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2018. — Vol. 2018, no. 11. — P. 008. — arXiv: 1808.00670 [astro-ph.CO].

19. *Helfer T., Aurrekoetxea J. C., Lim E. A.* Cosmic string loop collapse in full general relativity // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 99, no. 10. — P. 104028. — arXiv: 1808.06678 [gr-qc].

20. *Liu J., Guo Z.-K., Cai R.-G.* Primordial black holes from cosmic domain walls // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 101, no. 2. — P. 023513. — arXiv: 1908.02662 [astro-ph.CO].

21. *Rubin S. G., Sakharov A. S., Khlopov M. Y.* The Formation of Primary Galactic Nuclei during Phase Transitions in the Early Universe // J. Exp. Theor. Phys. — 2001. — Vol. 92, no. 6. — P. 921–929. — arXiv: 0106187 [hep-ph].
22. Clusters of Primordial Black Holes / K. M. Belotsky [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].
23. *Gani V. A., Kirillov A. A., Rubin S. G.* Transitions between topologically non-trivial configurations // J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — Vol. 934. — P. 012046. — arXiv: 1711.07700 [hep-th].
24. *Gani V. A., Kirillov A. A., Rubin S. G.* Classical transitions with the topological number changing in the early Universe // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2018. — Vol. 2018, no. 4. — P. 042. — arXiv: 1704.03688 [hep-th].
25. *Kirillov A. A., Murygin B. S.* Domain walls and strings formation in the early Universe // Bled Workshop in Physics. — 2020. — Vol. 21. — P. 128–133. — arXiv: 2011.07041 [hep-th].
26. *Kirillov A. A., Murygin B. S.* The mechanism of domain walls and strings formation in the early Universe // J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — Vol. 1690.
27. *Bronnikov K. A., Rubin S. G.* Abilities of multidimensional gravity // Grav. Cosmol. — 2007. — Vol. 13. — P. 253–258. — arXiv: 0712.0888 [gr-qc].
28. *Linde A. D.* Scalar field fluctuations in the expanding universe and the new inflationary universe scenario // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 116, no. 5. — P. 335–339.
29. *Vilenkin A.* Classical and quantum cosmology of the Starobinsky inflationary model // Phys. Rev. D. — 1985. — Vol. 32, issue 10. — P. 2511–2521.
30. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation / Planck Collaboration [et al.] // Astron. & Astrophys. — 2020. — Vol. 641. — A10. — arXiv: 1807.06211 [astro-ph.CO].
31. *German G.* Evolution of the universe during the inflationary epoch // arXiv e-prints. — 2020. — arXiv: 2007.13165 [gr-qc].