Магнитный монополь

Кусков В.А.

НИЯУ МИФИ

21 декабря 2021

Монополь Дирака

«One would be surprised if Nature had made no use of it»

Положим $\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi}\left(\frac{\nabla\cdot\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}\right) = 0,\ \ r\neq 0 \\ \int \mathbf{ds}\cdot\mathbf{B} = \int \mathbf{ds}\cdot\frac{g}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \int ds\frac{g}{4\pi r^2} = g,\ \ r = 0 \end{aligned}\right\}\ \nabla\cdot\mathbf{B} = g\delta^3(\mathbf{r}).$$

Решим систему уравнений $\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{g}{4\pi r\sin\theta}(C - \cos\theta)\mathbf{e}_\varphi.$$

Струна Дирака и квантоване заряда

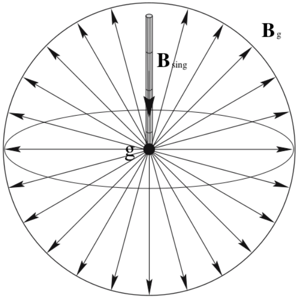
$$\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = \nabla\alpha \iff A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha$$

If $C = 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_N = \dfrac{g}{4\pi r\sin\theta}(1-\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{A}_S \to \infty, \end{cases}$$

if C = -1:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_S = -\dfrac{g}{4\pi r\sin\theta}(1+\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{A}_N \to \infty, \end{cases}$$



$$\boxed{g \cdot e = 2\pi n}$$

Монополь т Хофта-Полякова

Рассмотрим $SU(2)$-калибровочную теорию с триплетом скалярных полей преобразующихся по присоединенному представлению:

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v)$ в калибровке $\partial_0 = 0,\ A_0 = 0$

В такой теории имеется спонтанное нарушение симметрии $SU(2) \to U(1)$:

$\langle\phi^a\phi^a\rangle = v^2 \implies \phi_0 = (0,0,v) \implies \phi = (0,0,v+\varphi(\mathbf{x}))$

Спектр частиц теории:

- безмассовое векторное поле A^3_μ;
- массивные векторные поля $W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu \pm iA^2_\mu)$, $m_W = ev$;
- массивное скалярное поле φ, $m_\varphi = \sqrt{2\lambda}v$.

Граничные условия

Требование конечности энергии

$$E = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij,a} + \frac{1}{2} D_i \phi^a D^i \phi^a + \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v) \right] < \infty,$$

при заданной калибровке приводит к граничным условиям:

$\underline{r \to \infty :}$

$$\begin{cases} \phi^a \phi^a \to v^2, \\ D^i \phi^a \to 0, \\ F^a_{ij} \to 0. \end{cases}$$

$$f : S^2_\infty \to S^2_\phi$$

Такое отображение характеризуется топологическим инвариантом $n = deg\, f$.

В случае отображения сфер топологический инвариант равен:

$$n = \frac{1}{8\pi v^3} \int \mathrm{d}\, S_k \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_j \phi^c$$

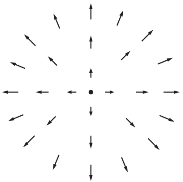
Низкоэнергетический предел $U(1)$

Простейшее нетривиальное отображение:

$$\phi^a = v\frac{x^a}{r}$$

Из граничных условий векторное поле:

$$D_i\phi^a = 0 \to A_i^a = \frac{1}{ev^2}\varepsilon_{abc}\phi^b\partial_i\phi^c + \frac{1}{v}A_i\phi^a$$



Тензор напряженности для ненарушенной компактной $U(1)_{em}$ можно выбрать как:

$$F_{\mu\nu} = n^a F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{e}\varepsilon_{abc}n^a D_\mu n^b D_\nu n^c,$$

где $n^a = \phi^a/v$. Тогда с учетом найденного векторного поля A_i^a:

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + \frac{1}{ev^3}\varepsilon_{abc}\phi^a\partial_i\phi^b\partial_j\phi^c$$

Квантование электрического заряда

Рассмотрим магнитный заряд по определению:

$$g = \int \mathbf{dS} \cdot \mathbf{H} = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}S_i \varepsilon^{ijk} F_{jk} = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}S_i \varepsilon^{ijk} \left(\partial_j A_k - \partial_k A_j + \frac{1}{ev^3} \varepsilon_{abc} \phi^a \partial_j \phi^b \partial_k \phi^c \right) =$$

$$= \frac{1}{2ev^3} \int \mathrm{d}S_i \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \phi^a \partial_j \phi^b \partial_k \phi^c = \frac{4\pi n}{e},$$

Т.е. в итоге приходим к квантованию электрического заряда:

$$\boxed{g = \frac{4\pi n}{e}} \iff \boxed{g \cdot e = 2\pi n_D}$$

Ассимптотика монополя т Хофта-Полякова

На бесконечном удалении от монополя его полевая конфигурация представляет собой:

$$\begin{cases} \phi^a = v\dfrac{x^a}{r}, \\ A_i^a = \dfrac{1}{er^2}\varepsilon_{aij}x_j. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi = ie\phi^a\dfrac{\sigma^a}{2} \to \omega\phi\omega^{-1}, \\ A_i = ieA_i^a\dfrac{\sigma^a}{2} \to \omega A_i\omega^{-1} + \omega\partial_i\omega^{-1}, \end{cases}$$

где $\omega = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, т.е. удовлетворяет преобразованию $\phi \to \phi_0 = (0, 0, v)$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{er}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_\phi,$$ с учетом квантования $g = \dfrac{4\pi n}{e} \to$ струна Дирака

Предел Богомольного-Просада-Зоммерфельда

Анзатц т Хофта-Полякова:

$$\begin{cases} \phi^a = \dfrac{x^a}{er^2} H(\xi) \\ A_i^a = \dfrac{1}{er^2} \varepsilon_{aij} x_j (1 - K(\xi)) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \xi^2 \dfrac{d^2 K}{d\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1) \\ \xi^2 \dfrac{d^2 H}{d\xi^2} = 2K^2 H + \dfrac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2) \end{cases}$$

Такая система разрешима только в очень специальном случае $\lambda \to 0$:

$$\begin{cases} \xi \dfrac{dK}{d\xi} = -KH \\ \xi \dfrac{dH}{d\xi} = H + (1 - K^2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} H(\xi) = \xi \coth \xi - 1 \\ K(\xi) = \dfrac{\xi}{\sinh \xi} \end{cases}$$

Предел Богомольного-Просада-Зоммерфельда

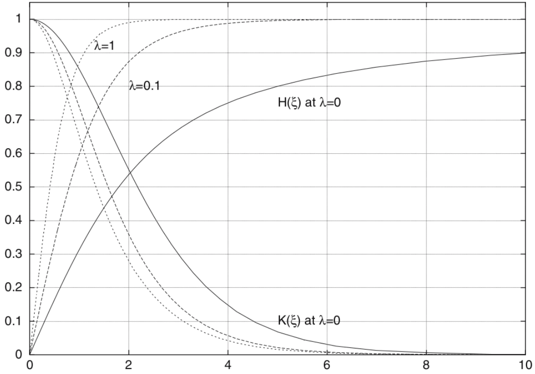
Предел Богомольного на массу монополя:

$$M = E \geq v|g|$$

Численно система уравнений разрешима и предел на массу:

$$M = \frac{4nv}{e} f\left(\frac{\lambda}{e^2}\right)$$

где $f(0) = 1, \quad f(\infty) = 1.787.$

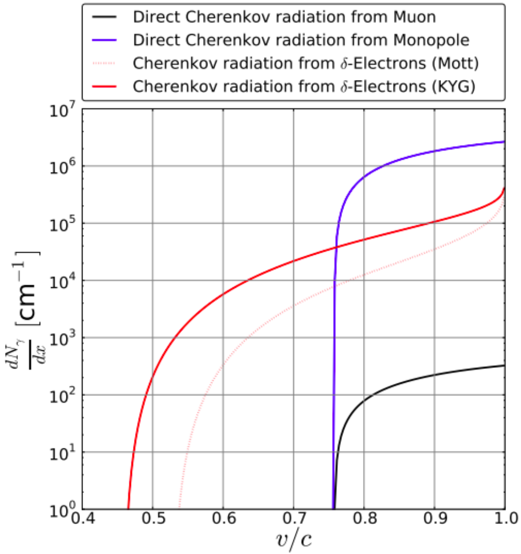


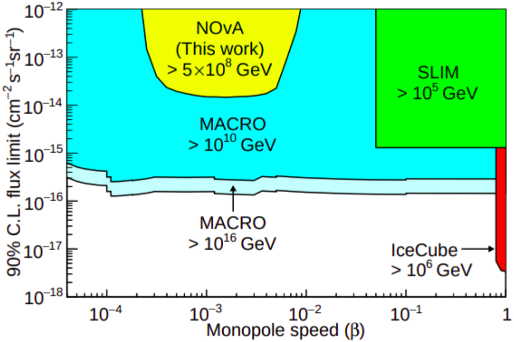
Монополи в ТВО

Монополи т Хофта-Полякова в неабелевых теориях будут возникать при любом нарушении симметрии до вложенной компактной группы — т.е. в любой ТВО!

- Масса таких монополей $M \sim 10^{16}$ ГэВ
- Монополи промежуточных масс $M \sim 10^{12} - 10^{14}$ ГэВ
- Эффект Рубакова-Каллана:
  внутри монополя содержится вакуум ненарушенной ТВО $\rightarrow$ несохранение барионного заряда:
  $$p + M \rightarrow M + e^{+} + e^{-} + e^{+} + M$$

Экспериментальное обнаружение монополей





Экспериментальное обнаружение монополей

FLUX $(\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{sr}^{-1}\mathrm{s}^{-1})$	MASS (GeV)	CHG (g)	COMMENTS $(\beta = v/c)$	EVTS	DOCUMENT ID		TECN
<2E-14	$> 5E8$		$6 \times 10^{-4} < \beta < 5 \times 10^{-3}$		[1] ACERO	2021	NOVA
<1.5E-18		1	β >0.6	0	[2] ALBERT	2017	ANTR
<2.5E-21		1	1E8< γ <1E13	0	[3] AAB	2016	AUGE
<1.55E-18			β >0.51	0	[4] AARTSEN	2016B	ICCB
<1E-17		Caty	1E-3< β <1E-2	0	[5] AARTSEN	2014	ICCB
<3E-18		1	β >0.8	0	[6] ABBASI	2013	ICCB
<1.3E-17		1	β >0.625	0	[7] ADRIAN-MARTIN..	2012A	ANTR
<6E-28	<1E17	Caty	1E-5< β <0.04	0	[8] UENO	2012	SKAM
<1E-19		**1**	$\gamma > \mathbf{1E10}$	0	[9] DETRIXHE	2011	ANIT
<3.8E-17		1	β >0.76	0	[6] ABBASI	2010A	ICCB
<1.3E-15	1E4< M <5E13	1	β >0.05	0	[10] BALESTRA	2008	PLAS

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!