

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 530.1, 539.1.01

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫПОЛНИМОСТИ ПРИНЦИПА
СООТВЕТСТВИЯ В КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ
РАСЧЕТАХ СЕЧЕНИЯ РЕКОМБИНАЦИИ**

Студент _____ Д. С. Калашников

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., в.н.с. _____ К. М. Белоцкий

Москва 2021

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫПОЛНИМОСТИ ПРИНЦИПА
СООТВЕТСТВИЯ В КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ
РАСЧЕТАХ СЕЧЕНИЯ РЕКОМБИНАЦИИ**

Студент _____ Д. С. Калашников

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., в.н.с. _____ К. М. Белоцкий

Рецензент,
к.ф.-м.н., доц. _____ В. А. Гани

Секретарь ГЭК,
к.ф.-м.н., доц. _____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,
д.ф.-м.н., проф. _____ М. Д. Скорохватов

Содержание

Введение	3
1 Численный анализ в характерной области.	6
2 Классическая формула	8
2.1 Вывод в статье Елютина	8
2.2 Вывод, основанный на втором томе Ландау-Лифшица	9
3 Формула Крамерса	10
3.1 Вывод в работе Крамерса.	10
3.2 Получение сечений на основе третьего тома Ландау и книги Мессии	11
3.3 Вывод общей формулы рекомбинации в статье Мильштейна	13
3.4 Определение полуклассического приближения в книге Бете-Солпитера	13
4 Расчет сечения тормозного излучения	15
5 Заключение.	16
Приложение А Расчет однофотонной и двухфотонной амплитуды тормозного излучения	17
Список использованных источников	20

Введение

В настоящей работе проводилось исследование сечения рекомбинации электронов в поле кулоновского потенциала притяжения ядра. В дипольном приближении для расчета сечения рекомбинации используются две формулы: основанная на классической физике (1) и формула Крамерса (2).

$$\sigma_{c1} = (4\pi)^{2/5} \pi \frac{\alpha^2}{\mu^2} \frac{1}{v^{14/5}}, \quad (1)$$

$$\sigma_q = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^3 \ln(v^{-1})}{\mu^2 v^2}. \quad (2)$$

Обе формулы имеют похожую зависимость от скорости: между $1/v^2$ и $1/v^3$, но существенно различаются в области низких скоростей. Также характерным является различная зависимость формул от постоянной тонкой структуры. Необходимо четко определить пределы применимости данных формул, а также определить, как формула Крамерса переходит в классический случай, исходя из принципа соответствия.

В текущей работе под рекомбинацией подразумевается процесс перехода свободной частицы в связанное состояние. В классической задаче связанным состоянием считается момент, когда полная энергия частицы в поле ядра становится меньше нуля. В квантовом случае, рекомбинация происходит при захвате электрона из свободного состояния на энергетический уровень атома водорода.

Сечение рекомбинации в космологии и физике плазмы

Процесс рекомбинации играет важную роль в космологии и физике плазмы. Скорость рекомбинации напрямую влияет на количество скрытой массы во Вселенной [1–3]. Это делает актуальным вопрос о том, какая формула для рекомбинации является верной при низких энергиях.

В работах по космологии часто фигурирует формула Крамерса или ее производные. В работах [4; 5] исследуется рекомбинация с массивным переносчиком и показан переход получаемых сечений к формуле Крамерса при устремлении массы переносчика к нулю.

В работе [6] приводится оценка применимости классической формулы исходя из ограничения на классическое действие.

В космологии формула Крамерса активно используются для оценки количества скрытой массы. Классическая формула почти не встречается в работах.

В физике плазмы рекомбинация – это захват ионами свободных электронов. Отличительной особенностью от космологии является ограничение наличие в плазме максимального уровня, на который возможна рекомбинация.

Моделирование поведения в плазме для тяжелых ядер используется как в прикладных целях, для моделирования ситуаций в токамака [7], так и в теории [8].

Были приняты попытки исследовать расчёт сечения рекомбинации на основе обратного ему процесса фотоионизации. В работе [9] был рассмотрен вывод сечения фотоионизации и сравнения его с сечением рекомбинации. В работе [9] были рассмотрены методы получения сечения фотоионизации в различных приближениях. Сечение фотоионизации отличается от полуклассического сечения Крамерса лишь на множитель, в соответствии с соотношением детального баланса. Связи с классической формулой найдено не было.

Принцип соответствия.

Принцип соответствия – это фундаментальный принцип лежащий в построении любой современной научной теории. Он заключается в следующем: любая новая научная теория, должна включать старую теорию и ее результаты, как частный случай. При условии, что эти результаты были корректны и соответствовали получаемым экспериментальным данным.

Принцип соответствия опирается на общую логику построения теории, поэтому может использоваться как сильный инструмент в любой научной теории. Примером использования принципа соответствия является переход формул для преобразования координат и времени при малых скоростях к формулам преобразования Галилея.

В данной работе мы рассматриваем принцип соответствия между квантовым и классическим описанием сечения рекомбинации.

1 Численный анализ в характерной области.

Существует область низких скоростей, где могут быть применимы обе формулы. На рисунке 1.1 мы видим эту характерную область в логарифмическом масштабе для двух разных по заряду водородоподобных атомов. Формулы не сходятся функционально, а также отличаются на несколько порядков 1.2.

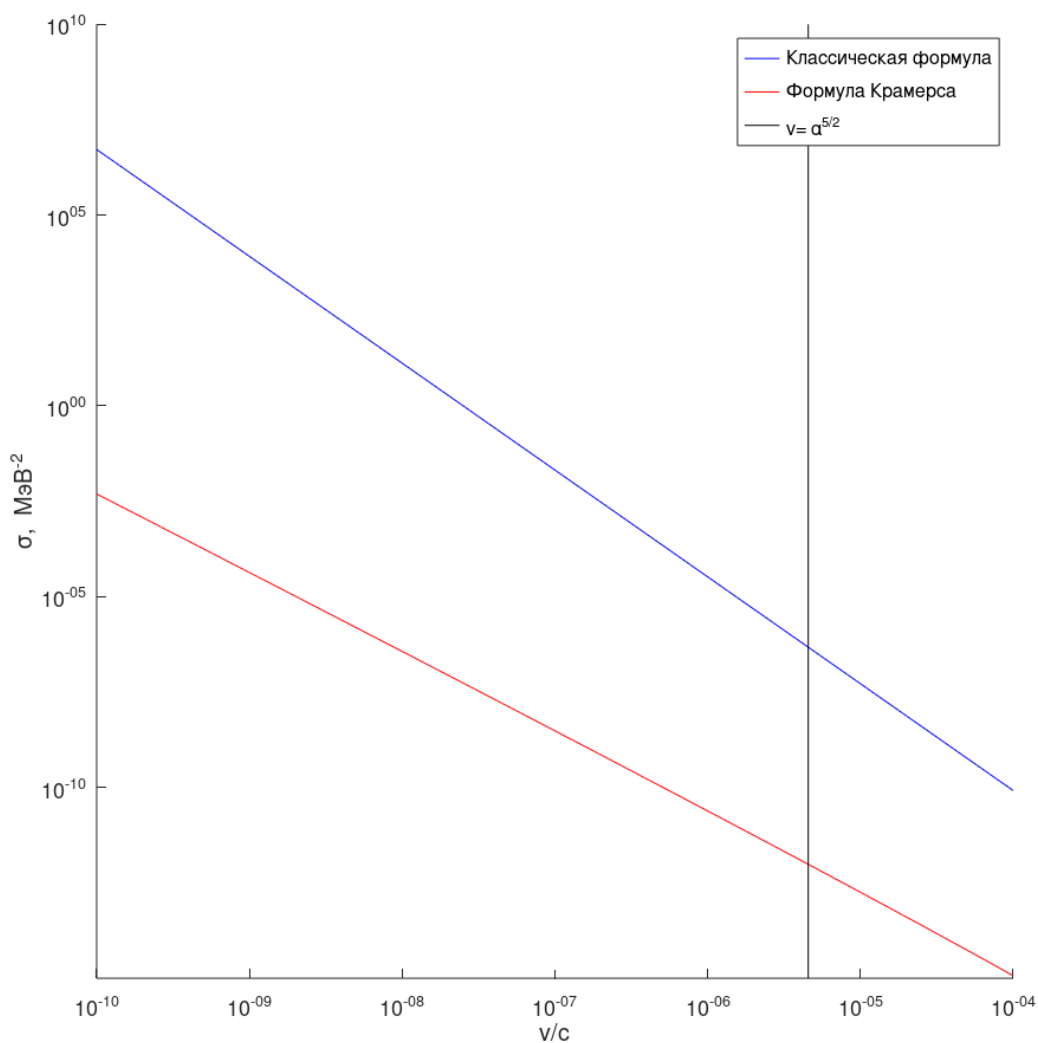


Рисунок 1.1 – График зависимости сечения рекомбинации от начальной скорости электрона.

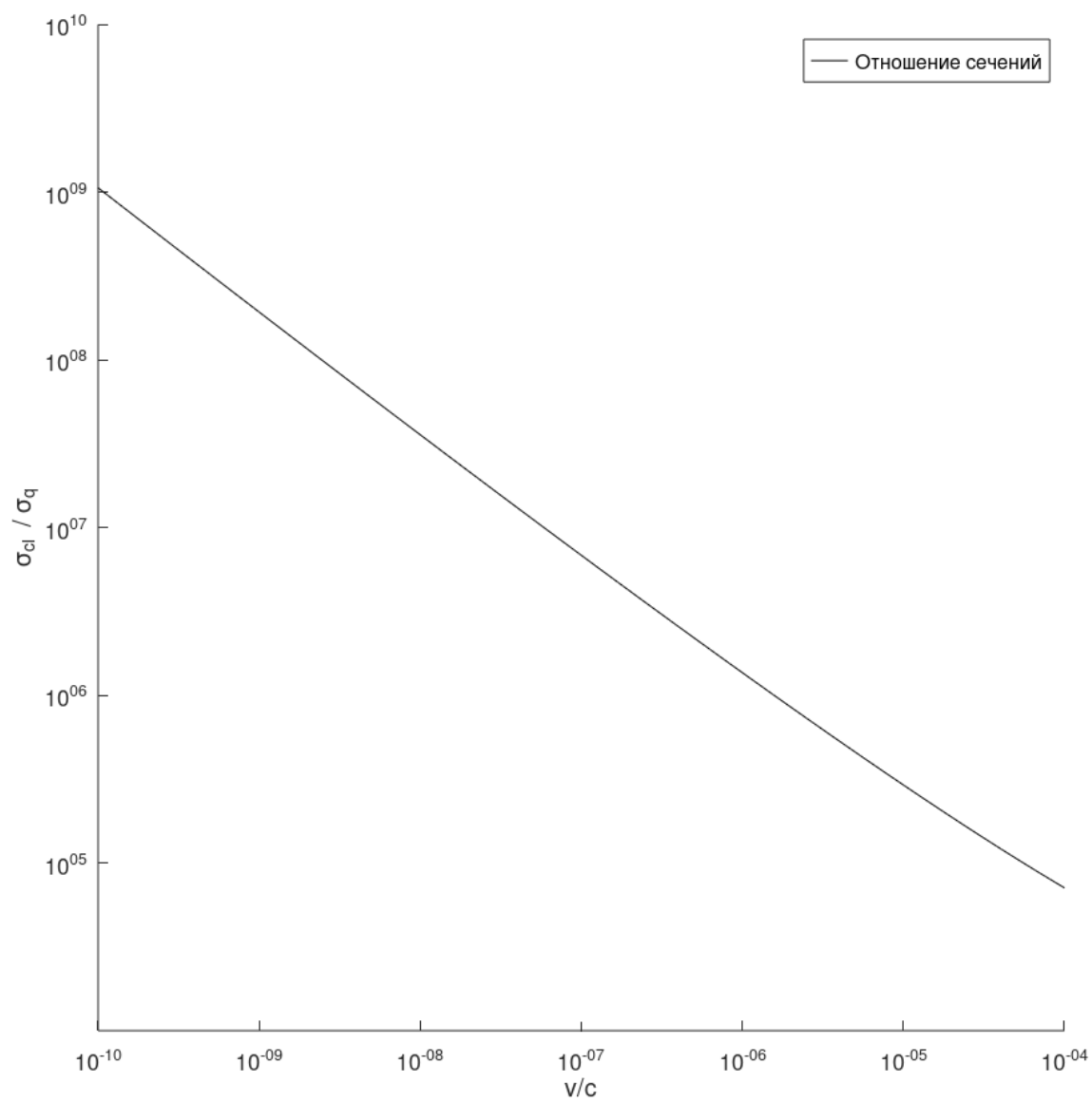


Рисунок 1.2 – Отношение классического и квантового сечений от начальной скорости электрона.

2 Классическая формула

2.1 Вывод в статье Елютина

Был рассмотрен вывод классического сечения рекомбинации, произведенный в работе [10].

В выводе активно используется понятие дипольного излучения: в данной модели условием падения является переход кинетической энергии налетающей частицы в дипольное излучение за время ее движения. Для дипольного излучения использовалась формула Лармора (3):

$$I = \frac{e^2}{6\pi c^3} (\ddot{r})^2. \quad (3)$$

Это представление применимо при характерном размере системы много меньше длины излучаемой волны и скорости много меньшей скорости света:

1. $\lambda \gg r$,
2. $v \ll c$.

Иначе это условие можно охарактеризовать так: излучаемый свет может быть рассмотрен как плоская волна и взаимодействие распространяется с бесконечной скоростью.

Также при вычислении интеграла (4), соответствующего потере энергии на излучение, было произведено пренебрежение изменением траектории частицы от параболической.

$$E_- = -\beta^2 \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{r^4(t)}. \quad (4)$$

Условие на скорость выполняется как для классического, так и для квантового сечения рекомбинации, скорость налета частиц много меньше скорости света. По этому условию классическая формула сечения рекомбинации будет применима тогда же, когда и формула для квантового приближения. Из данных выкладок можно сделать вывод: применимость клас-

сической формулы (1) будет зависеть от характерного размера системы зарядов, а также от длины волны излучаемого света.

2.2 Вывод, основанный на втором томе Ландау-Лифшица

Иначе можно получить формулу (1) используя выкладки в [11]. При столкновении двух заряженных частиц, потерянная энергия равна:

$$\Delta E = \frac{\mu v_0^5}{3c^3 Z e^2} \operatorname{tg}^3 \frac{\chi}{2} G(\chi) \left(\frac{e}{m} - \frac{Ze}{m_{nuc}} \right)^2 \quad (5)$$

$$G(\chi) = (\pi + \chi) \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} \right) + 6 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}$$

Где χ это угол, определяемый из уравнения $\operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \rho}{Ze^2}$, m_{nuc} —масса ядра, $\mu = \frac{m \cdot m_{nuc}}{m + m_{nuc}} \approx m$ —приведённая масса, ρ —прицельный параметр налетающего электрона, v_0 —скорость в системе центра масс.

Учитывая, что масса электрона много меньше массы ядра, то $v_0 = v$ можно считать скоростью налетающего электрона, а слагаемым $\frac{Ze}{m_{nuc}}$ в формуле (5) можно пренебречь. Если устремить v к нулю, то и $\operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}$ будет стремиться к нулю, тогда $\chi \rightarrow \pi$.

В данном пределе получаем $G(\chi) \approx 6\pi \operatorname{tg}^5 \frac{\chi}{2}$. Далее необходимо положить $\Delta E = \frac{mv^2}{2}$, и после элементарных преобразований опять получаем формулу (1).

Как показано в работах [6; 10] область применения классической формулы будет задаваться неравенством:

$$\left(\frac{v}{c} \right)^2 \ll \alpha^5. \quad (6)$$

3 Формула Крамерса

3.1 Вывод в работе Крамерса.

Вывод в статье Крамерса [12] основан на классической формуле потерь энергии свободного электрона, падающего на положительно заряженное ядро. Для эллиптической траектории рассчитываются компоненты ускорения электрона при падении, эти компоненты подставляются в формулу для дипольного излучения (3). Далее полагается, что потеря энергии электрона происходит посредством выброса кванта монохроматического света $h\nu$. Электрон при этом либо продолжит свободное движение, либо перейдет в связанное с ядром состояние, описанное теорией Бора. Полагается, что определенные интервалы частот в излученном свете в классической формуле соотносятся с процессами, в которых электрон переходит в определенное стационарное состояние. Определяется разность частот между двумя близкими состояниями:

$$\Delta\nu \sim \frac{2\pi^2 N^2 e^4 m}{h^3} \left(\frac{1}{(n-1/2)^2} - \frac{1}{(n+1/2)^2} \right) \sim \frac{4\pi^2 N^2 e^4 m}{n^3 h^3}$$

В статье приведены положения, которые могут быть использованы для получения искомой формулы. Исходя из выражения для σ_n – сечение рекомбинации определенным уровнем (на определенный уровень):

$$\sigma_n = \frac{32\pi\alpha^3 a_0^2}{3\sqrt{3}} \frac{\omega_0}{\omega(\omega - \omega_0 n^{-2})} \frac{1}{n^3}$$

Заменяв суммирование по n интегрированием от 1 до $+\infty$ можно получить полное сечение рекомбинации. В данной формуле ω – частота фотона, выпущенного при рекомбинации, а ω_0 – деленная на \hbar , – энергия связи основного состояния.

$$\sigma_q = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \alpha r_0^2 Z^2 c^2 \cdot \frac{\ln \frac{Zc\alpha}{v}}{v^2}$$

3.2 Получение сечений на основе третьего тома Ландау и книги Мессии

После выкладок в статье Крамерса была предпринята попытка получения сечения рекомбинации из решения уравнения Шредингера для атома водорода. Предполагалось, что гамильтониан системы представляет собой гамильтониан атома водорода и потенциал притяжения кулона. А пси-функция, должна иметь асимптотический вид:

$$\Psi = e^{ikz} + f(r, \phi)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Первое слагаемое соответствовало налетающему потоку электронов, второе – рассеянной на потенциале волне.

В уравнении на Ψ можно избавиться от зависимости от углов, если искать решение в виде $\Psi = R_{nl}(r)Y_{lm}(\phi, \theta)$, где Y – сферическая функция. Тогда для R_{kl} получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R_{kl} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right] R_{kl} = 0 \quad (7)$$

В поисках решения этого нетривиального уравнения, была обнаружена полезная информация о рассмотрении излучения частиц в центрально-симметричном потенциале. В книге Альберта Мессиа [13] и третьем томе Ландау [14] описан метод расчета эффективного сечения в центрально-симметричном потенциале: рассматривается уравнение Шредингера, содержащее возмущающий потенциал (8)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right] \Psi = E\Psi. \quad (8)$$

На бесконечности берется асимптотика, где первое слагаемое соответствует налетающей частице, а второе потоку рассеянных частиц:

$$e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Из такой интерпретации можно найти число частиц, рассеянное в элемент телесного угла: $\frac{\hbar k}{m} |f(\theta)|^2 d\theta$. Поделив это выражение на величину первона-

чального потока, получим эффективное сечение: $d\sigma = |f(\theta)|^2 d\theta$

Решение уравнения Шредингера в центрально-симметричном поле, не зависящем от угла, ϕ представляется в виде ряда $\Psi = \sum A_l P_l(\cos \theta) R_{kl}(r)$, где R_{kl} радиальная функция, удовлетворяющая уравнению (7). Нет необходимости решать уравнение во всей области, нужно лишь получить его асимптотический вид. Асимптотический вид для радиальных функций от потенциала $U(r) \sim 1/r^n$, где $n > 1$, может быть дан следующим образом:

$$R_{kl} \approx \frac{2}{r} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l), \text{ где } \delta_l \text{ — фазовый сдвиг функции } R_{kl}$$

Используя асимптотическую форму на бесконечности, можно определить константу $A_l = \frac{1}{2k}(2l+1)i^l \exp(2i\delta_l)$. Вывод не привожу. Исходя из вида Ψ , находим выражение для функции $f(\theta)$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos \theta). \quad (9)$$

Тогда эффективное сечение:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi \sum_{l=0}^\infty \frac{(2l+1)^2}{2k^2} (\sin \delta_l)^2 P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^\infty (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

Под суммой находится парциальное сечение – шанс рекомбинации частицы с определенным моментом l . Для этого парциального сечения в книге [14] получен предельный переход к классическим сечениям. Рассмотрим сумму данных парциальных сечений для интервала квантового числа Δl , при достаточно больших значениях l :

$$\sum_{\Delta l} \sigma_l \approx \frac{\pi}{k^2} \cdot 2l\Delta l = 2\pi \frac{l\hbar^2}{p^2} \Delta l. \quad (10)$$

Данная формула имеет ограниченную применимость: только для потенциалов убывающих на бесконечность быстрее чем $1/r$. Возникает вопрос применения этих формул для потенциала Кулона.

3.3 Вывод общей формулы рекомбинации в статье Мильштейна

Так как обычная теория расчета сечений неупругих процессов в квантовой механике не привела к результату, были изучены дополнительные источники. В работе [15] проводят исследование излучательной рекомбинации. В ней представлены исследование сечений рекомбинации в связанные состояния с различным квантовым числом n , а также суммарное по всем уровням сечение рекомбинации. В данной работе приведена следующая формула для суммарного сечения рекомбинации:

$$\sigma_{rr} = \frac{16}{3}\pi^2\alpha^3 a_B^2 \eta^2 \left[\int_0^\infty \frac{\eta'^2 \sinh(\varepsilon' - \varepsilon)}{\eta'|\eta^2 - \eta'^2| \sinh(\pi\eta) \sinh(\pi\eta')} \left(\xi \frac{d}{d\xi} |F(\xi)|^2 \right) d\eta' - \coth \pi\eta + 1 \frac{1}{\pi\eta} \right], \quad (11)$$

где $\eta = \sqrt{J/\varepsilon} = Ze^2/\hbar v$ – безразмерный параметр, связанный с моментом частицы и ее энергией (определяется начальными условиями). Для $\eta \gg 1$ или $Ze^2/c\hbar \gg v/c$ в статье приведено асимптотическое выражение (11):

$$\sigma_{rr} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\alpha^3 a_B^2 \eta^2 \ln \eta. \quad (12)$$

Это выражение с логарифмической точностью совпадает с (2).

3.4 Определение полуклассического приближения в книге Бете-Солпитера

Как было показано выше, обе формулы для расчета сечений используют формулу Лармора для расчета дипольного излучения. Эта формула не подразумевает квантования поля переносчика взаимодействия. И накладывает ограничение на возможное применение формул.

Описание такого приближения было найдено в книге [16] в главах посвященных полуклассической теории излучений. Полуклассическое приближение – метод описания излучения, в котором полагается, что движение частиц будут квантоваться, а электромагнитное поле взаимодействия остается классическим.

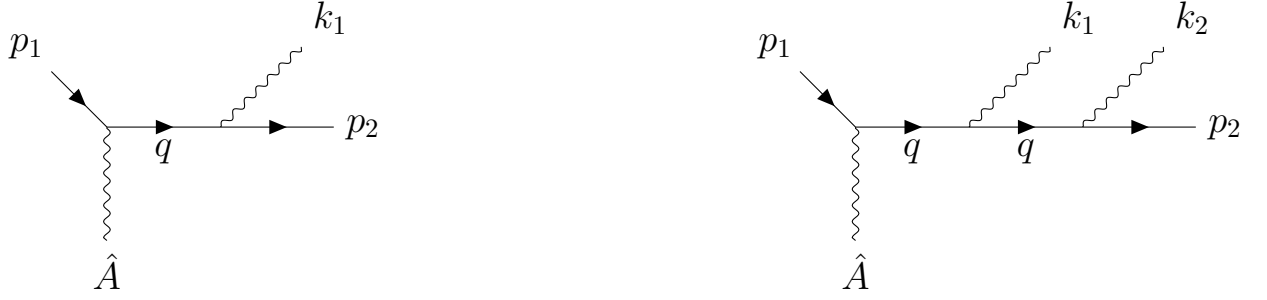
Обе рассматриваемые формулы будут работать в области полуклассического приближения из-за использования формулы (3), так как она получена исходя из непрерывности взаимодействия между потенциалом ядра

и налетающим электроном. Это значит что для обеих формул будет выполняться ограничение на действие $S \gg \hbar$ из статьи [6] будет выполняться как для формулы (1), так и для (2).

Это значит, формулы работают не в разных приближениях, а описывают задачу в одном. В этом приложении малые скорости или большое действия и ограничение на длину волны излученного фотона. Разница между ними лишь в том, что классическая формула полагает, что при падении электрона его энергия непрерывна, а Крамерс использует квантование энергии электрона.

4 Расчет сечения тормозного излучения

Для оценки влияния многофотонных процессов на сечение Крамерса была принята попытка оценить отношение амплитуд однофотонного и двухфотонного процессов (Приложение А).



Положим, что излучаемые фотоны „мягкие“, то есть имеют малые энергии по сравнению с электроном, а также слабо влияют на пропагатор ($q \approx k_1 + k_2 + p_2$). Также полагаем, что энергия ядра отдачи мала, в таком случае можно заменить фермионную линию ядра на линию внешнего стационарного электрического поля \hat{A} . После вычислений показанных в приложении один получаем отношение амплитуд однофотонного и двухфотонного процессов(13).

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\frac{\langle p_2 \epsilon_1 \rangle}{\langle p_2 k_1 \rangle} - \frac{\langle p_1 \epsilon_1 \rangle}{\langle p_1 k_1 \rangle}}{\frac{\langle p_2 \epsilon_2 \rangle \langle p_2 \epsilon_1 \rangle}{(\langle p_2 k_1 \rangle + \langle p_2 k_2 \rangle)^2} - \frac{\langle p_1 \epsilon_2 \rangle \langle p_1 \epsilon_1 \rangle}{(\langle p_1 k_1 \rangle + \langle p_1 k_2 \rangle)^2}} \quad (13)$$

Амплитуды процессов с „мягкими“ фотонами содержат неизменный фермионный ток $\hat{u}_2 \gamma_0 u_1$ для любого количества испущенных фотонов. Отличие амплитуд наблюдается в добавлении элементарного электрического заряда, а также слагаемым содержащим отношение скалярных произведений.

5 Заключение.

В данной работе исследовалась проблема согласования квантового и классического приближений оценки вероятности рекомбинации.

В рамках этой задачи была изучена литература, посвященная выводу формулы в классическом приближении (1): [6] – работа, где ограничение на скорость было получено из действия, [10] – работа Елютина, где ограничение на скорость получено, как ограничение на момент импульса.

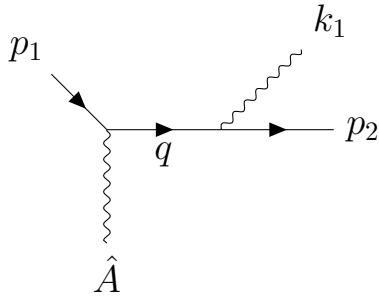
Были изучены работы, посвященные выводу формулы в квантовом приближении (2): [12] – в котором впервые была сформулирована формула исходя из полуклассических принципов, [13; 14; 17] – учебники по квантовой механике, в которых приведен метод квантовомеханического расчета сечения неупругих реакций, [15] – в котором проводилось исследование суммарного сечения рекомбинации в различных пределах.

В рамках квантовой теории поля был рассмотрен процесс тормозного излучения в случаях излучения одного и двух мягких фотонов. Были получены амплитуды этих процессов и найдено отношение однофотонной и двухфотонной амплитуды. Амплитуды процессов с „мягкими“ фотонами содержат неизменный фермионный ток $\hat{u}_2 \gamma_0 u_1$ для любого количества испущенных фотонов. Отличие амплитуд наблюдается в добавлении элементарного электрического заряда, а также слагаемым содержащим отношение скалярных произведений. Данный результат не дает сделать выводы о текущей задаче, но может быть полезен при дальнейшем анализе.

Обе формулы работают при близких пределах на скорость. Тем не менее в большинстве работ по физике частиц и плазмы [3; 18–20] используют Крамерса. В работах [10; 21; 22] существует явное упоминание возможности классического расчета сечения рекомбинации. При низких энергиях, характерных для проблем космологии классическая формула тоже имеет место быть, но не хватает экспериментальных данных, чтобы проверить ее соответствие эксперименту.

А Расчет однофотонной и двухфотонной амплитуды тормозного излучения

Рассмотрим следующую диаграмму:



Считаем, что энергия отдачи ядра мала, поэтому взаимодействие с ядром моделируем при помощи внешнего статического поля:

$$\hat{A} = \frac{Ze^2}{q_{el}^2} \gamma_0.$$

Также полагаем, что излученные фотоны „мягкие“, то есть не сильно влияют на 4-импульс электрона. Составим ее матричный элемент исходя из правил Фейнмана:

$$M = \bar{u}_2 \hat{\epsilon}_1 (-ie) \frac{\hat{q} + m}{q^2 - m^2} (-ie) A \gamma_0 u_1 = \frac{Ze^3}{(q^2 - m^2) q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2 \hat{\epsilon}_1 (\hat{p}_2 + m + \hat{k}_1) \gamma_0 u_1. \quad (\text{A.1})$$

Используем коммутационные соотношения: $\hat{\epsilon}_1 \hat{p}_2 + \hat{p}_2 \hat{\epsilon}_1 = 2 \langle p_2 \epsilon_1 \rangle$, и

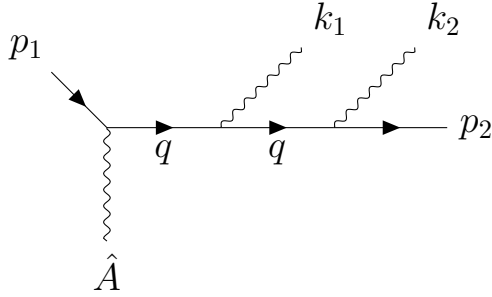
уравнение Дирака: $\bar{u}_2(\hat{p}_2 - m) = 0$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{Ze^3}{(q^2 - m^2)q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2(\hat{\epsilon}_1\hat{p}_2 + m\hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_1\hat{k}_1)\gamma_0u_1 = \\
&= \frac{Ze^3}{2 \langle p_2k_1 \rangle q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2(2 \langle p_2\epsilon_1 \rangle - (\hat{p}_2 - m)\hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_1\hat{k}_1)\gamma_0u_1 = \\
&= \frac{Ze^3}{2 \langle p_2k_1 \rangle q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2(2 \langle p_2\epsilon_1 \rangle + o(\hat{k}_1))\gamma_0u_1 = \frac{Ze^3 \langle p_2\epsilon_1 \rangle}{q_{el}^2 \langle p_2k_1 \rangle} (\bar{u}_2\gamma_0u_1).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Можно получить амплитуду второй диаграммы, заменив 4-импульс конечного состояния на 4-импульс начального и получить полную амплитуду процесса:

$$M_1 = \frac{Ze^3}{q_{el}^2} \left(\frac{\langle p_2\epsilon_1 \rangle}{\langle p_2k_1 \rangle} - \frac{\langle p_1\epsilon_1 \rangle}{\langle p_1k_1 \rangle} \right) (\bar{u}_2\gamma_0u_1). \tag{A.3}$$

Теперь рассмотрим амплитуду двухфотонного процесса:



Полагаем, что оба фотона „мягкие“ и слабо влияют на пропагатор. Составим амплитуду:

$$\begin{aligned}
M &= \bar{u}_2\hat{\epsilon}_2(-ie)\frac{\hat{q} + m}{q^2 - m^2}(-ie)\hat{\epsilon}_1\frac{\hat{q} + m}{q^2 - m^2}(-ie)A\gamma_0u_1 = \\
&= \frac{iZe^4}{(q^2 - m^2)^2q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2\hat{\epsilon}_2(\hat{q} + m)\hat{\epsilon}_1(\hat{q} + m)\gamma_0u_1.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Полагаем, что $q = k_1 + k_2 + p_2$,

$$\begin{aligned}
M &= \frac{iZe^4}{(q^2 - m^2)^2 q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + m) \hat{\epsilon}_1 (\hat{q} + m) \gamma_0 u_1 = \\
&= \frac{iZe^4}{(q^2 - m^2)^2 q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2 (2 \langle p_2 \epsilon_2 \rangle - \hat{p}_2 \hat{\epsilon}_2 + \hat{\epsilon}_2 (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) + m \hat{\epsilon}_2) \hat{\epsilon}_1 (\hat{q} + m) \gamma_0 u_1 = \\
&= \frac{iZe^4}{(q^2 - m^2)^2 q_{el}^2} \cdot \bar{u}_2 (2 \langle p_2 \epsilon_2 \rangle + o(k_1 + k_2)) \hat{\epsilon}_1 (\hat{q} + m) \gamma_0 u_1 \\
&= \frac{\langle p_2 \epsilon_2 \rangle \langle p_2 \epsilon_1 \rangle}{(\langle p_2 k_1 \rangle + \langle p_2 k_2 \rangle)^2} \frac{Ze^4}{q_{el}^2} \cdot (\bar{u}_2 \gamma_0 u_1). \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Получаем отношение амплитуд процессов:

$$\begin{aligned}
\frac{M_1}{M_2} &= \frac{\frac{\langle p_2 \epsilon_1 \rangle}{\langle p_2 k_1 \rangle} - \frac{\langle p_1 \epsilon_1 \rangle}{\langle p_1 k_1 \rangle}}{\frac{\langle p_2 \epsilon_2 \rangle \langle p_2 \epsilon_1 \rangle}{(\langle p_2 k_1 \rangle + \langle p_2 k_2 \rangle)^2} - \frac{\langle p_1 \epsilon_2 \rangle \langle p_1 \epsilon_1 \rangle}{(\langle p_1 k_1 \rangle + \langle p_1 k_2 \rangle)^2}} \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Dark Coulomb binding of heavy neutrinos of fourth family / K. Belotsky [et al.] // *Int. J. Mod. Phys. D.* — 2015. — Vol. 24, no. 13. — P. 1545008.
2. Indirect effects of dark matter / K. M. Belotsky [et al.] // *International Journal of Modern Physics D.* — 2019. — Oct. — Vol. 28, no. 13. — P. 1941011.
3. *Von Harling B., Petraki K.* Bound-state formation for thermal relic dark matter and unitarity // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2014. — Vol. 2014, no. 12. — P. 033.
4. *Petraki K., Postma M., Vries J. de.* Radiative bound-state-formation cross-sections for dark matter interacting via a Yukawa potential // *Journal of High Energy Physics.* — 2017. — Apr. — Vol. 2017, no. 4.
5. *Ko P., Matsui T., Tang Y.-L.* Dark matter bound state formation in fermionic Z2 DM model with light dark photon and dark Higgs boson // *Journal of High Energy Physics.* — 2020. — Oct. — Vol. 2020, no. 10.
6. *Belotsky K., Esipova E., Kirillov A.* On the classical description of the recombination of dark matter particles with a Coulomb-like interaction // *Physics Letters B.* — 2016. — Oct. — P. 81–86.
7. *Rosato J., Marandet Y., Stamm R.* A new table of Balmer line shapes for the diagnostic of magnetic fusion plasmas // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* — 2017. — Vol. 187. — P. 333–337.
8. *Dufresne R. P., Del Zanna G., Badnell N. R.* Effects of density on the oxygen ionization equilibrium in collisional plasmas // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* — 2020. — July. — Vol. 497, no. 2. — P. 1443–1456.

9. Modern methods for calculations of photoionization and electron impact ionization of two-electron atoms and molecules / V. V. Serov [et al.]. — 2012.
10. *Elyutin P. V.* Classical recombination cross section // Теоретическая и Математическая Физика. — 1978. — Vol. 34, no. 2. — P. 180–184.
11. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля. — М. : Физматлит, 2012.
12. *Kramers H. A.* XCIII. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum // Philosophical Magazine Series 6. — 1923. — Vol. 46, no. 275.
13. *Мессиа А.* Квантовая механика. — Наука, 1978.
14. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М. : Физматлит, 2004.
15. *Kotelnikov I., Milstein A.* Electron radiative recombination with a hydrogen-like ion. — 2018. — Oct.
16. *Bethe H., Salpeter E.* Quantum Mechanics of Atoms with One and Two Electrons [Russian translation] // Pizmatgiz, Moscow I. — 1960. — Vol. 960.
17. *Бете Г. А.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М. : Физматлит, 1960.
18. *Vajnshtejn L. I.* Sobelman, E.A. Ukov, Excitation of Atoms and Spectral Lines Broadening, 253P // The Science. — 1979.
19. *Bates D. R.* Atomic and molecular processes. Vol. 13. — Elsevier, 2012.
20. Atomic dark matter / D. E. Kaplan [et al.] // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2010. — Vol. 2010, no. 05. — P. 021.
21. *Zeldovich Y. B., Khlopov M. Y.* On the concentration of relic magnetic monopoles in the universe // Physics Letters B. — 1978. — Vol. 79, no. 3. — P. 239–241.
22. Effects of new long-range interaction: Recombination of relic heavy neutrinos and antineutrinos / K. M. Belotsky [et al.] // Grav. Cosmol. — 2005. — Vol. 11. — P. 27–33.