

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 524.35

**ОТЧЁТ**  
**О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ**  
**КОМПАКТНЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ В**  
**КАЧЕСТВЕ ИСТОЧНИКА ЧЕРНЫХ ДЫР**

Научные руководители

\_\_\_\_\_ В. В. Никулин

\_\_\_\_\_ К. М. Белоцкий

Выполнил

\_\_\_\_\_ М. А. Краснов

Москва 2021

# Оглавление

1	Введение . . . . .	2
2	Модель . . . . .	3
3	Приближение эффективного скалярного поля . . . . .	4
4	Доменные стенки . . . . .	7
5	Инфляционная генерация доменных стенок . . . . .	9
6	Заключение . . . . .	11

# 1 Введение

Обычно предполагается, что зарождение нашей Вселенной связано с квантовыми процессами на шкале энергий Планка. После зарождения различные многообразия классически эволюционируют, образуя набор многообразий, одним из которых является наша Вселенная. Довольно серьёзная задача - подобрать параметры Лагранжиана так, чтобы результаты не противоречили наблюдениям. Сложность этой проблемы усугубляется включением дополнительных измерений. Идея дополнительных измерений используется в современных исследованиях, касающихся таких проблем, как великое объединение, задача космологической постоянной и т. д. Предположение о компактности дополнительного пространства приводит к вопросу: почему определенное число измерений стабильно или медленно расширяется? Стабилизирующими факторами могут быть, например, скалярные поля или калибровочные поля. Противоречие с наблюдениями можно избежать, если дополнительный размерный масштабный коэффициент  $\beta(t)$  изменяется достаточно медленно. Один из способов стабилизации дополнительных измерений основан на гравитации с более высокими производными, который широко используется в современных исследованиях. Наша модель содержит  $f(R)$  гравитацию с добавлением инварианта Кретчмана и тензора Риччи в квадрате. Рассмотрим действие для модифицированной гравитации -  $f(R)$  с  $D = 4 + n$  измерениями, включающую квадратичные поправки (в том числе тензорные) к скаляру Риччи, которое даётся выражением

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{m_D^{D-2}}{2} \int d^{4+n}x \sqrt{|g_D|} \left[ f(R) + c_1 R_{AB} R^{AB} + c_2 R_{ABCD} R^{ABCD} \right]. \quad (1)$$

В котором  $m_D$  - многомерная масса Планка, а  $f(R)$  даётся выражением

$$f(R) = a_2 R^2 + R - 2\Lambda_D. \quad (2)$$

Наша Вселенная должна представлять собой первый случай  $R_n \neq 0$  (доп. пространство компактифицировано и имеет некоторый радиус  $\rho_0$ ) — такая Вселенная будет начинаться с обычного инфляционного сценария, как показано в [1]. В статье [2] рассматривается второй случай  $R_n \approx 0$

— Вселенная с макроскопическим расширяющимся доп. пространством, в котором также происходит подобие космологической инфляции.

В результате ранней динамики на планковском масштабе возможно формирование пузыря одной Вселенной внутри другой. Рассмотрим такой сценарий: внутри нашего пространства ( $R_n \neq 0$ ) имеется сферический объем с  $R_n \approx 0$ . Как описать переход (типа доменной стенки), соединяющий его с внешним объёмом? Какова его масса? Стабилен ли он?

## 2 Модель

Рассмотрим теорию модифицированной гравитации —  $f(R)$ , включающую квадратичные поправки (в том числе тензорные) к скаляру Риччи и содержащую  $D = 4 + n$  измерений. Она описывается действием<sup>1</sup>

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{m_D^{D-2}}{2} \int d^{4+n}x \sqrt{|g_D|} \left[ f(R) + c_1 R_{AB} R^{AB} + c_2 R_{ABCD} R^{ABCD} \right],$$

$$f(R) = a_2 R^2 + R - 2\Lambda_D, \quad (3)$$

где  $m_D$  — многомерная масса Планка, далее мы будем везде работать в единицах  $m_D \equiv 1$ . При этом многомерное пространство представим как прямое произведение  $\mathbb{M} = \mathbb{M}_4 \times \mathbb{M}_n$ , где  $\mathbb{M}_4$  — четырехмерное пространство,  $\mathbb{M}_n$  — компактное дополнительное пространство с  $n$  измерениями. Для 4-мерного наблюдателя эта теория сведется к некоторой эффективной теории поля.

При определенных параметрах лагранжиана в действии (1) возможно получить наблюдаемую инфляционную Вселенную в пределе низких энергий (в картине Эйнштейна) [1]. Компактное пространство в этом сценарии стабилизируется на некотором малом размере, а пространственная метрика описывается следующим образом:

$$ds^2 = e^{-n\beta} |f'(R_n)|^{-1} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{2\beta} d\Omega_n^2. \quad (4)$$

где в  $g_{\mu\nu}$  — наблюдаемая (в картине Эйнштейна) 4-мерная метрика,  $\beta$  — функция размера дополнительного пространства,  $d\Omega_n^2$  — объем максимально симметричного компактного доп. пространства с положительной

<sup>1</sup>В этой работе мы используем следующие соглашения для тензора кривизны Римана  $R_{\mu\nu\alpha}^\beta = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta + \Gamma_{\sigma\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma$ , а тензор Риччи определен следующим образом:  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$

кривизной, а  $R_n$  — скаляр Риччи доп. пространства. Заметим, что наличие множителя перед 4-мерной частью метрики  $g_{\mu\nu}$  связано с выбором картины Эйнштейна в качестве физически наблюдаемой.

### 3 Приближение эффективного скалярного поля

Мы можем построить эффективную теорию поля из лагранжиана (1) (подробности вывода можно найти в [3]), содержащую обычную гравитацию и дополнительное скалярное поле, работая в приближении компактного (по сравнению с 4-мерным) и при этом медленно меняющегося дополнительного пространства:

$$R = R_4 + R_n + P_k, \quad P_k = 2n \partial^2 \beta + n(n+1)(\partial\beta)^2, \quad (5)$$

$$R_4, P_k \ll R_n \equiv 2e^{-2\beta}. \quad (6)$$

где  $R_4, R_n$  — скаляры Риччи для  $\mathbb{M}_4, \mathbb{M}_n$ .

Трактуя  $R_n \equiv \phi$  как эффективное скалярное поле и интегрируя (1) по дополнительному пространству, мы получаем действие:

$$S = \frac{m_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} \text{sign}(f') [R_4 + K(\phi)(\partial\phi)^2 - 2V(\phi)], \quad (7)$$

где эффективная масса Планка  $m_4 = \sqrt{V_n} = \sqrt{2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ . Приближение (7) справедливо только для значений поля  $\phi \gg \phi_0 \sim R_4$  (6), далее мы обсудим, какие параметры исходного лагранжиана (1) для этого требуются. Теория содержит потенциал и нетривиальный кинетический член, которые выражаются через исходные параметры лагранжиана (1):

$$K(\phi) = \frac{1}{4\phi^2} \left[ 6\phi^2 \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 - 2n\phi \left( \frac{f''}{f'} \right) + \frac{n(n+2)}{2} \right] + \frac{c_1 + c_2}{f'\phi}, \quad (8)$$

$$V(\phi) = -\frac{\text{sign}(f')}{2(f')^2} \left[ \frac{|\phi|}{n(n-1)} \right]^{n/2} \left[ f(\phi) + \frac{c_1 + 2c_2/(n-1)}{n} \phi^2 \right]. \quad (9)$$

Рассмотрим случай 6-мерного дополнительного пространства  $n = 6$ . Выберем для примера параметры  $c_1 = -100$ ,  $c_2 = 150$ ,  $a_2 = -10$ ,  $\Lambda = 3/400$ . При этих параметрах потенциальный член имеет два минимума, отвечающих различным вакуумам Вселенной. В следующих разделах мы обсудим справедливость такого выбора.

$$K(\phi) = \frac{800\phi^2 - 130\phi + 6}{(1 - 20\phi)^2\phi^2}, \quad (10)$$

$$V(\phi) = -\frac{\text{sign}(1 - 20\phi)\phi^3 \left(-\frac{50\phi^2}{3} + \phi - \frac{3}{200}\right)}{54000(1 - 20\phi)^2}. \quad (11)$$

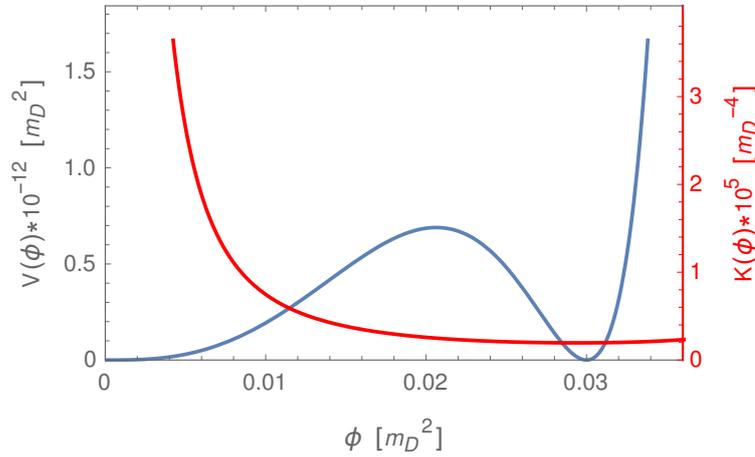


Рисунок 1 – Графики потенциального члена и кинетического множителя (10), (11) для эффективной 4-мерной теории. Левый минимум потенциала находится в точке  $\phi = 0$ , однако скатывание к нему за конечное время невозможно из-за возрастающего тормозного действия кинетического множителя, правый минимум находится в точке  $\phi_{min} = 6 \cdot 10^{-5}$ .

Скатывание поля  $\phi$  в правый минимум потенциала (11) соответствует стабилизации компактного дополнительного пространства, и приводит к наблюдаемой космологии [1]. Наличие левого минимума говорит о возможности реализации другого сценария (он исследован в работе [2]), в котором дополнительное пространство нестабильно и расширяется вместе с основным до макроскопических размеров.

Нетривиальный кинетический множитель (10) существенно модифицирует характер эволюции поля  $\phi$  по сравнению со стандартной скалярно-

полевой теорией, обеспечивая возрастающее торможение при скатывании в левый минимум (11). Можно упростить лагранжиан, сделав замену

$$\psi = m_4 \int_{\phi_0}^{\phi} \sqrt{K(\phi')} d\phi', \quad V(\psi) = m_4^2 V(\phi(\psi)), \quad (12)$$

в таком случае  $d\phi/d\psi = 1/m_4 \sqrt{K(\phi)}$  и лагранжиан приводится к стандартной форме:

$$S = \frac{m_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} R_4 + \int d^4x \sqrt{-g_4} \left[ \frac{1}{2} (\partial\psi)^2 - V(\psi) \right], \quad (13)$$

где при  $m_4^2 = 16\pi^3/15$  при выбранном  $n = 6$ . Условием для работы замены (12) является положительность  $K(\phi)$  на исследуемом промежутке  $\phi_0 < \phi < \phi_{min}$ . В таком случае  $\psi(\phi)$  монотонна и обратима (что требуется для нахождения потенциала в выражении (13)).

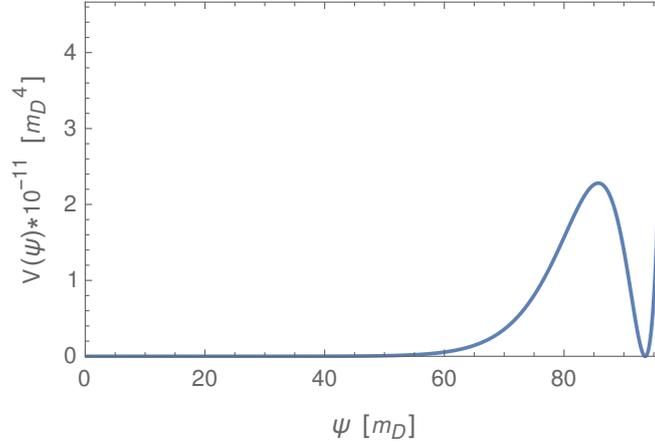


Рисунок 2 – График потенциального члена  $V(\psi)$  для эффективной 4-мерной теории (13). Левый минимум находится в точке  $\psi = 0$  (что является лишь достаточно точным приближением, учитывая ненулевой нижний предел интегрирования в (12)), правый минимум находится в точке  $\psi_{min} = 93.9$ . Максимальное значение потенциала в области перехода между вакуумами  $V_{max} \approx 2.28 \cdot 10^{-11}$ .

## 4 Доменные стенки

Хорошо известно, что потенциалы наподобие (2), содержащие несколько минимумов (вакуумов), могут приводить к формированию нетривиальных полевых конфигураций [4; 5] — "пузырей" одного вакуума внутри другого, окруженных доменной стенкой.

Исследуем такую конфигурацию, получив полевое уравнение для  $\psi$  из эффективного действия (13). Для простоты считаем её сферически симметричной и статической, что дает уравнение:

$$\partial_u^2 \psi + \frac{2\psi_u}{u} - V'(\psi) = 0, \quad (14)$$

которое при рассмотрении достаточно большого "пузыря" (так, чтобы его радиус был много больше характерной толщины доменной стенки  $\psi_{uu} \gg 2\psi_u/u$ ) можно легко свести к уравнению первой степени:

$$\partial_u \psi = \pm \sqrt{2V(\psi)}. \quad (15)$$

Характерное решение уравнения (15), соединяющее левый вакуум потенциала  $V(\psi)$  с правым (Рис. 2), показано на Рис. 3а.

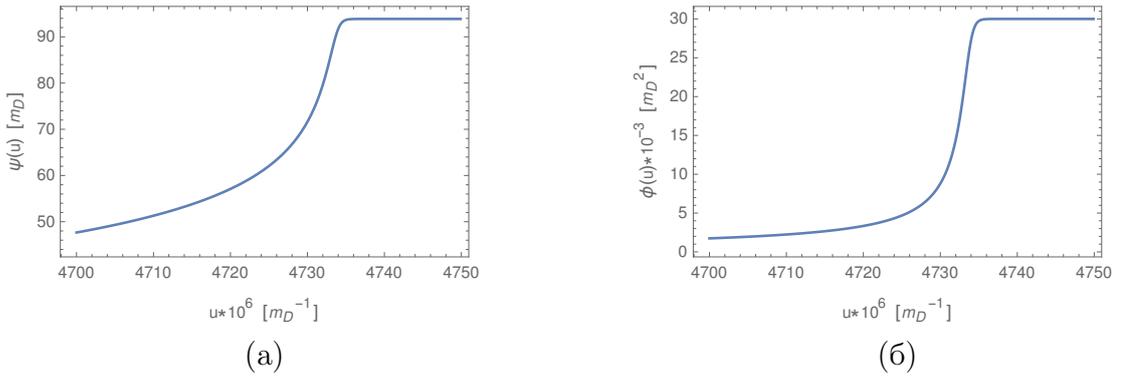


Рисунок 3 — Численное решение (14) при граничных условиях:  $\psi(0) = 0$  — левый минимум  $V(\psi)$  достигается внутри пузыря,  $\psi(u \rightarrow \infty) = \psi_{min}$  — правый минимум  $V(\psi)$  достигается для удаленного наблюдателя  $u \rightarrow \infty$  (и формирует нашу Вселенную). На графиках: (а) — непосредственное решение  $\psi(u)$ ; (б) — соответствующая ему функция  $\phi(u)$ . В данном примере радиус "пузыря"  $u_0 \approx 4.73 \cdot 10^8$ .

Плотность энергии доменной стенки  $\varepsilon_\psi$  мы можем вычислить как

компоненту  $T^{00}$  тензора энергии-импульса для лагранжиана скалярного поля  $\psi$ :

$$\varepsilon_\psi(u) = T^{00}(u) = \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial^0 \psi - \mathcal{L}_\psi g^{00} = \frac{1}{2} (\partial_u \psi)^2 + V(\psi) = 2V(\psi(u)). \quad (16)$$

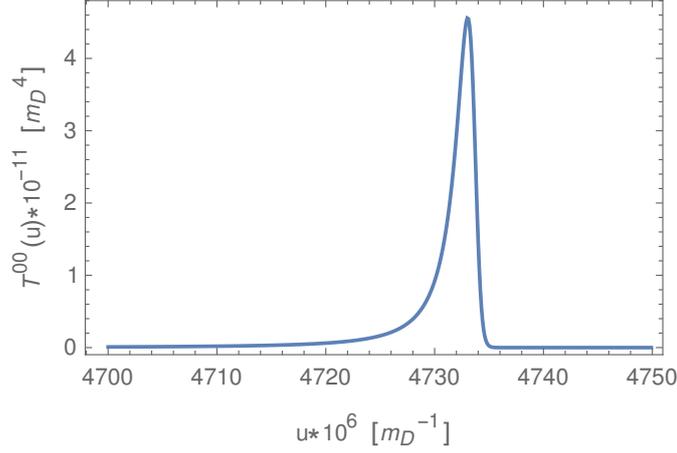


Рисунок 4 – Плотность энергии (16) для решения, представленного на Рис. 3б. Толщина доменной стенки  $\delta \sim 10^7$ .

Интегрирование по радиальной координате (16) для полученного численного решения (Рис. 3а) дает поверхностную плотность энергии доменной стенки в многомерных планковских единицах:

$$\sigma = \int_0^\infty \varepsilon_\psi(u) du = \int_0^{\psi_{min}} \frac{2V(\psi)}{\psi_u} d\psi = \int_0^{\psi_{min}} \sqrt{2V(\psi)} d\psi = 1.43 \cdot 10^{-4} \quad (17)$$

Переводя в четырехмерные планковские единицы, получаем наблюдаемую (в картине Эйнштейна) поверхностную плотность энергии  $\sigma \approx 1.43 \cdot 10^{-4} \cdot (16\pi^3/15)^{-3/2} \approx 7.52 \cdot 10^{-7} [m_4^3]$ .

Мы также можем оценить характерную толщину стенки  $\delta$ , зная поверхностную плотность энергии:

$$\sigma = \int_0^\infty 2V(\psi) du \approx 2 \frac{V_{max}}{2} \delta \implies \delta \approx \frac{\sigma}{V_{max}} \approx 6.31 \cdot 10^6. \quad (18)$$

Переводя в четырехмерные планковские единицы, получаем наблюдаемую (в картине Эйнштейна) толщину доменной стенки  $\delta \approx 6.31 \cdot 10^6 \cdot (16\pi^3/15)^{1/2} \approx 36.29 \cdot 10^6 [m_4^{-1}]$ .

Доменные стенки, рассмотренные в данной работе, являются весьма массивными, что при достаточно большом их радиусе  $u_0$  заставляет всю конфигурацию коллапсировать в черную дыру либо сразу, либо путем сжатия с доставкой её энергии под гравитационный радиус. Механизм образования и коллапса таких структур хорошо изучен в работах [...; 6—9] и приводит к возникновению первичных черных дыр широкого спектра масс в ранней Вселенной, что позволяет решить некоторые проблемы современной космологии.

## 5 Инфляционная генерация доменных стенок

Как было указано выше, скатывание поля  $\psi$  в правый минимум Рис. 2, создает наблюдаемую Вселенную. Для её образования требуется механизм космологической инфляции. В работах [...; 1], показано, что само поле  $\psi$  может выступать в качестве инфлатона, удовлетворяя всем наблюдаемым ограничениям на него [...; 10] и делая механизм образования Вселенной чисто гравитационным (1) (без привлечения дополнительных полей материи). Дабы не усложнять наше рассмотрение, мы, тем не менее, будем считать космологическую инфляцию внешним процессом с характерным параметром Хаббла  $H$ .

Механизм инфляционного производства вышеописанных "пузырей" альтернативного вакуума, хорошо известен [...; 11; 12]. В результате многократных квантовых флуктуаций, поле  $\psi$  может быть перекинуто из области скатывания в правый минимум в область скатывания в левый минимум, в некотором регионе инфляционной Вселенной. Этот регион продолжает расти во время инфляции, пока поле  $\psi$  "заморожено" и его конечный размер определяется временем возникновения. После окончания инфляции и "разморозки" поля, в этом регионе Вселенной должен возникнуть пространственный "пузырь" (Рис. 3а), окруженный эффективной доменной стенкой (в рассматриваемой модели (1) он на самом деле он является чисто гравитационным топологическим дефектом).

Несколько ограничений должны быть наложены на рабочую модель производства доменных стенок в рассмотренной  $f(R)$ -гравитации:

- Во время космологической инфляции 4-мерное пространство  $g_{\mu\nu}$  описывается метрикой де Ситтера с кривизной  $R_4 = 12H^2$ , где  $H$  — параметр Хаббла. Поэтому приближение (6) применимо только для значений поля  $\phi \gg 12H^2$ .
- Для генерации стенок посредством квантовых флуктуаций поля  $\psi$  (вблизи максимума потенциала 2) требуется его медленное скатывание:  $m_\psi = \sqrt{V''(\psi_{vac})} \ll H$ .
- Доменные стенки не должны быть слишком плотными, чтобы не доминировать над инфлатоном:  $\varepsilon_\psi \ll \varepsilon_{inf} \sim H^2 m_4^2$ .
- Флуктуации поля  $\psi$  во время инфляции должны быть не слишком большими, чтобы не допустить перепроизводства доменных стенок:  $\delta\psi = H/2\pi \ll \psi$ .

Выберем характерный масштаб инфляции  $H \sim 10^{14}$  [GeV]  $\sim 10^{-4}$  [ $m_4$ ]  $\sim 10^{-5}$ , что согласуется с наблюдательными данными [...; 10]. Для выбранных нами ранее параметров  $a_2 = -10$ ,  $c_1 = -100$ ,  $c_2 = 150$ ,  $\Lambda = 3/400$  лагранжиана (1), все вышеуказанные ограничения выполняются для космологической инфляции:

$$\begin{aligned}
\phi &\sim 10^{-4} - 10^{-2} \gg 12H^2 \sim 10^{-9}, \\
m_\psi &\sim 10^{-12} \ll H \sim 10^{-5}, \\
\varepsilon_\psi &\sim 10^{-11} \ll \varepsilon_{inf} \sim 10^{-9}, \\
\delta\psi &\sim 10^{-6} \ll \psi \sim 1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Все оценки приведены для картины Эйнштейна при  $n = 6$ , для которой  $m_4 = 5.75$ , при этом расчеты ведутся в системе  $m_D \equiv 1$ . Параметры  $a_2, c_1, c_2$  лагранжиана (1) имеют размерность [ $m_D^{-2}$ ], космологическая постоянная  $\Lambda$  имеет размерность [ $m_D^2$ ]. Все они определяются некоторым энергетическим масштабом  $a_2, c_1, c_2 \sim 1/\lambda^2$ ,  $\Lambda \sim \lambda^2$ . Из выбора параметров в разделе 3, видно что характерное значение поля  $\phi_{min} \sim \lambda^2$ , плотности

энергии стенки  $\sigma \sim (m_4 \lambda)^2$ , толщины стенки  $\delta \sim \lambda^{-2}$ . Для выбранных в разделе 3 параметров  $\lambda \sim 10^{-1}$ .

## 6 Заключение

Генерируемые сразу после окончания инфляции (при скатывании поля  $\psi$  в минимумы) доменные стенки являются очень массивными, как было показано в предыдущем пункте. Масса "пузыря", окруженного доменной стенкой пропорциональна квадрату его радиуса  $M = 4\pi u_0^2 \sigma$ , в то время как его гравитационный радиус пропорционален массе  $u_g = 2GM$ . Поэтому при радиусе  $u_0 > u_{cr} = 1/8\pi G\sigma$  весь "пузырь" оказывается под горизонтом и становится черной дырой для внешнего наблюдателя. Для полученных в предыдущем пункте параметров доменной стенки  $u_{cr} \sim 10^5 [m_4^{-1}]$ , в то время, как её толщина  $\delta \sim 10^7 [m_4^{-1}]$ . Это означает, что любая успешно сформировавшаяся доменная стенка сразу создает черную дыру. Вычисление спектра генерирующихся в такой модели ПЧД позволит наложить ограничения на возможные параметры лагранжиана (1) теорий  $f(R)$ -гравитации с компактным дополнительным пространством.

# Список литературы

1. *Fabris J. C., Popov A. A., Rubin S. G.* Multidimensional gravity with higher derivatives and inflation // *Physics Letters B.* — 2020. — Т. 806. — С. 135458.
2. *Bronnikov K. A., Rubin S. G.* Local regions with expanding extra dimensions // *Physics.* — 2021. — Т. 3, № 3. — С. 781—789.
3. *Bronnikov K. A., Rubin S. G.* Self-stabilization of extra dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Т. 73, № 12. — С. 124019.
4. *Kiselev V. G., Shnir Y. M.* Forced topological nontrivial field configurations // *Physical Review D.* — 1998. — Апр. — Т. 57, № 8. — С. 5174—5183.
5. *Lee B.-H., Lee W.* Vacuum bubbles in a de Sitter background and black hole pair creation // *Classical and Quantum Gravity.* — 2009. — Окт. — Т. 26, № 22. — С. 225002.
6. *Garriga J., Vilenkin A., Zhang J.* Black holes and the multiverse // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2016. — Февр. — Т. 2016, № 02. — С. 064—064.
7. *Liu J., Guo Z.-K., Cai R.-G.* Primordial black holes from cosmic domain walls // *Physical Review D.* — 2020. — ЯНВ. — Т. 101, № 2.
8. *Kawana K., Xie K.-P.* Primordial black holes from a cosmic phase transition: The collapse of Fermi-balls // *Physics Letters B.* — 2022. — ЯНВ. — Т. 824. — С. 136791.
9. *Rubin S. G., Khlopov M. Y., Sakharov A. S.* Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition // *ArXiv e-prints.* — 2000. — Май.
10. *Cline J. M.* TASI Lectures on Early Universe Cosmology: Inflation, Baryogenesis and Dark Matter. — 2021.

11. *Turner M. S., Weinberg E. J., Widrow L. M.* Bubble nucleation in first-order inflation and other cosmological phase transitions // *Phys. Rev. D.* — 1992. — СЕНТ. — Т. 46, ВЫП. 6. — С. 2384–2403.
12. *Mégevand A., Ramírez S.* Bubble nucleation and growth in very strong cosmological phase transitions // *Nuclear Physics B.* — 2017. — ИЮНЬ. — Т. 919. — С. 74–109.