

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 517.972.6

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
СТРУКТУРА И ДИНАМИКА МИНИМАЛЬНЫХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ НА КОНТУРАХ

Студент _____ А. А. Видинеев

Научный руководитель,
проф., д.ф.-м.н., проф. _____ С. Г. Рубин

Москва 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
1 Мыльные поверхности на контурах	3
1.1 Основные определения и принципы	3
1.2 Связь с задачей Штейнера	4
1.3 Структура особенностей у мыльной плёнки	5
1.4 Коса из трёх нитей	6
1.5 Мыльные плёнки на плоских косах	7
1.6 Мыльные плёнки на узлах	9
1.7 Многомерные плёнки	10
2 Функционал площади на пространстве контуров	12
2.1 Изменение плёнки при деформации контура	12
2.2 Пара окружностей	13
2.3 Ласточкин хвост	17
3 Заключение	22
Список используемой литературы	22

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучается структура минимальных поверхностей с данными граничными условиями. Эту задачу в 1760 году поставил Лагранж. Плато предложил использовать мыльные плёнки для экспериментального решения этой проблемы. [1] Как известно, поверхность воды из-за поверхностного натяжения стремится уменьшить площадь поверхности. Следовательно, мыльные плёнки, возникающие на контурах обладают минимальной площадью.

В первой части работы устанавливается связь между проблемой Плато и задачей Штейнера о поиске минимальной системы путей. Эта связь позволяет установить структуры мыльных плёнок, возникающих на многих контурах. В качестве примера рассмотрены плёнки на косах и на узлах. Также здесь исследуется обобщение проблемы Плато на многомерный случай.

Во второй части исследуются свойства функционала площади, определённого на пространстве всех контуров. Так как пространство контуров слишком большое и сложное, то мы рассматриваем сужения функционала на меньшие подпространства, соответствующие однопараметрическим или двухпараметрическим деформациям контура. В этом случае можно построить график функционала на пространстве параметров. Оказывается, что эти графики могут быть многозначными и иметь интересные особенности. Здесь даётся подробное описание структуры некоторых таких особенностей.

1. МЫЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НА КОНТУРАХ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИНЦИПЫ

Определение 1.1. Проволочным контуром (или просто контуром) будем называть вложенный в \mathbb{R}^3 граф (необязательно связный), любое ребро которого входит в некоторый цикл. Свободных рёбер и рёбер, соединяющих циклы у контура нет.

Контурами являются узлы, зацепления, каркасы многогранников и т. д.

Поместим контур в мыльный раствор. Опыт показывает, что на проволоку налезает мыльная плёнка. 1.1

Определение 1.2. Мыльной плёнкой будем называть набор дисков и непрерывных отображений, которые склеивают эти диски между собой и с контуром, причём к каждой точке контура крепится некоторый диск и и каждая граничная точка диска к чему-то приклеивается.



Рисунок 1.1 — Примеры мыльных плёнок

Структура мыльных плёнок определяется набором принципов:

- Принцип существования - для любого контура всегда существует плёнка, которая приклеивается к нему;

- Принцип минимальности - площадь плёнки на контуре минимальна в том смысле, что при малой деформации плёнки её площадь увеличивается. Однако данная плёнка не обязательно реализует глобальный минимум функционала площади. По этой причине на контуре может быть определено множество минимальных поверхностей разной площади. Этот набор называется спектром плёнки.
- Форма плёнки не зависит от способа вынимания плёнки из мыльного раствора;
- Динамический принцип - контур с плёнкой можно деформировать, при этом в каждый момент плёнка будет минимальной. Это не означает, что минимальная поверхность непрерывно (плавно) зависит от контура. Она может меняться скачками

1.2. СВЯЗЬ С ЗАДАЧЕЙ ШТЕЙНЕРА

Поместим в мыльный раствор какой-нибудь простой контур, например косу. В косе n верёвок монотонно спускаются вниз, поэтому в каждый момент времени t коса пересекает поверхность воды в n точках. Обозначим это множество символом D_t . Мыльная плёнка приклеивается к поверхности воды и к части вынутого из раствора контура 1.2. Следовательно, на поверхности воды в каждый момент времени возникает система путей, соединяющих точки множества D_t . Так как плёнка минимальна, то и система путей должна быть минимальна. Иначе, уменьшив общую длину системы путей в некотором интервале времени, мы бы уменьшили площадь поверхности плёнки. Таким образом имеет место следующий результат:

Теорема 1.1. Система путей, соединяющих точки множества D_t в каждый момент времени минимальна, то есть решает известную задачу Штейнера о поиске минимальной системы путей, соединяющих n точек на плоскости.

Определение 1.3. Водяной точкой (или точкой Штейнера) называется такая точка в минимальной системе путей, в которой пересекается 3 отрезка под углами в 120° .

Оказывается, что кроме точек Штейнера в минимальной сети нет больше никаких особых точек. Причём, максимальное число точек Штей-

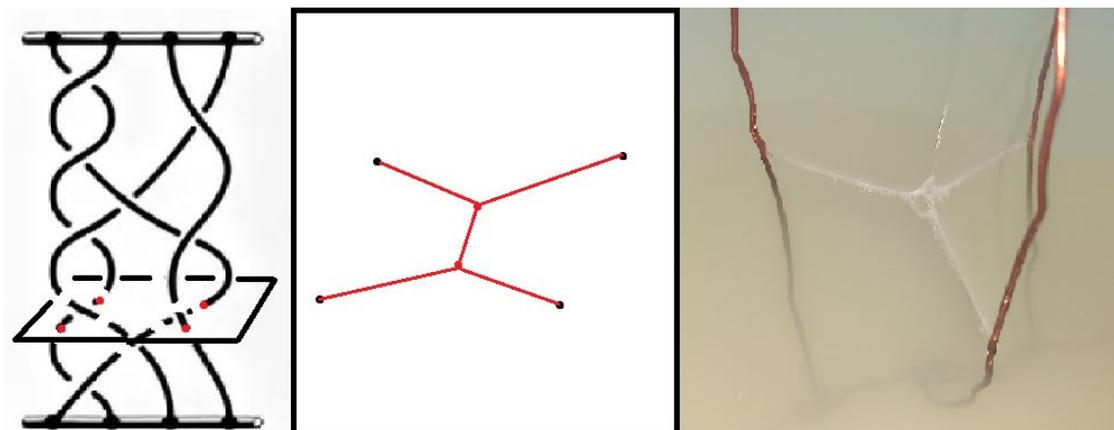


Рисунок 1.2 — Минимальная система путей, соединяющих точки, в которых контур пересекает поверхность воды

нера для системы из n точек равно $n - 2$. [2] Например, в треугольнике имеется одна водяная точка, которая соединяется отрезками с тремя вершинами 1.3.

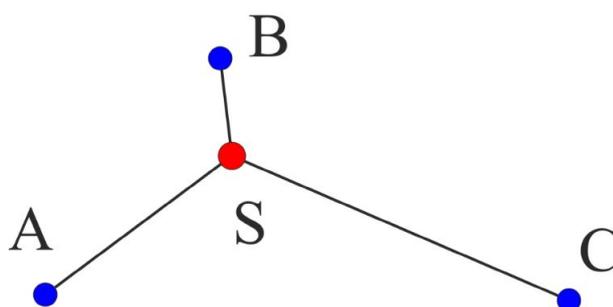


Рисунок 1.3 — Решение задачи Штейнера для треугольника

1.3. СТРУКТУРА ОСОБЕННОСТЕЙ У МЫЛЬНОЙ ПЛЁНКИ

Для контура, изотопного окружности, который однозначно проектируется на плоскость, форма мыльной плёнки известна. Такая плёнка гомеоморфна диску. [3] Для более сложных контуров плёнка может содержать особенности.

Между двумя параллельными прозрачными плоскостями поместим три гвоздя в вершинах правильного треугольника. На этом "контуре" возникает плёнка, имеющая особенность, которую мы будем называть водяной лини-

ей.

Определение 1.4. Точку мыльной плёнки будем называть точкой водяной линии, если её окрестность имеет вид интервала, в котором под углами в 120° пересекаются три плоских диска.

Теорема 1.2. Других особенных линий на мыльной поверхности не может быть.

Доказательство. Пусть четыре или более плоскостей пересекаются по одной линии. Будем вынимать контур из раствора так, чтобы поверхность воды была перпендикулярна этой линии. Тогда мы получим минимальную сеть в которой четыре или более отрезков пересекаются в одной точке. Но этого не может быть.

По этой же причине три плоскости обязательно пересекаются под равными углами.

□

Водяная линия возникает при поднятии водяной точки. Водяные точки могут исчезать и появляться. Если точка приближается к контуру, то получается крепление линии к проволоке. Если же точки Штейнера сливаются, то получится точечная особенность.

Определение 1.5. Точечная особенность типа центра тетраэдра, из которой выходит 4 линии и 6 плоскостей, называется шестикрылой бабочкой.

Теорема 1.3. Других точечных особенностей у мыльной плёнки быть не может.

Таким образом, двумерная минимальная поверхность может иметь особенности двух типов: водяная линия и шестикрылая бабочка [1.4](#).

1.4. КОСА ИЗ ТРЁХ НИТЕЙ

Задачу о минимальной плёнке можно точно решить для косы из трёх нитей.

Определение 1.6. Коса из трёх нитей называется косой без вырождений, если множество D_t имеет вид трёх точек, лежащих на одной прямой, только при $t = 0$ или 1 .

Для невырожденной косы в каждый момент времени минимальная

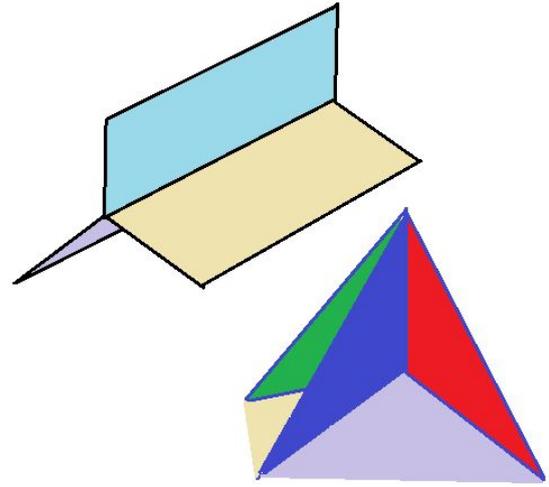
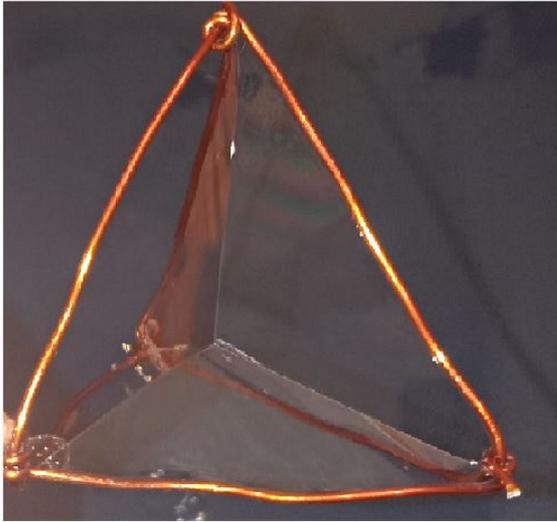


Рисунок 1.4 — Два типа особенностей, возникающих на мыльных плёнках: водяная линия и шестикрылая бабочка

сеть содержит точку Штейнера, причём эта точка непрерывно зависит от t . Значит, для в такой косе имеется единственная водяная линия, которая соединяется мыльными полосками с нитями косы.

При $t = 0$ или 1 никакой водяной точки нет. Это означает, что водяная линия должна крепиться к каким-то нитям. Легко понять, что линия всегда крепится к средней нити. Действительно, в тупоугольном треугольнике точка Штейнера расположена вблизи вершины тупого угла, т. е. линия будет приклеиваться к нити, которая является поднятием этой самой вершины, а это средняя нить.

В произвольной 3-косе в каждой невырожденной зоне имеется одна водяная линия, которая на краях этой зоны крепится к средней нити. В зоне вырождения никакой водяной линии нет, и поверхность имеет вид двух прямоугольников, склеенных по стороне (по проволоке) [1.5](#).

1.5. МЫЛЬНЫЕ ПЛЁНКИ НА ПЛОСКИХ КОСАХ

Любая коса изотопна косе, в которой все пересечения находятся на разном уровне. [\[4\]](#) Рассмотрим пересечение, находящееся на краю косы. Очевидно, что локальная структура плёнки определяется тремя нитями.



Рисунок 1.5 — Плёнки на двух косах. В первом случае имеется одна водяная линия. Во втором - две

То есть в данном случае применим результат для косы из трёх нитей: возникает водяная линия, к которой крепятся три нити. 1.6

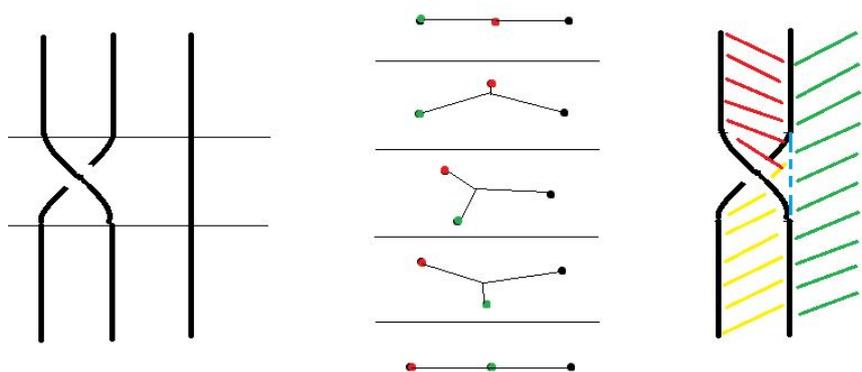


Рисунок 1.6 — Структура плёнки на пересечении, находящемся на краю косы

Пусть пересечение находится внутри косы. В этом случае вблизи точки пересечения появляется шестикрылая бабочка и два дополнительных диска, приклеенных к двум нитям в пересечении. 1.7

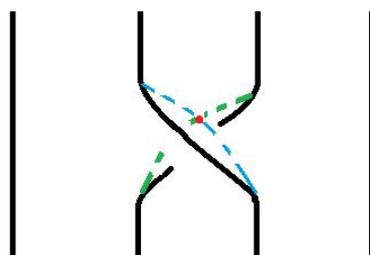


Рисунок 1.7 — Плёнка на пересечении, находящемся в центре

В случае, когда проволока горизонтально пересекает несколько других проволок подряд, возникает единственный диск, крепящийся к концам этой горизонтальной проволоки. В точках пересечения возникает шестикрылая бабочка.

Если одно или два пересечения в горизонтальном слиянии находятся на краю, то дополнительный диск сливается с крайней полосой. 1.8

Пусть имеются два горизонтальных слияния. Будем вертикально двигать одно к другому. Между ними всегда сохраняется линия вырождения. Следовательно, мыльная плёнка не претерпевает перестроек при вертикальном слиянии.

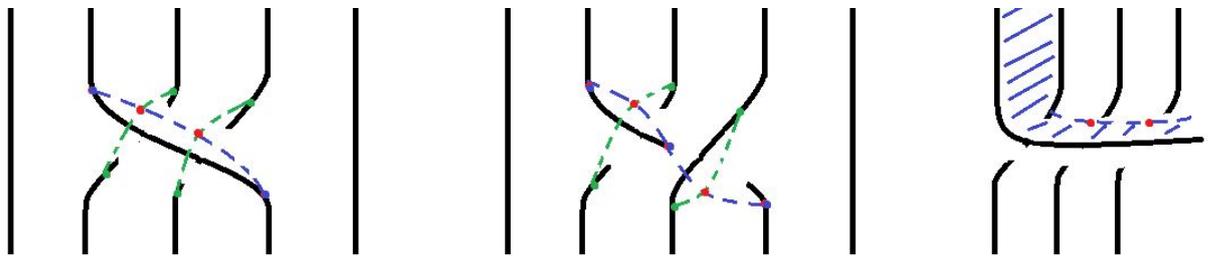


Рисунок 1.8 — Плёнки на горизонтальных слияниях пересечений

1.6. МЫЛЬНЫЕ ПЛЁНКИ НА УЗЛАХ

Узлом называется непрерывное вложение окружности в трёхмерное пространство. Диаграммой узла называется его проекция на плоскость. Диаграмма имеет несколько областей, каждая из которых является топологическим многоугольником. Участок диаграммы между соседними пересечениями называется ребром. Ребро хорошее, если оно переменное проходит через точки пересечения. В противном случае ребро плохое. Узел называется хорошим, если все его рёбра хорошие.

Перечислим экспериментальные результаты для достаточно плоских узлов.

- В каждую область хорошего узла клеивается диск. Этот диск приклеивается к каждому ребру области;
- В вершинах возникает склейка: водяная линия или шестикрылая бабочка;
- В хорошую область плохого узла клеивается диск;

- В плохой области тоже возникает диск, но он приклеивается только к хорошему ребру или к плохому наружному;
- К плохому ребру диск приклеивается при помощи дополнительного диска.

1.7. МНОГОМЕРНЫЕ ПЛЁНКИ

Рассмотрим вложение $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Образ $i(S^2)$ назовём оболочкой (или заузленной сферой). В оболочку встраивается минимальная трёхмерная поверхность. Будем называть её наполнением оболочки.

Введём на оболочке полигональную структуру. То есть будем считать, что поверхность $i(S^2)$ выполнена из конечного числа многоугольников. Пусть имеется N граней (F_1, F_2, \dots, F_N) . Дополним каждую грань до трёхмерного аффинного пространства. Обозначим это пространство через V_i . Через W_i обозначим трёхмерную гиперплоскость (снова аффинную) не параллельную V_i . Легко понять, что W_i пересекается с V_i по двумерной плоскости. То есть W_i пересекается с F_i по отрезку или по точке.

Для любой полигональной оболочки существует семейство параллельных аффинных гиперплоскостей, таких что любая гиперплоскость пересекается с каждым F_i по вершине или по внутреннему отрезку.

Каждая гиперплоскость из этого семейства пересекает оболочку либо по пустому множеству, либо по дизъюнктому объединению полигональных узлов и точек.

Теперь будем доставать оболочку из "мыльного раствора" вдоль направления, перпендикулярного семейству параллельных гиперплоскостей. K_t - пересечение оболочки и гиперплоскости W_t . В каждый момент времени наполнение приклеивается к минимальной поверхности, затягивающей множество K_t . Но структуру особенностей для двумерных минимальных поверхностей мы знаем. Очевидно, структура особенностей для наполнения должна вытекать из особенностей для двумерных плёнок.

Перечислим эти особенности:

- Водяная линия при непрерывном изменении параметра t превращается в водяную плоскость, к которой крепятся под углом 120° трёхмерные шары. Другой особой плоскости быть не может.

- Шестикрылая бабочка поднимается до линии, к которой крепятся 4 плоскости и каждая пара плоскостей заклеена трёхмерными дисками. Другой особой линии быть не может.
- Имеется как минимум одна точечная особенность. А именно особенность типа центра четырёхмерного тетраэдра. Это точка из которой выходит 5 линий, 10 плоскостей и 10 трёхмерных дисков.

2. ФУНКЦИОНАЛ ПЛОЩАДИ НА ПРОСТРАНСТВЕ КОНТУРОВ

2.1. ИЗМЕНЕНИЕ ПЛЁНКИ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ КОНТУРА

Рассмотрим однопараметрическую деформацию контура с плёнкой K . В течение некоторого времени плёнка меняется непрерывно. Будем считать, что функция $S(x)$ гладкая. В некоторый момент x_0 происходит скачкообразное изменение плёнки - обрыв. 2.1 Как устроена функция $S(x)$ вблизи этой точки?

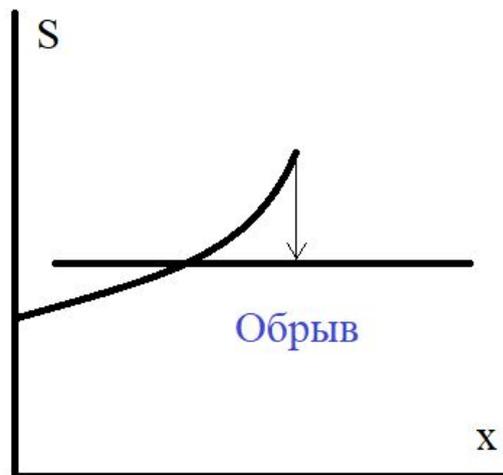


Рисунок 2.1 — Резкая перестройка плёнки сопровождается уменьшением плёнки и называется обрывом

Допустим, мы построили модель M , описывающую строение плёнки в течение всей деформации. В этой модели имеется параметр a , задающий точное положение модельной плёнки. То есть $S = S(a, x)$. При фиксированном x параметр a можно найти из уравнения $\frac{\partial}{\partial a} S(a, x) = 0$. Будем считать функцию $S(a, x)$ гладкой. Она должна иметь минимум по a , т. к. именно

для этого минимума достигается наблюдаемая форма плёнки.

Пусть $\{a_i\}$ - множество экстремумов функции S . Каждому a_i соответствует своя плёнка. Так минимуму соответствует устойчивая плёнка, а максимуму (или перегибу) - неустойчивая.

Если в точке x_0 происходит обрыв, то в этой точке функция $S(a, x_0)$ перестаёт иметь минимум. Плавным образом минимум может исчезнуть только при "аннигиляции" с максимумом. Это означает, что в точке x_0 должны стыковаться две линии, соответствующие устойчивой и неустойчивой плёнке.

Итак, получены следующие результаты:

Теорема 2.1. Если $\forall x < x_0$ график $S(a, x)$ имеет только минимум, то в точке x_0 не может быть обрыва.

Следствие 2.2. Если в точке x_0 имеется обрыв, то к кривой $S(x)$ в этой точке сверху подходит кривая неустойчивой плёнки.

Ниже рассмотрены некоторые примеры перестроек плёнок при деформациях.

2.2. ПАРА ОКРУЖНОСТЕЙ

Рассмотрим контур, состоящий из двух параллельных окружностей одинакового радиуса, стоящих напротив друг друга. Расстояние между окружностями обозначим буквой x и будем считать параметром. Пусть радиусы равны 1.

Опыт показывает, что на данном контуре образуются минимальные плёнки трёх типов: два диска, склеенные диски и плёнка, напоминающая провисший цилиндр (эта поверхность называется катеноидом) **2.2**.

Для плёнки первого типа площадь постоянна и равна 2π . При небольших x чаще всего возникает плёнка второго типа. Третий тип из второго можно получить прокалыванием среднего диска. При увеличении параметра площадь плёнок второго и третьего типов возрастает и в определённые моменты превышает 2π , после чего эти поверхности очень скоро становятся нестабильными и перепрыгивают в состояние первого типа. Исследуем эту задачу подробнее.

Эйлер показал, что катеноид является поверхностью вращения цеп-

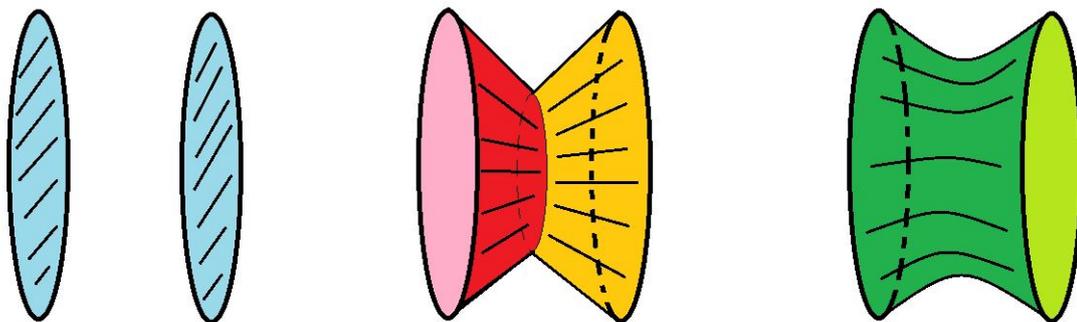


Рисунок 2.2 — Типы плёнок на контуре, состоящем из двух окружностей
 ной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. [5] Параметр a является радиусом горловины кате-
 ноида, то есть самой узкой его части. При фиксированном радиусе окруж-
 ности параметр a зависит только от расстояния x . Цепная линия проходит
 через точку $(\frac{x}{2}; 1)$, поэтому a можно найти из уравнения

$$\operatorname{ch} \frac{x/2}{a} = \frac{1}{a}. \quad (2.1)$$

Построим график зависимости $a(x)$. 2.3

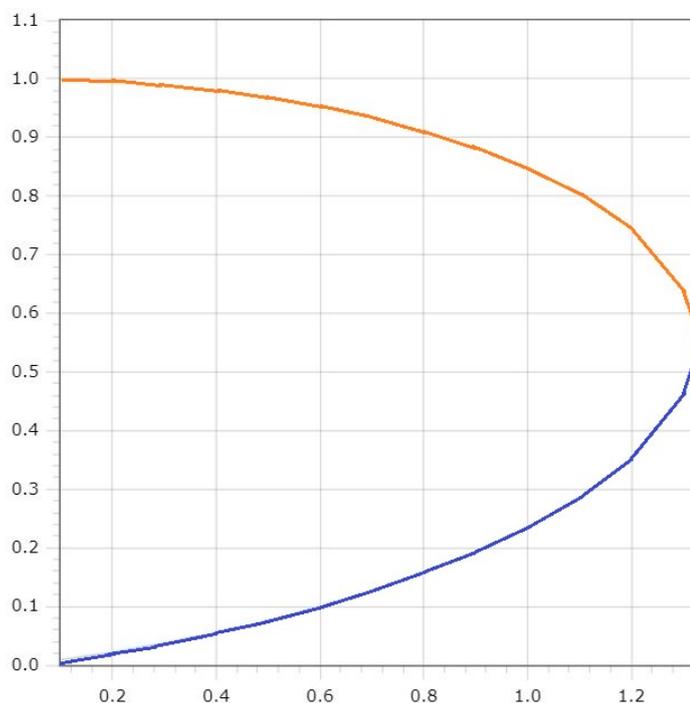


Рисунок 2.3 — График зависимости радиуса горловины катеноида от рас-
 стояния между граничными окружностями

Из этого графика видно, что при x больших некоторого критического
 значения $x_0 \approx 4/3$ катеноид не образуется. При меньших x возникает два

катеноида. У "синего" катеноида радиус горловины меньше, чем у "оранжевого" то есть он будет находиться внутри оранжевого. По этой причине будем называть его внутренним, а оранжевый катеноид будем называть внешним. Далее мы покажем, что внутренний катеноид неустойчив, то есть не возникает в опытах с мыльными плёнками.

Площадь поверхности катеноида можно найти из следующей выкладки:

$$S = 4\pi \int_0^{x/2} y \sqrt{1 + y'^2} dx = 4\pi a \int_0^{x/2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \pi \left(a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a} + ax \right) \quad (2.2)$$

Теперь построим график зависимости площади катеноида от параметра. 2.4

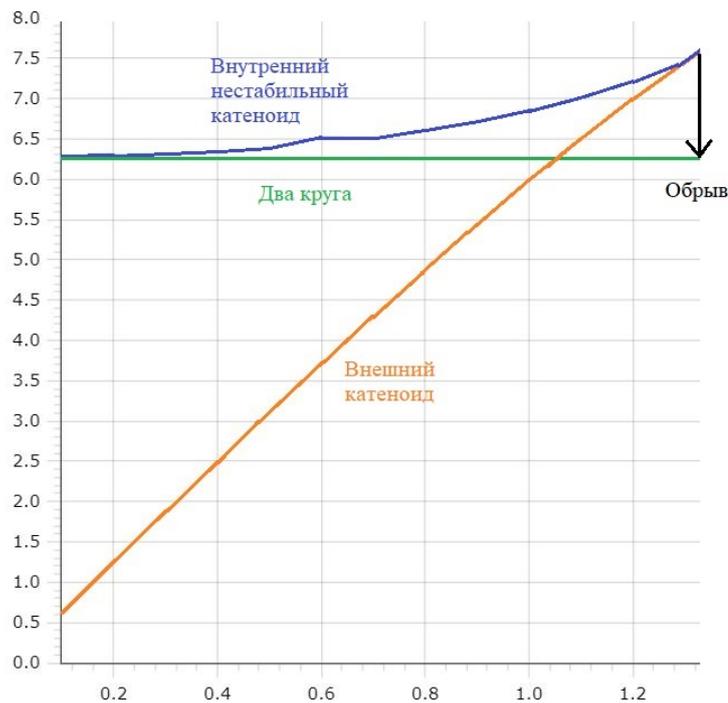


Рисунок 2.4 — График зависимости площади устойчивого и неустойчивого катеноида от расстояния между граничными окружностями

Перечислим факты, вытекающие из этого графика.

- Площадь внешнего катеноида почти линейно возрастает при увеличении расстояния между граничными окружностями;
- В некоторый момент x_c площадь внешнего катеноида начинает пре-

вышать площадь двух кругов, при этом дальнейшее увеличение катеноида ещё возможно;

- В момент x_0 внешний катеноид становится нестабильным и обрывается до двух кругов (площадь скачком уменьшается);
- Площадь внутреннего катеноида всюду больше даже площади двух кругов. По этой причине внутренний катеноид нестабилен, то есть не возникает в опытах (по крайней мере не удерживается в течение длительного времени);
- В момент x_0 площади внутреннего и внешнего катеноидов сравниваются (обрыв соединяется с плато).

Теперь рассмотрим контур типа 2. Он состоит из двух одинаковых сегментов катеноида и дополнительного диска. На опыте эти катеноиды слабо искривлены, поэтому мы будем предполагать, что это сегменты конусов. 2.5

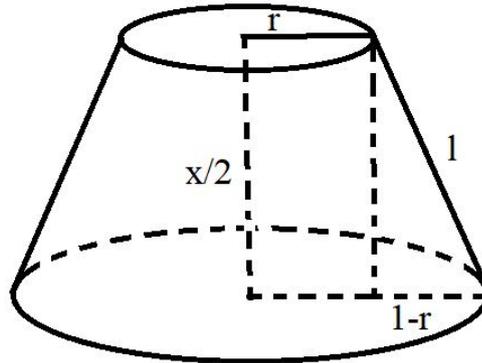


Рисунок 2.5 — Усечённый конус

Площадь сегмента конуса вычисляется по формуле:

$$S = \pi l(r_1 + r_2) = \pi l(r + 1). \quad (2.3)$$

Длина образующей равна

$$l = \sqrt{\frac{x^2}{4} + (1 - r)^2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, площадь всей плёнки равна

$$S = 2\pi(r + 1)\sqrt{\frac{x^2}{4} + (1 - r)^2} + \pi r^2. \quad (2.5)$$

Радиус мыльного диска r должен быть таким, чтобы функция $S(r)$ имела экстремум. Минимуму соответствует устойчивая плёнка, максимуму - неустойчивая. Ниже приведён график зависимости радиуса от параметра x . **2.6** Верхняя линия соответствует минимуму функции S , нижняя линия - максимуму.

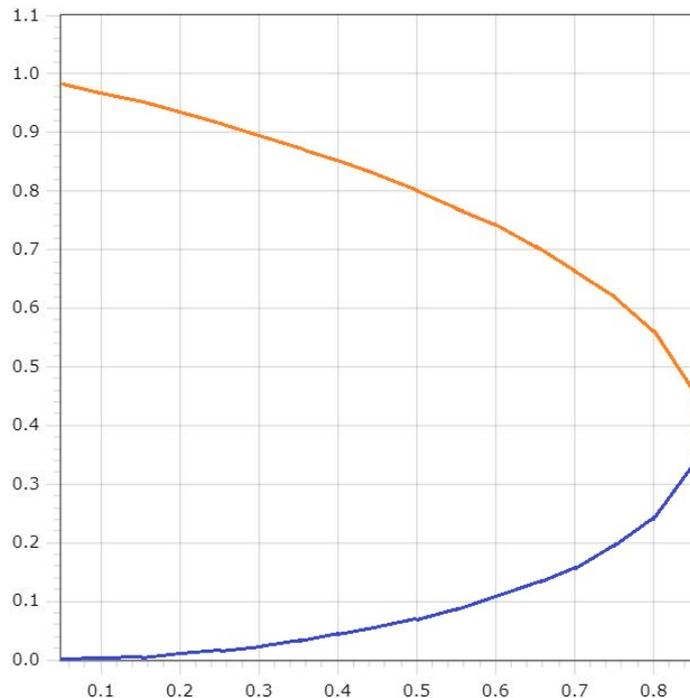


Рисунок 2.6 — График зависимости радиуса мыльного диска от расстояния между окружностями

График зависимости площади плёнки типа 2 состоит из двух кривых, касающихся в точке обрыва. **2.7**

2.3. ЛАСТОЧКИН ХВОСТ

Рассмотрим контур, состоящий из двух окружностей: большой и малой. Причём малая окружность пересекает под углом 90° плоскость большого, как показано на рисунке **2.8**. Какая плёнка возникнет на этом контуре? Ясно, то трансверсального пересечения быть не может, так как линия к которой сходятся четыре плоскости является запрещённой особенностью.

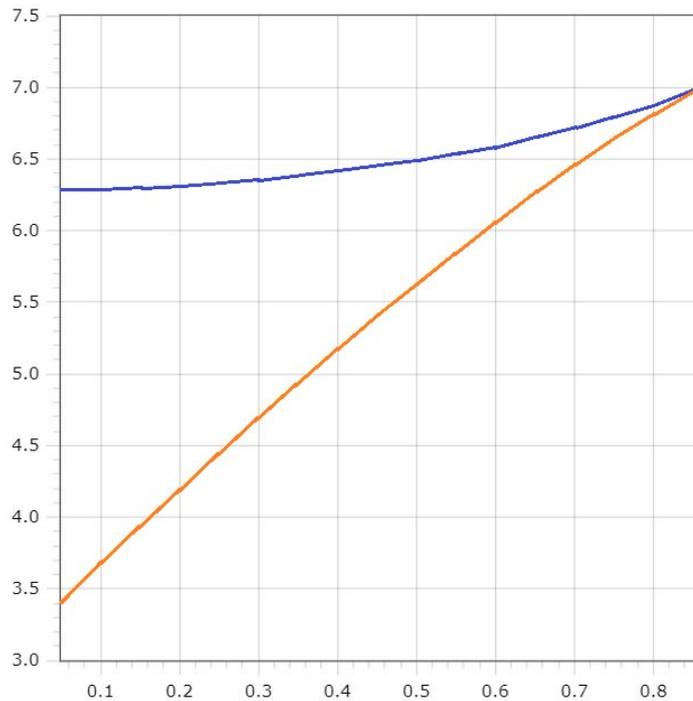


Рисунок 2.7 — График зависимости площади устойчивой и неустойчивой плёнки типа 2 от расстояния между граничными окружностями

Оказывается, что может возникнуть одна из двух плёнок 1 и 2, которые отличаются наклоном дополнительного диска D (он может быть наклонён влево, либо вправо).

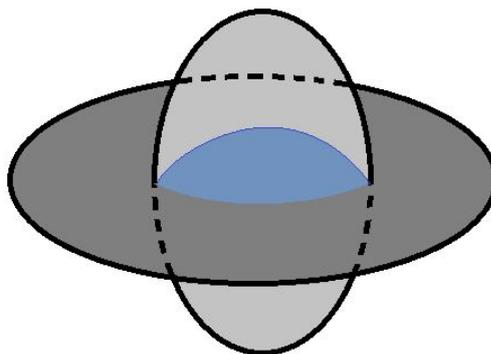


Рисунок 2.8 — Одна из двух плёнок, возникающих на контуре из двух ортогональных окружностей

Допустим, возникла плёнка 1 (наклонённая влево). Медленно начнём поворачивать малую окружность вправо. В течение некоторого времени сохраняется плёнка типа 1, но в некоторый момент происходит перестройка в состояние 2. В процессе перестройки дополнительный диск сжимается в ли-

нию, а затем снова расширяется, но теперь он наклонён в правую сторону. Заметим, что в процессе перестройки плёнка проходит через неустойчивое трансверсальное пересечение. Таким образом, график зависимости площади плёнки от угла наклона малой окружности имеет следующий вид 2.9. Верхняя линия 3 соответствует неустойчивой трансверсальной плёнке.

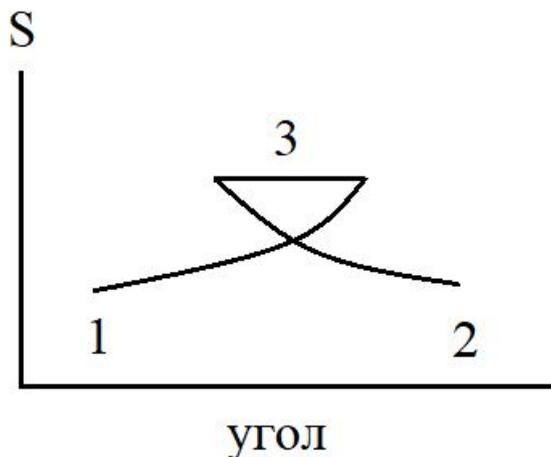


Рисунок 2.9 — График зависимости площади плёнки от угла наклона малой окружности

Введём в задачу ещё один параметр - расстояние от малой окружности до плоскости большой окружности. Заметим, что при пересечении малой окружности с плоскостью большой окружности плёнка меняется плавно (без скачков). Это означает, что существует деформация контура, при которой плёнка типа 1 плавно перейдёт в плёнку типа 2. Действительно, отдалим малую окружность от большой. Теперь повернём её вправо и снова пересечём окружности. Получится плёнка типа 2. График зависимости площади плёнки от этих двух параметров изображён на рисунке 2.10. Этот график имеет особенность, которая называется "ласточкин хвост".

На этом же рисунке изображена проекция поверхности на квадрат. Квадрат оказывается разделённым на несколько зон. Верхняя его половина соответствует случаю, когда окружности не пересекаются, плёнка имеет вид двух дисков. Нижняя половина разделена на три области: внутри клюва, слева и справа от него. Слева от клюва возникает плёнка типа 1, справа - плёнка типа 2. В левой половине клюва наиболее устойчива плёнка 1, но можно получить и вторую плёнку. Аналогично с правой половиной клюва. Также внутри клюва имеется неустойчивая плёнка типа 3 (трансверсаль-

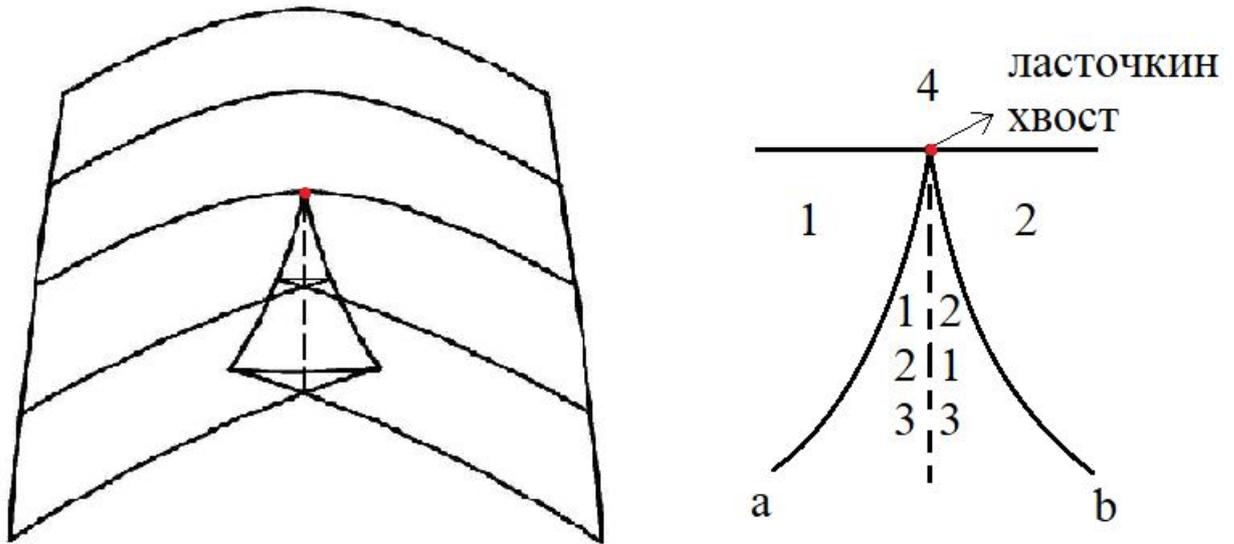


Рисунок 2.10 — График зависимости площади плёнки от угла и расстояния между окружностями имеет катастрофу "ласточкин хвост"

ная). Клюв ограничен проекциями двух сингулярных рёбер: a и b . На ребре a происходит обрыв из состояния 2 в 1. На сингулярных рёбрах стыкуются области неустойчивой и устойчивой плёнки.

Вообще, ласточкин хвост возникает в том случае, когда на симметричном относительно группы \mathbb{Z}_2 контуре возникают симметричные плёнки, которые переводятся друг в друга скачком, то есть через неустойчивую плёнку. Причём должен существовать параметр, вдоль которого неустойчивая плёнка переходит в устойчивое положение (в нашем случае неустойчивая трансверсальная плёнка переходит в плёнку, состоящую из двух непесекающихся дисков).

Катастрофа типа ласточкин хвост реализуется также для замечательного контура Дугласа 2.11. Эта задача подробно рассмотрена в работе [6].

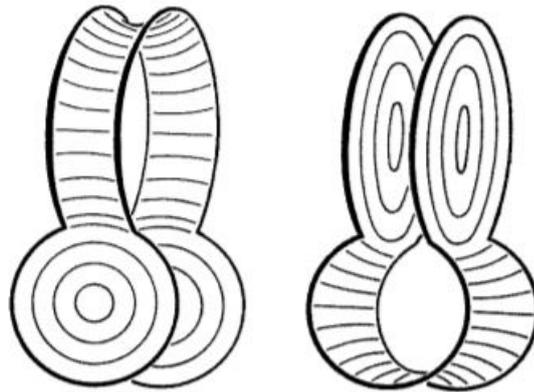


Рисунок 2.11 — Две симметричные плёнки на контуре Дугласа разделяются нестабильными плёнками типа внутреннего катеноида

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе исследовалась структура и динамика минимальных поверхностей на контурах. Была обнаружена связь между теорией минимальных поверхностей и задачей Штейнера. Эта связь позволила определить структуру особенностей минимальных поверхностей и форму мыльных плёнок на косах и узлах. Также эта связь была обобщена на многомерный случай.

Были получены результаты для структуры графика зависимости площади плёнки от параметра деформации контура вблизи точки скачкообразного изменения формы плёнки. Исследовано поведение плёнки для контура, состоящего из двух параллельных окружностей и для контура, в котором одна окружность пересекает плоскость другой.

Перечислим открытые вопросы.

- Верно ли что в точке обрыва кривые устойчивой и неустойчивой плёнок касаются?
- Какие могут быть порядки касания?
- Пусть ответ на первый вопрос отрицательный. Может ли в точке обрыва график площади иметь складку?
- Какие катастрофы может иметь двухпараметрический график площади?
- Есть ли у многомерных плёнок дополнительные точечные особенности?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Fomenko, A.T. The Plateau Problem: Historical Survey — Williston, VT: Gordon & Breach, 1989.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Задача Штейнера на плоскости или плоские минимальные сети // Матем. сб.. — 1991. — Т. 182, № 12. — С.
- [3] Сосинский А. Б. Мыльные пленки и случайные блуждания. — 2000. — 24 с. — (Библиотека «Математическое просвещение»). — 4000 экз.
- [4] Сосинский А. Б. Введение в топологию. — М.: МЦНМО, 2020. — 224 с.
- [5] Krivoshapko, Sergey; Ivanov, V. N. (2015). "Minimal Surfaces". Encyclopedia of Analytical Surfaces. Springer.
- [6] А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко, “Многозначные отображения, минимальные поверхности и мыльные пленки”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1986, № 3, 3–12