

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

(НИЯУ «МИФИ»)

УДК 539.123, 519.688

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Разработка методов расчёта и анализа спектров реакторных
антинейтрино для фундаментальных и прикладных задач

Руководитель НИР,
к.ф.-м.н.

_____ О.А. Титов

Студент

_____ Д.В. Попов

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение | 3 |
| 1 Реакторные антинейтрино и их регистрация | 7 |
| 2 Метод конверсии | 11 |
| 2.1 Бета-распад | 12 |
| 2.1.1 Функция Ферми | 13 |
| 2.1.2 Поправки на конечный размер ядра | 17 |
| 2.1.3 Экранирование | 20 |
| 2.1.4 Радиационные поправки | 22 |
| 2.1.5 Слабый магнетизм | 23 |
| 2.2 Математическая модель конверсии КИ | 26 |
| 2.3 Анализ неопределенностей процедуры конверсии | 29 |
| 2.4 Доказательство устойчивости отношений выходов ОБР | 32 |
| 3 Конверсия КИ: решение проблемы РАА | 36 |
| 4 Заключение | 40 |
| Список использованных источников | 41 |
| Приложение А. Вспомогательные данные | 45 |
| Приложение В. Кумулятивные спектры реакторных антинейтрино для ^{235}U и ^{238}U | 46 |

ВВЕДЕНИЕ

Впервые возможность использовать ядерные реакторы в качестве источников антинейтрино обсуждал Б.М. Понтекорво [1]. Принцип работы реактора основан на управляемой, самоподдерживающейся цепной реакции деления тяжелых ядер, которая сопровождается выделением энергии. При одном таком делении образуется 2 (или более) нестабильных осколка с избыточным числом нейтронов, которые претерпевают серию β -распадов для возвращения в долину стабильности. На один акт деления приходится в среднем 6 β -распадов, что соответствует рождению 6 электронных антинейтрино с энергиями до 8 МэВ. В реакторе с тепловой мощностью 1 ГВт будет рождаться порядка 10^{20} электронных антинейтрино в секунду. Таким образом, в связи с тем, что реактор является интенсивным и чистым источником антинейтрино, знание спектров последних представляет большой интерес для фундаментальной науки (осцилляционные реакторные эксперименты [2–5]), а зависимость этих спектров от мощности реактора и его топливного состава открывает возможность прикладного применения спектроскопии реакторных антинейтрино (нейтринный метод мониторинга ядерных реакторов [6, 7]).

Существует два основных подхода к вычислению спектров реакторных антинейтрино: метод прямого суммирования и метод конверсии. Метод прямого суммирования (также называемый методом *ab initio* – методом расчёта из первых принципов) состоит в вычислении спектров антинейтрино от всех продуктов деления и их последующем сложении с учётом активности каждого продукта (см., например, обзор [8] и работу [9]). Всего в спектры электронов и антинейтрино дают вклад порядка нескольких тысяч ядерных переходов; для части переходов экспериментальные данные о схемах распада могут быть не вполне достоверными из-за эффекта пандемониума, а в ряде случаев данные совсем отсутствуют. Кроме того, зачастую имеется разброс в информации о кумулятивных выходах продуктов деления, приводимой в разных базах данных. Всё сказанное осложняет

предсказания спектров в рамках метода *ab initio*. Кроме того, метод предполагает, что при расчёте спектров для всех осколков деления используются одинаковые допущения и приближения, что не всегда правомерно (см., например, анализ, приведённый в работе [10]).

Метод конверсии основан на связи между бета-спектрами электронов и антинейтрино и заключается в следующем. Вначале экспериментально определяются кумулятивные спектры бета-электронов от каждого из делящихся изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{241}Pu . Полученный спектр описывают как сумму некоторого количества (обычно около 30) синтетических бета-спектров, методом подгонки определяя граничную энергию и относительный вес каждого из них. Далее для каждого из таких переходов производится пересчёт электронного спектра в антинейтринный и полученные спектры суммируются. Отметим, что в результате конверсии получают кумулятивные спектры, соответствующие эффективному времени облучения ядерного топлива $t_{\text{eff}} \approx 1$ сутки — примерно столько проводится облучение мишеней ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu при измерении кумулятивных спектров β -частиц. Между тем, время облучения топлива в реакторе наиболее распространенного типа ВВЭР достигает четырех лет. Эта ситуация была проанализирована в работах [11, 12]; в частности, были рассчитаны добавки (off-equilibrium effect) к конверсионному спектру антинейтрино, которые в рамках самой процедуры конверсии не учитываются.

Кумулятивные бета-спектры от основных изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu впервые были измерены в ходе беспрецедентного эксперимента группы института Лауэ–Ланжевена (ILL) [13–16] (см. также работу [17], где результаты измерений приведены с более мелким шагом) в 80-ых годах, этой же группой была проведена конверсия полученных данных в спектры антинейтрино.

В 2011 году для получения кумулятивных спектров антинейтрино был применен смешанный подход, который сочетал учет известных экспериментальных данных по бета-переходам и теоретической модели *ab initio*. В работе Muller et al. [18] были использованы данные о нескольких тысячах реальных бета-переходов в имеющихся базах данных, вклад неизученных переходов суммировался с помощью подгонки к измеренному бета-спектру 5-ю виртуальными бета-переходами. Этот новый метод продемон-

стрировал систематический положительный сдвиг нормировки спектров приблизительно на 3%. относительно предыдущих оценок. Позднее, в работе Huber [19] алгоритм конверсии спектров бета-электронов с использованием только виртуальных бета-переходов был улучшен за счет более точного описания разрешенных бета-спектров с помощью введения ряда поправок. Результаты согласовывались с данными Muller et al. [18] и полученные спектры антинейтрино, обозначенные далее, как $\rho_{\nu, \text{HM}}^{235}$, $\rho_{\nu, \text{HM}}^{238}$, $\rho_{\nu, \text{HM}}^{239}$, $\rho_{\nu, \text{HM}}^{241}$ (т.н. модель Huber-Muller), стали использоваться для анализа реакторных нейтринных экспериментов.

С момента открытия в экспериментах на ядерном реакторе, детектирование антинейтрино осуществляется, в основном, по реакции обратного бета-распада (ОБР):



Интенсивность взаимодействий реакторных антинейтрино обычно характеризуется величиной сечения, усредненного по числу нейтрино в акте деления — взвешенного сечения ОБР (в литературе можно встретить и другие названия — сечение на акт деления и выход реакции ОБР) [20, 21]:

$$\sigma^i = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \rho_{\nu}^i(E) \sigma_{\text{IBD}}(E) dE, \quad (2)$$

где $\sigma_{\text{IBD}}(E)$ — сечение реакции обратного бета-распада, $\rho_{\nu}^i(E)$ — спектр реакторных антинейтрино i -ого изотопа, E — энергия антинейтрино. Оказалось, что измеренный на стандартном удалении 15 – 100 м от реактора выход реакции ОБР в среднем на 5% меньше, чем ожидаемый по данным работ [18, 19]. Данную проблему, называемую в литературе реакторной антинейтринной аномалией ("Reactor Antineutrino Anomaly", RAA [22]), обычно связывают с двумя причинами:

- существованием стерильных нейтрино или другой новой физики;
- неточностью модельных спектров антинейтрино ^{235}U и ^{239}Pu , вызванных либо ошибками в измерениях спектров β -частиц группы ILL, либо ошибками самой процедуры конверсии, либо и тем, и другим (отметим, что расхождения наблюдались и с рассчитанным *ab initio* спектром ^{238}U).

Предварительные данные эксперимента по измерению отношений ку-

кумулятивных бета-спектров ^{235}U и ^{239}Pu , выполненного в Курчатовском институте (КИ), показывают, что аналогичное отношение спектров ILL [13–16] завышено примерно на 5% [24]. В экспериментах Daya Bay [2, 3], RENO [4] и STEREO [5] наблюдается дефицит антинейтрино от ^{235}U по сравнению с предсказаниями модели НМ, в то время как данные Daya Bay [2, 3] и RENO [4] для ^{239}Pu согласуются с этой моделью. С учётом этого факта и результатов КИ [24], в работе [25] группой КИ был произведён пересчёт спектра антинейтрино от ^{235}U — спектр $\rho_{\nu, \text{НМ}}^{235}$ модели НМ был поделен на масштабный коэффициент $\langle R \rangle \approx 1.05$, который является средним значением дифференциальной спектральной поправки $R(E)$, полученной группой КИ [24], описывающей отклонение кумулятивных бета-спектров ^{235}U групп ILL и КИ. Кроме того, поскольку в работе [27] при измерении кумулятивных бета-спектров от ^{238}U использовалась нормировка для бета-спектра ^{235}U из работы ILL [15], в [25] были скорректированы и спектры антинейтрино для ^{238}U .

Перед настоящей работой стояли следующие задачи:

- описать алгоритм конверсии, разработанный и используемый в предсказании спектров реакторных антинейтрино (модель КИ);
- сравнить результаты конверсии на основе моделей НМ и КИ;
- продемонстрировать связь отношения бета-спектров ^{235}U и ^{239}Pu с отношением выходов ОБР $\sigma^{235}/\sigma^{241}$;
- исследовать устойчивость отношения $\sigma^{235}/\sigma^{241}$ относительно вариаций процедуры конверсии.

1. РЕАКТОРНЫЕ АНТИНЕЙТРИНО И ИХ РЕГИСТРАЦИЯ

Полный реакторный спектр представляется как [8, 18]

$$S_\nu(E_\nu) = \sum_i f_i \cdot \rho_\nu^{(i)}(E_\nu), \quad (1.1)$$

где f_i — число делений i -ого изотопа, а $S_i(E_\nu)$ — соответствующий спектр антинейтрино i -ого изотопа, нормированный на одно деление.

Тепловая мощность реактора W_{th} связана с параметрами f_i [8]:

$$W_{th} = \sum_i f_i \cdot (E_i - E_\nu + E_n), \quad (1.2)$$

где E_i — энергия, выделяющаяся при делении i -ого изотопа, E_ν — энергия антинейтрино, E_n — энергия, обусловленная захватами нейтронов в материалах реактора. Величину $(E_i - E_\nu + E_n)$, которую мы будем обозначать ε_i , обычно называют эффективной тепловой энергией. Под i -тыми изотопами будем понимать ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu , так как распады именно этих элементов вносят основной вклад (более 99%) в тепловую мощность реактора. Величины ε_i для них рассчитаны с хорошей точностью [8].

Спектр антинейтрино $\rho_\nu^{(i)}(E_\nu)$ представляется суммой по всем делениям i -ого изотопа [18]:

$$\rho_\nu^{(i)}(E_\nu) = \sum_{f=1}^{N_f} A_f \rho_\nu^{(f)}(E_\nu, Q_f), \quad (1.3)$$

где A_f — активность f -ого продукта деления, нормированная на распад i -ого изотопа, Q_f — граничная энергия бета-распада. $\rho_f(E_\nu)$ в свою очередь является суммой по всем модам (ветвям), связывающим основное состояние родительского ядра с различными возбужденными состояниями дочерних

ядер [18]:

$$\rho_\nu^{(f)}(E_\nu) = \sum_{b=1}^{N_b} \text{BR}_f^b \rho_\nu^{(b)}(E_\nu, Q_f, Z_f, A_f), \quad (1.4)$$

где BR_f^b — коэффициент ветвления (branching) — доля f -ых ядер, распадающихся по данной b -ой ветви относительно всех f -ых ядер, Z_f и A_f — заряд и атомный номер f -ого ядра соответственно.

Одиночный бета-спектр $\rho_\beta^{(b)}$ имеет вид [39]

$$\rho_\beta^{(b)} = k^{(b)} \cdot p_\beta E_\beta (Q_f - T_\beta)^2 \cdot F(Z_f, E_\beta) \cdot C^{(b)}(E_\beta) \cdot \delta^{(b)}(Z_f, A_f, E_\beta), \quad (1.5)$$

где $k^{(b)}$ — нормировочный множитель, $p_\beta, T_\beta, E_\beta$ — модуль 3-импульса, кинетическая и полная энергии электрона соответственно, $F(Z_f, E_\beta)$ — функция Ферми, описывающая кулоновское взаимодействие β -электрона с дочерним ядром. Множитель $C^{(b)}(E_\beta)$ — фактор формы — включает в себе ядерный матричный элемент и зависит от запрещенности перехода (в случае разрешенных переходов $C_f^b(E_\beta) = 1$). Наконец, множитель $\delta^{(b)}(Z_f, A_f, E_\beta)$ содержит различные поправки к одиночному спектру (связанные, например, с конечными размерами ядер, экранированием дочернего ядра от β -электронов электронами с атомных оболочек и т.д.), наиболее существенные из которых будут далее обсуждаться дополнительно.

Для получения одиночного спектра антинейтрино достаточно сделать замену в выражении (1.5), соответствующую закону сохранения энергии: $T_\beta \rightarrow Q_f - T_\beta$ и изменить поправки, входящие в $\delta^{(b)}(Z_f, A_f, E_\beta)$, если для антинейтринного спектра они имеют отличный вид, чем для бета-спектра.

Связь потока реакторных антинейтрино от N ядерных реакторов с кумулятивными спектрами реакторных антинейтрино от основных изотопов $i = {}^{235}\text{U}, {}^{238}\text{U}, {}^{239}\text{Pu}, {}^{241}\text{Pu}$ дается следующим выражением:

$$\Phi_\nu(E_\nu) = \sum_{r=1}^N \sum_i \frac{W_{th}^{(r)}}{\varepsilon_i} \frac{f_i^{(r)} \rho_\nu^{(i)}(E_\nu)}{4\pi L_r^2}, \quad (1.6)$$

где $W_{th}^{(r)}$ — тепловая мощность реактора под номером r , находящегося на расстоянии L_r до точки наблюдения.

Для регистрации антинейтрино, как было отмечено выше, в основном используется реакция обратного бета-распада (ОБР):

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \quad (1.7)$$

имеющая кинематический порог [20, 21]

$$E_{\text{thr}} = \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p} \approx 1.806 \text{ МэВ}, \quad (1.8)$$

где m_n, m_p и m_e — массы нейтрона, протона и электрона соответственно.

Сечение реакции ОБР в наиболее общем виде представлено в работах [20, 21]. В релятивистски-инвариантной форме дифференциальное сечение ОБР имеет вид [20]:

$$\frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dt} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{4\pi(s - m_p^2)^2} \sum_{i=1}^7 A_i(s, t), \quad (1.9)$$

где G_F — постоянная Ферми слабого взаимодействия, V_{ud} — ud -элемент СКМ-матрицы смешивания, $s = (p_p^\mu + p_\nu^\mu)^2$, $t = (p_e^\mu - p_\nu^\mu)^2$ — мандельштамовские переменные, p^μ — 4-импульс. Явный вид функций $A_i(s, t)$ можно найти в приложении работы [20].

В системе покоя протона, где $s = 2m_p E_\nu$, $t = m_n^2 - m_p^2 - 2m_p(E_\nu - E_e)$, дифференциальное сечение ОБР записывается как

$$\frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_e}(E_e, E_\nu) = 2m_p \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dt}. \quad (1.10)$$

Сечение реакции ОБР крайне мало (порядка 10^{-43} см^2) при энергиях реакторных антинейтрино, поэтому для эффективной регистрации необходимы достаточно большие объемы рабочего вещества детектора, в качестве которого обычно используют сцинтиллятор с высоким содержанием протонов. Рожденный в результате ОБР позитрон забирает большую часть энергии реакции, которую затем достаточно быстро (за несколько наносекунд) теряет в рабочем веществе за счет ионизационных и радиационных потерь, после чего происходит аннигиляция позитрона с электронами вещества в два γ -кванта с энергиями $m_e = 0.511 \text{ МэВ}$. Рожденный в результате

ОБР нейтрон замедляется и диффундирует в среде до момента захвата протоном с последующим испусканием γ -кванта с энергией 2.2 МэВ. Происходит это примерно через 200 мкс после реакции ОБР. В результате описанного процесса на выходе детектора появляются два сигнала — быстрый, от аннигиляции, и запаздывающий, от захвата нейтрона, являющийся естественным триггером реакции, при помощи которых можно рассчитать энергию позитрона и реконструировать энергию провзаимодействовавшего антинейтрино.

Восстановление спектра позитронов позволяет экспериментально получить выход реакции ОБР. Для изотопов ^{235}U и ^{239}Pu взвешенные сечения были впервые получены коллаборациями Daya Bay [2, 3] и RENO [4] в ходе многолетнего набора статистики. Кроме того, коллаборация Daya Bay получила спектры позитронов в потоках антинейтрино ^{235}U и ^{239}Pu [3], что создает реальные предпосылки точного определения спектров антинейтрино ρ_{ν}^{235} и ρ_{ν}^{239} .

2. МЕТОД КОНВЕРСИИ

По результатам эксперимента ILL [13–15] были получены кумулятивные бета-спектры от трех основных изотопов. Для преобразования бета-спектров в спектры антинейтрино была предложена следующая процедура: экспериментальный спектр i -ого изотопа был аппроксимирован функцией

$$\rho^{(i)}(E_\beta) = \sum_{n=1}^N a_n^{(i)} \rho_\beta(E_\beta, E_{0n}^{(i)}), \quad (2.1)$$

представляющей из себя сумму из N (для каждого i -ого изотопа число N выбиралось индивидуально) виртуальных одиночных бета-ветвей. По итогам аппроксимации были получены значения нормировочных коэффициентов (амплитуд) и конечных энергий $\{a_n^{(i)}, E_{0n}^{(i)}\}$ для каждого изотопа, после чего по известной связи $\rho_\beta(E_\beta)$ и $\rho_\nu(E_\nu)$ были рассчитаны соответствующие кумулятивные спектры антинейтрино.

Данная процедура расчета антинейтринных спектров в литературе получила названия метода конверсии и активно обсуждалась авторами достаточно длительное время. Так, в работе [31] был проведен анализ процедуры на Монте–Карло данных и получены ограничения на реализацию конверсии, гарантирующие погрешность преобразования порядка 1% в интервале энергий от 1 до 8 МэВ.

В работе Huber [19] предложена модель, реализующая более точную конверсию, чем модель группы ILL, с использованием дополнительных различных поправок к одиночным спектрам, которые учитываются в каждой ветви, подробно описан и рассчитан вклад систематических погрешностей самой процедуры.

2.1. БЕТА-РАСПАД

Для описание разрешенных бета-спектров было использовано следующее приближение:

$$\rho_{\beta}(T_{\beta}) = k p_{\beta} E_{\beta} (Q - T_{\beta})^2 F(Z, E_{\beta}) L_0(Z, E_{\beta}) C(Z, E_{\beta}, Q) S(Z, E_{\beta}) \times \\ \times G_{\beta}(E_{\beta}, Q) (1 + \delta_{\text{WM}}), \quad (2.2)$$

где k — нормировка, p_{β} — модуль импульса электрона, T_{β} и E_{β} — кинетическая и полная энергии электрона соответственно, Q — энергия реакции (суммарная кинетическая энергия электрона и антинейтрино), Z — заряд дочернего ядра, $F(Z, E_{\beta})$ — функция Ферми. Для уточнения формы спектра были использованы поправки с величиной вклада только более 1%: $L_0(Z, E_{\beta})$ и $C(Z, E_{\beta}, Q)$ — поправки на конечный радиус ядра и слабого взаимодействия, $S(Z, E_{\beta})$ — поправка на экранирование, $G_{\beta}(E_{\beta}, Q)$ — радиационная поправка, $(1 + \delta_{\text{WM}})$ — поправка на слабый магнетизм.

Спектр антинейтрино $\rho_{\nu}(E_{\nu})$ получается заменами $T_{\beta} \rightarrow Q - T_{\beta}$ и $G_{\beta} \rightarrow H_{\nu}$, где H_{ν} — радиационная поправка для спектра антинейтрино.

Отметим, что порядка 25–30 % переходов от общего числа в реальном реакторном спектре являются запрещенными. В работе [33] была исследована чувствительность отношения кумулятивных спектров бета-частиц и антинейтрино к наличию запрещенных переходов на основе метода *ab initio*; в этой же работе показано, что

$$1.00 \leq \left(\frac{\rho_{\beta}}{\rho_{\nu}} \right) \left(\frac{\rho_{\nu}^a}{\rho_{\beta}^a} \right) \leq 1.01, \quad (2.3)$$

где ρ_{β}, ρ_{ν} — реальные кумулятивные спектры, содержащие запрещенные переходы, $\rho_{\beta}^a, \rho_{\nu}^a$ — кумулятивные спектры, построенные с использованием только разрешенных переходов. В контексте процедуры конверсии спектр ρ_{β} соответствует экспериментальным данным ИЛ, ρ_{β}^a — подгоночному кумулятивному бета-спектру, который по своему построению в пределах погрешностей совпадает с ρ_{β} . Из этого и из результата [33] (выражение (2.3)) следует, что реальный спектр реакторных антинейтрино отличается от конверсионного, содержащего только разрешенные переходы, менее, чем

на 1%, что оправдывает использование только разрешенных переходов при реализации процедуры конверсии.

Обсудим каждую из предложенных поправок, её происхождение и вклад в форму одиночного спектра.

2.1.1. ФУНКЦИЯ ФЕРМИ

Функция Ферми $F(Z, E)$ описывает кулоновское взаимодействие точечного дочернего ядра с β -электроном. Формально она определяется как [35]

$$F(Z, E_\beta) = \frac{|\Psi_{\text{Coulomb}}|^2}{|\Psi_{\text{free}}|^2}, \quad (2.4)$$

где Ψ_{free} — свободное решение уравнения Дирака, Ψ_{Coulomb} — решение уравнения Дирака с кулоновским потенциалом. Явный вид функции Ферми описывается следующим уравнением [35]:

$$F(Z, E) = 2(\gamma + 1)(2p_\beta R)^{(2\gamma-1)} e^{(\pi\alpha Z E_\beta/p_\beta)} \cdot \frac{|\Gamma(\gamma + i\alpha Z E_\beta/p_\beta)|^2}{|\Gamma(2\gamma + 1)|^2}, \quad (2.5)$$

где $p_\beta = \sqrt{E_\beta^2 - m_\beta^2}$, — модуль 3-импульса электрона, $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$, α — постоянная тонкой структуры, $\Gamma(z)$ — гамма-функция комплексного аргумента, $R = R(A)$ — радиус ядра, для вычисления которого используем формулу Элтона [36]:

$$R(A) = 1.121A^{1/3} + 2.426A^{-1/3} - 6.614/A \text{ фм.} \quad (2.6)$$

На рисунке 2.1 представлен график функции Ферми (2.5) для $Z = 46$.

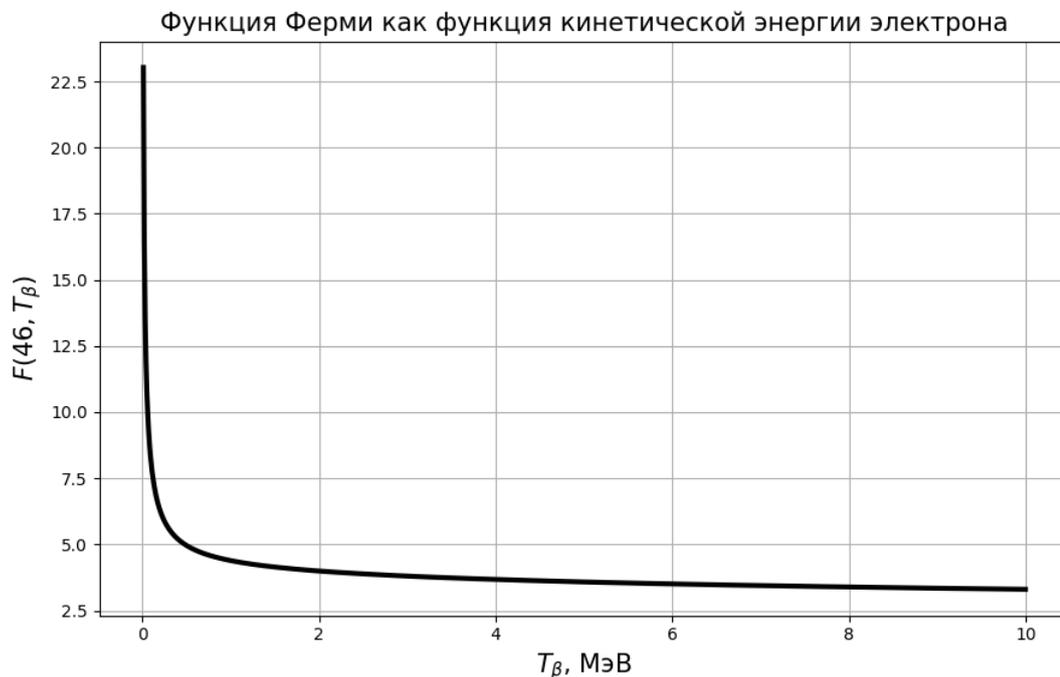


Рисунок 2.1 — Функция Ферми как функция кинетической энергии электрона

На следующих рисунках представлены нормированные спектры электронов и антинейтрино, иллюстрирующие вклад функции Ферми.

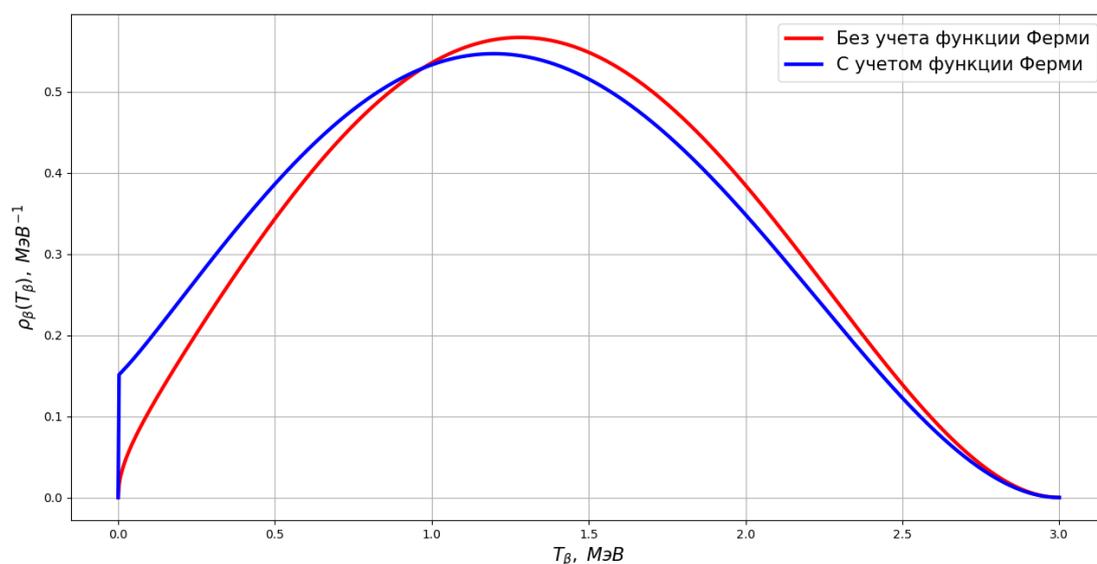


Рисунок 2.2 — Спектр электронов бета-распада в зависимости от кинетической энергии электрона T_β , $Z = 46$, $Q = 3$ МэВ.

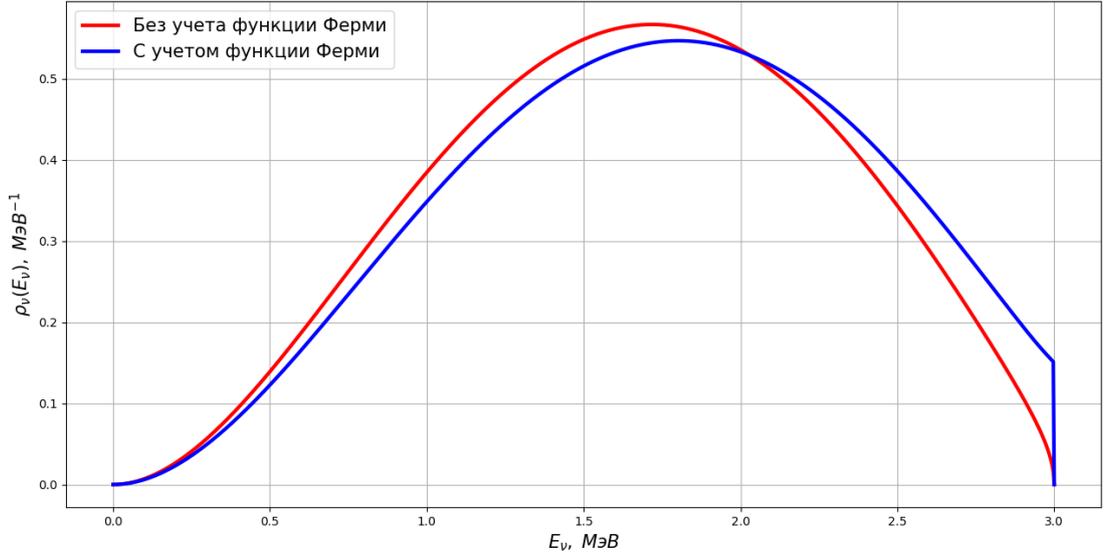


Рисунок 2.3 — Спектр антинейтрино бета-распада в зависимости от энергии антинейтрино E_ν , $Z = 46$, $Q = 3$ МэВ.

В случае метода конверсии важную роль играет не нормировка спектра (она находится путем подгонки), а его форма. По этой причине поступим следующим образом: пусть Δ — какая-либо поправка к одиночному бета-спектру (или спектру антинейтрино). Определим вклад поправки Δ в форму бета-спектра как

$$\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{k} p_\beta E_\beta (E_0 - E_\beta)^2 \cdot \Delta}{k p_\beta E_\beta (E_0 - E_\beta)^2} = \frac{\tilde{k}}{k} \cdot \Delta, \quad (2.7)$$

где \tilde{k} — нормировка ρ_β с учетом поправки Δ , а k — нормировка ρ_β без учета поправки. Со спектрами антинейтрино поступим аналогично. Заметим, что даже если Δ не зависит от энергии реакции Q , то $\tilde{\Delta}$ в свою очередь уже является функцией Q (эта зависимость неявно заложена в нормировочных коэффициентах \tilde{k} и k). В дальнейшем мы, обсуждая вклад какой-либо поправки в форму спектра, по умолчанию будем подразумевать именно нормированную поправку, согласно выражению (2.7).

Рассмотрим $\tilde{F}(Z, E)$ — вклад в форму одиночного спектра от функции Ферми для $Q = 3$ МэВ и $Q = 6$ МэВ:

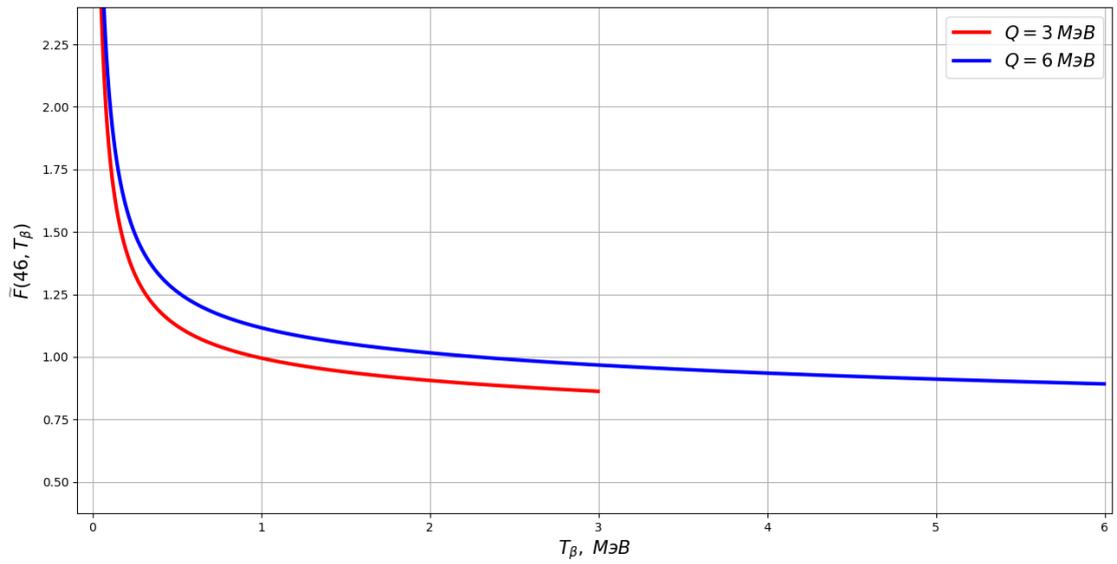


Рисунок 2.4 — Вклад функции Ферми в форму одиночного бета-спектра, $Z = 46$.

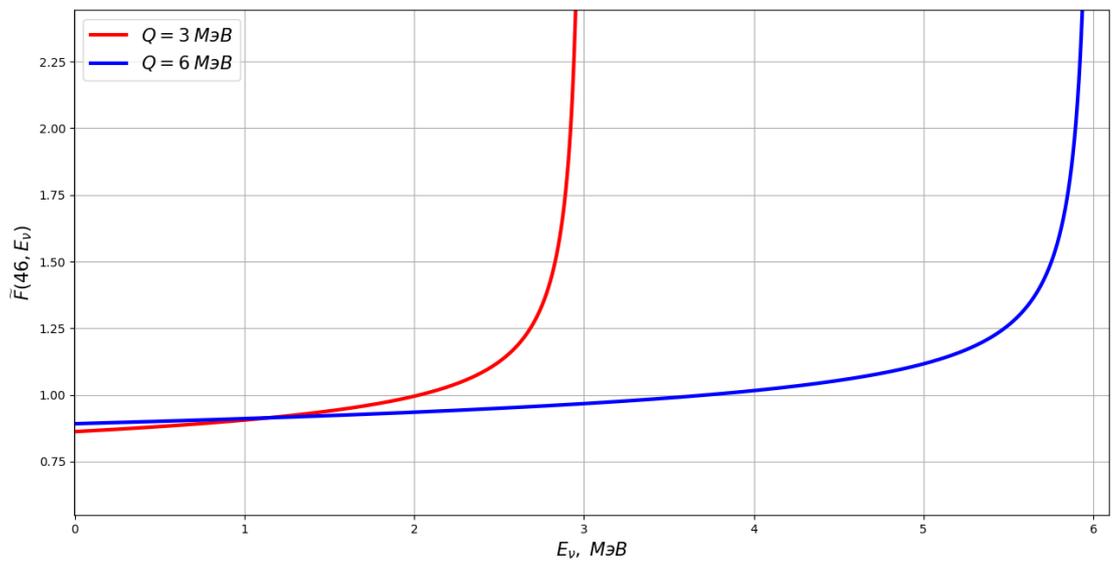


Рисунок 2.5 — Вклад функции Ферми в форму одиночного спектра анти-нейтрино, $Z = 46$.

2.1.2. ПОПРАВКИ НА КОНЕЧНЫЙ РАЗМЕР ЯДРА

При рассмотрении вместо точечного ядра ядра конечного размера, решить уравнение Дирака и получить выражение для уточненной функции Ферми $F(Z, E)$ аналитически не представляется возможным. По этой причине в литературе используют различные приближения, связанные с распределениями электрического заряда ρ_{cl} в ядре. Так, например, ядро можно представить в виде равномерно заряженного шара, радиус которого R подгоняется таким образом, чтобы получить правильное значение $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ дочернего ядра [39].

Численное решение уравнения Дирака в такой модели для стабильных ядер с $R = r_0 A^{1/3}$ было получено [34], а затем расширено [35] для всех изотопов. Для перехода от точечного ядра к ядру конечного размера достаточно умножить функцию Ферми $F_0(Z, E)$ на выражение $L_0(Z, E)$, которое в модели [35] имеет вид:

$$L_0^{\text{Wil.}}(Z, E) = 1 + \frac{13(\alpha Z)^2}{60} - ER\alpha Z \frac{(41 - 26\gamma)}{15(2\gamma - 1)} - \alpha Z R \gamma \frac{17 - 2\gamma}{30E(2\gamma - 1)} + \\ + a_{-1} \frac{R}{E} + \sum_{n=0}^5 a_n (ER)^n + 0.41(R - 0.0164)(\alpha Z)^{4.5}, \quad (2.8)$$

$$a_n = \sum_{j=1}^6 b_{j,n} (\alpha Z)^j$$

где $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$, значения коэффициентов $b_{j,n}$ представлены в таблице [A1](#).

Рисунок [2.6](#) иллюстрирует вклад поправки конечного размера $L_0^{\text{Wil.}}$ в форму спектров.

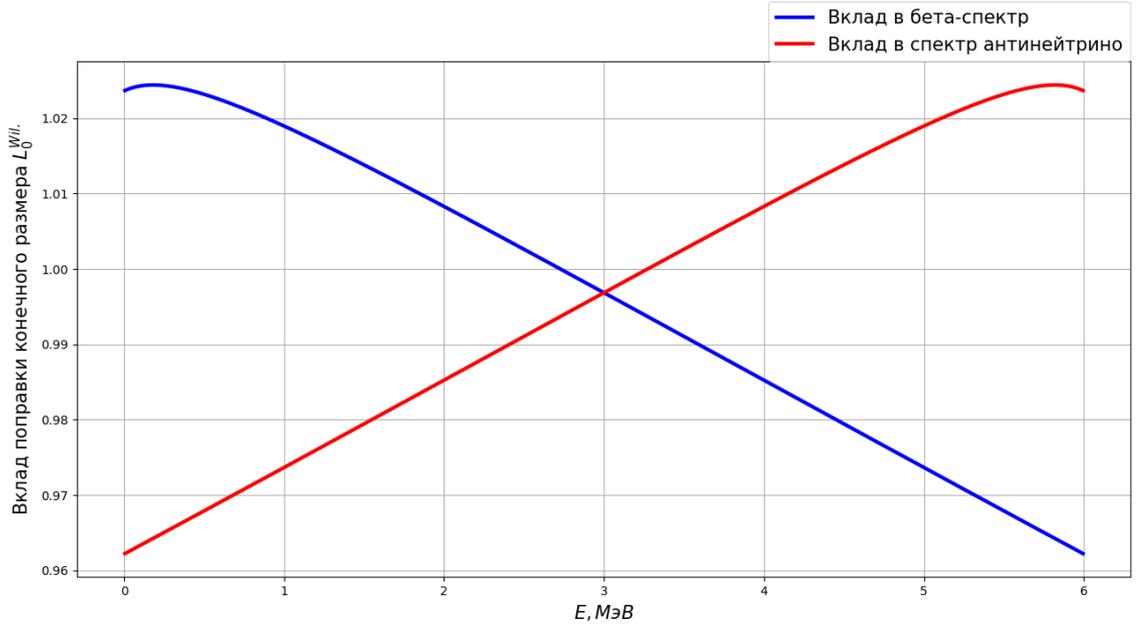


Рисунок 2.6 — Вклад поправки конечного размера $L_0^{\text{Wil.}}$ в форму спектров, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

Из рисунка 2.6 видно, что изменение формы достигает порядка 2–4% при $Q = 6$ МэВ (при $Q \approx 1 - 2$ МэВ вклад будет порядка 1 – 2%).

Помимо представленной выше модели, существует несколько других подходов. Так, в работе [8] рассматриваются более простые поправки вида:

$$L_0^{\text{Vog.}}(Z, E) = 1 - \frac{10}{9} Z \alpha R E, \quad (2.9)$$

$$L_0^{\text{Hayes}}(Z, E) = 1 - \frac{8}{5} Z \alpha R E \left(1 + \frac{9}{28} \frac{m_e^2}{E^2} \right). \quad (2.10)$$

Заметим, что выражения (2.8 - 2.10) представляются разложениями по малым величинам $(\alpha Z) \approx 0.34$ (при $Z \approx 46$) и $(ER) \approx 0.24$ (при $E \approx 8$ МэВ и $R \approx 6$ фм), причем (2.9) и (2.10) даны до первого порядка по (αZER) . Исходя из этого, выражение (2.8) представляется более точным, поэтому в модели конверсии КИ используется именно оно, т.е. $L_0 = L_0^{\text{Wil.}}$.

Описанная выше функция L_0 связана с конечным размером дочернего ядра при рассмотрении электромагнитного взаимодействия и является дополнением к функции Ферми. Помимо неё существует поправка на конечный размер родительского ядра, связанная уже с неточностью слабого взаимодействия (а именно — с конечными длинами волн лептонов и распределением нуклонов внутри ядра) [35]. Её явный вид зависит от

разрешенности и типа перехода. В случае разрешенных переходов гамов-теллеровского типа она описывается следующим уравнением [35, 39]:

$$C(Z, E, E_0) = 1 + C_0 + C_1 \cdot E + C_2 \cdot E^2, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{233}{630}(\alpha Z)^2 - \frac{(E_0 R)^2}{5} + \frac{2}{35}E_0 R \alpha Z, \\ C_1 &= -\frac{21}{35}R \alpha Z + \frac{4}{9}E_0 R^2, \\ C_2 &= -\frac{4}{9}R^2 \end{aligned}$$

На рисунке 2.7 показан вклад поправки $C(Z, E, E_0)$ в форму одиночных спектров, а на рисунке 2.8 — результирующий вклад обеих поправок конечного размера.

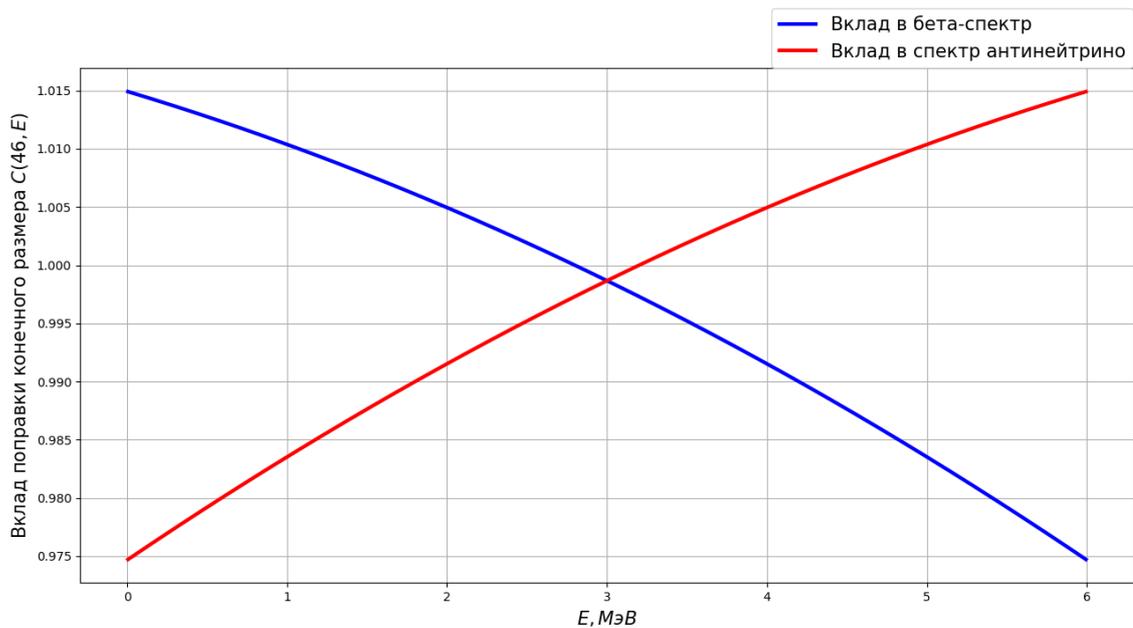


Рисунок 2.7 — Вклад поправки конечного размера $C(Z, E, E_0)$, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

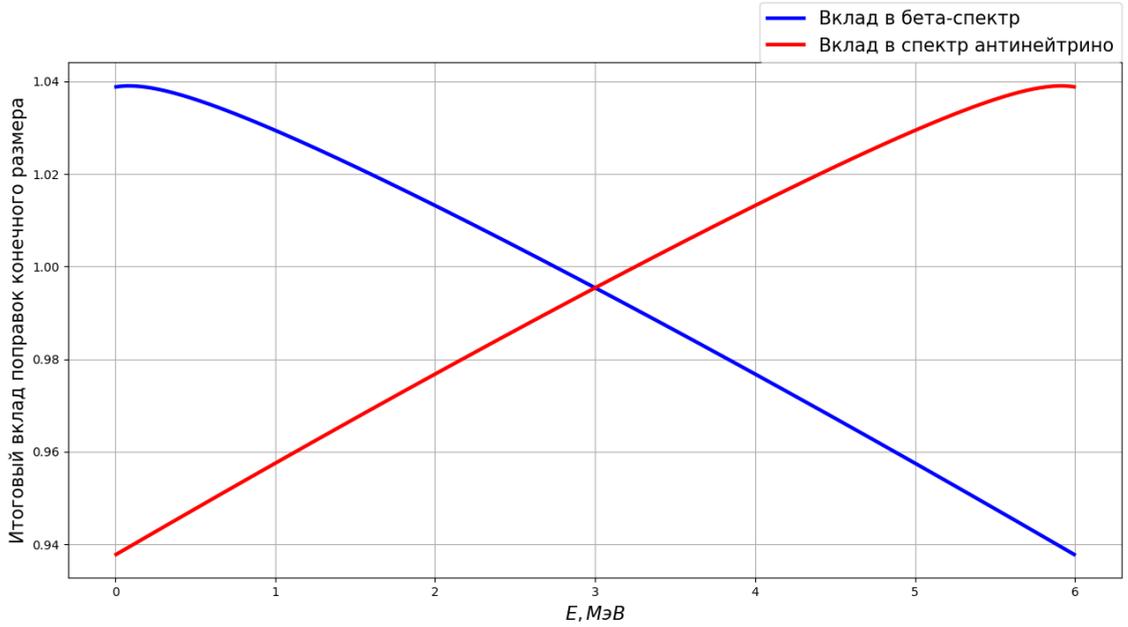


Рисунок 2.8 — Итоговый вклад поправок конечного размера, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

Из рисунков видно, что вклад $C(Z, E, E_0)$ меняет форму на $\approx 1.5 - 2.5\%$. Итоговый же вклад эффектов конечного размера может достигать до 6% .

2.1.3. ЭКРАНИРОВАНИЕ

Выбор поправки на экранирование S также неоднозначен ввиду существования различных моделей потенциала экранирования. Тем не менее, анализ, представленный в работе [39], показывает, что основные модели экранирования согласуются друг с другом в пределах процента. По этой причине мы используем простое выражение $S(Z, E_\beta)$, полученное в работе Behrens, Buhning [40] и наиболее широко применяемое в литературе:

$$S(Z, E) = \begin{cases} \frac{\bar{E}}{E} \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{(2\gamma-1)} e^{\pi(\bar{y}-y)} \frac{|\Gamma(\gamma+i\bar{y})|^2}{|\Gamma(\gamma+iy)|^2}, & \text{если } \bar{E} > m_e \\ 1, & \text{если } \bar{E} < m_e \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$\bar{E} = E - V_0, \quad \bar{p} = \sqrt{\bar{E}^2 - m_e^2}, \quad y = \frac{\alpha Z E}{p}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha Z \bar{E}}{\bar{p}},$$

V_0 — потенциал экранирования:

$$V_0 = \alpha^2(Z - 1)^{4/3}N(Z - 1), \quad (2.13)$$

$N(Z)$ — линейная интерполяция значений, представленных в таблице A2.

На рисунке 2.9 представлен вклад в форму одиночных спектров от поправки экранирования.

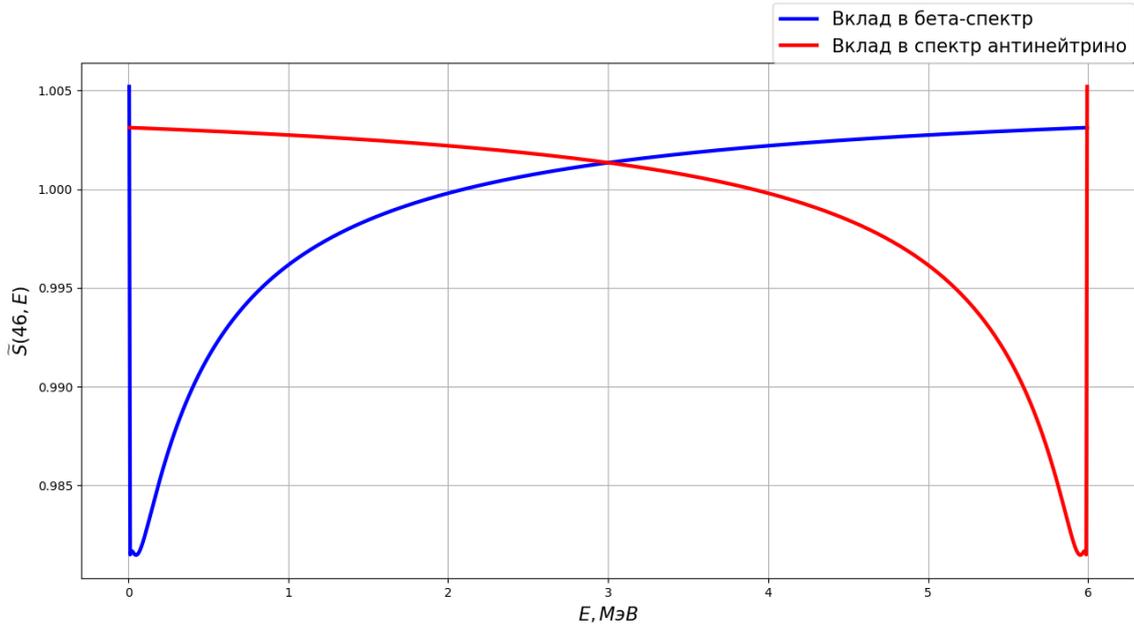


Рисунок 2.9 — Вклад поправки на экранирование в форму одиночного спектра, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

Как видно из рисунка 2.9, изменение формы спектра за счет экранирования может достигать до 2.5% при $Q \approx 6$ МэВ (при $Q \approx 2$ МэВ получим изменение формы на 1%, а при $Q \approx 8$ МэВ форма спектра изменится примерно на 2%).

2.1.4. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

Радиационные поправки учитывают испускание виртуальных и реальных фотонов при взаимодействии заряженных частиц, участвующих в реакции бета-распада.

Поправки первого порядка по α были вычислены в работах [41, 42] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_\beta(E_\beta, E_0) &= 1 + \alpha / (2\pi) \cdot g_\beta(E_\beta, E_0), \\ H_\nu(\hat{E}, E_0) &= 1 + \alpha / (2\pi) \cdot h_\nu(\hat{E}, E_0), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} g_\beta &= 3 \ln \left(\frac{m_N}{m_e} \right) - \frac{3}{4} + 4 \left(\frac{\tanh^{-1} \beta}{\beta} - 1 \right) \left[\frac{E_0 - E_\beta}{3E_\beta} - \frac{3}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\frac{2(E_0 - E_\beta)}{m_e} \right) \right] + \frac{4}{\beta} L \left(\frac{2\beta}{1 + \beta} \right) + \frac{1}{\beta} \tanh^{-1} \beta \cdot \\ &\quad \cdot \left[2(1 + \beta^2) + \frac{(E_0 - E_\beta)^2}{6E_\beta^2} - 4 \tanh^{-1} \beta \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} h_\nu &= 3 \ln \left(\frac{m_N}{m_e} \right) + \frac{23}{4} + \frac{8}{\hat{\beta}} L \left(\frac{2\hat{\beta}}{1 + \hat{\beta}} \right) + 8 \left(\frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} - 1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \ln \left(\frac{2\hat{E}\hat{\beta}}{m_e} \right) + 4 \frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} \left(\frac{7 + 3\hat{\beta}^2}{8} - 2 \tanh^{-1} \hat{\beta} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь m_N — масса нуклона, $\beta = p_\beta/E_\beta$, $\hat{E} = E_0 - E_\nu$, $\hat{\beta} = \hat{p}/\hat{E}$. Функция $L(x)$, фигурирующая в (2.15) — (2.16), есть функция Спенса, определяемая как

$$L(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \quad (2.17)$$

На рисунке 2.10 показан вклад радиационных поправок в бета-спектр и спектр антинейтрино.

В случае бета-спектра изменение формы составляет порядка 6%, в случае спектра антинейтрино порядка 0.5%.

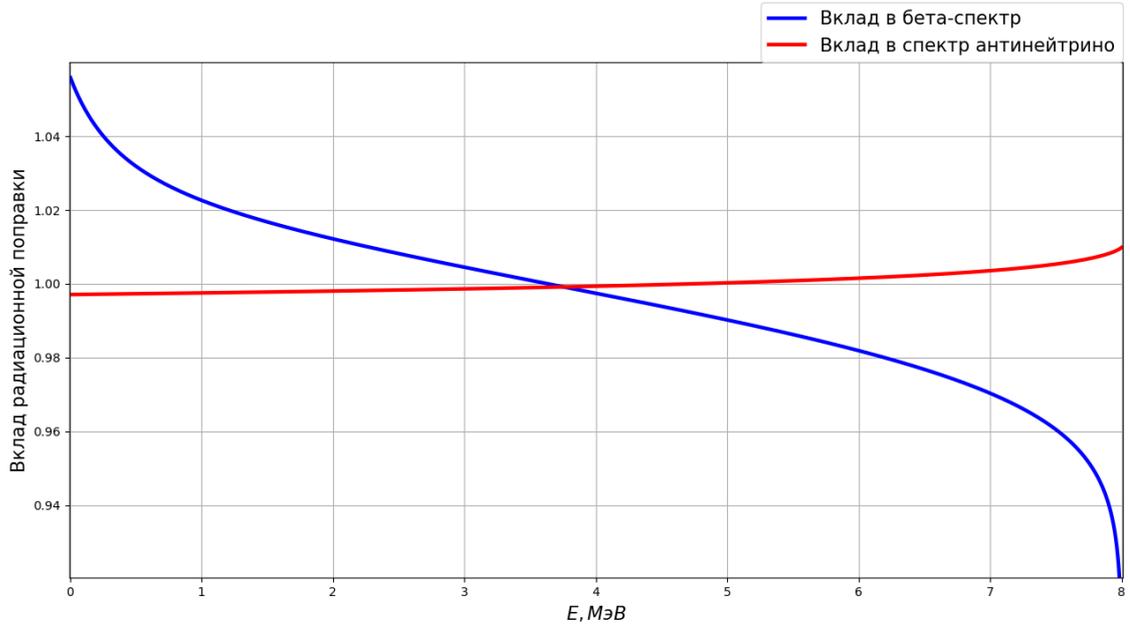


Рисунок 2.10 — Вклад радиационных поправок в форму одиночного спектра, $Q = 8$ МэВ.

Отметим, что для h_ν в первом порядке по α существует несколько более точная, но не аналитическая модель Batkin–Sundaresan [43] — в среднем, вклады [42] и [43] отличаются друг от друга на 5%, чем можно пренебречь с учетом малости самой поправки h_ν , характерный вклад которой в форму спектра составляет порядка 1% и проявляется только в жесткой области, что иллюстрирует рисунок 2.10.

2.1.5. СЛАБЫЙ МАГНЕТИЗМ

Слабый магнетизм вызван вкладом дополнительного формфактора, кроме g_a и g_v в слабое взаимодействие, что эффективно приводит в взаимодействию магнитного момента ядра и β -электрона. В случае разрешенных переходов гамов-теллеровского типа поправка имеет вид [44]:

$$\delta_{\text{WM}} = \frac{4}{3} E_\beta \left[\frac{\mu_\nu + \frac{\langle J_f | \vec{\Lambda} | J_i \rangle}{\langle J_f | \vec{\Sigma} | J_i \rangle}}{2m_N g_A} \right] \left(2 - \frac{m_e^2}{E_\beta^2} - \frac{E_0}{E_\beta} \right), \quad (2.18)$$

где m_N — масса нуклона, g_A — аксиальный формфактор (при низких энергиях его можно считать постоянной величиной), μ_ν — магнитный момент

нуклона, $\vec{\Sigma} = \sum_i \tau_i \vec{\sigma}_i$ — оператор спина, $\vec{\Lambda} = \sum_i \tau_i \vec{l}_i$ — оператор углового момента. Здесь $\vec{l}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$ — орбитальный момент i -ого нуклона, $\vec{\sigma}_i = 2\vec{S}_i$, \vec{S}_i — спин i -ого нуклона.

Строго говоря, отношение матричных элементов $\frac{\langle J_f | \vec{\Lambda} | J_i \rangle}{\langle J_f | \vec{\Sigma} | J_i \rangle}$ необходимо рассчитывать для каждого перехода индивидуально, однако часто в литературе для простоты его полагают равным $-1/2$. Данное приближение было подробно рассмотрено в работе [44], там же было показано, что оно вносит менее 1% неопределенности в кумулятивные спектры антинейтрино.

Таким образом, окончательно поправка слабого магнетизма имеет вид:

$$\delta_{\text{WM}} \approx \frac{4}{3} E_\beta \frac{\mu_\nu - 1/2}{g_A m_N} \left(1 - \frac{m_e^2}{2E_\beta^2} - \frac{E_0}{2E_\beta} \right) \approx 0.5\% E_\beta \quad (2.19)$$

На рисунке 2.11 показан вклад поправки слабого магнетизма $1 + \delta_{\text{WM}}$. Из рисунка видно, что слабый магнетизм меняет форму одиночного спектра примерно на 2 - 2.5% при высоких значениях Q (при низких $Q \approx 1 - 2$ МэВ вклад будет порядка 1%).

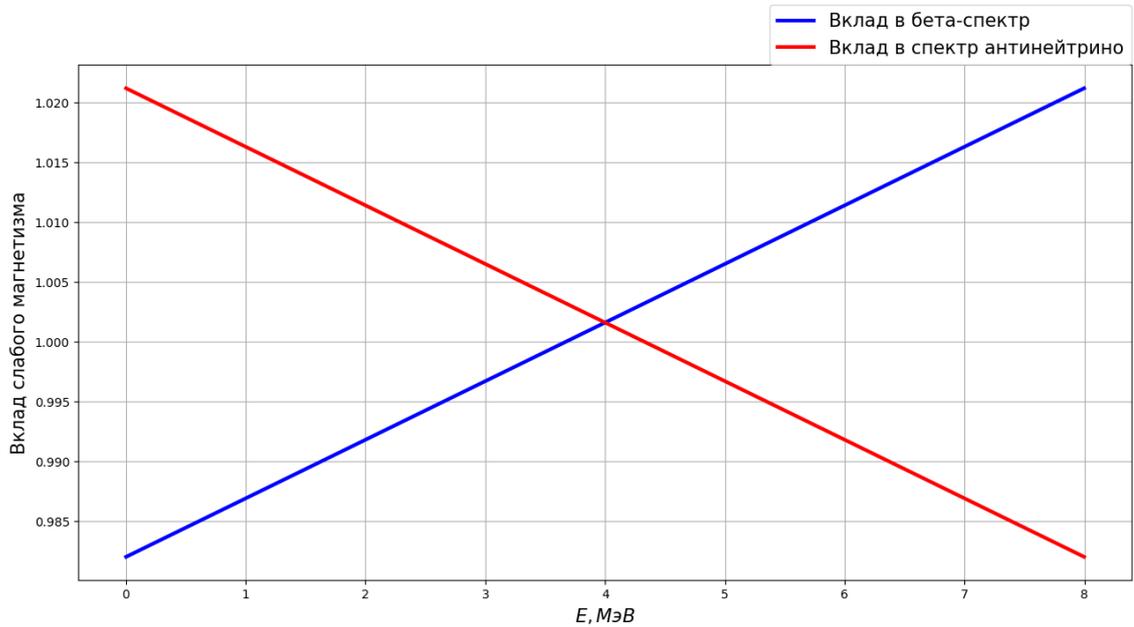


Рисунок 2.11 — Вклад поправки слабого магнетизма к форме одиночного спектра, $Q = 8$ МэВ.

Таблица 1. Используемые поправки к одиночному бета-спектру

| Поправка Δ | Физ. смысл | $\max 1 - \Delta , \%$ | Источник |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------|
| Функция Ферми $F(Z, E_\beta)$ | Учет кулоновского взаимодействия дочернего ядра с β -электроном | ≈ 100 | [35] |
| Конечный размер $L(Z, E_\beta)$ | Учет неточности дочернего ядра | ≈ 2 | [35] |
| Конечный размер $C(Z, E_\beta, Q)$ | Учет конечных длин волн лептонов | ≈ 2.5 | [35] |
| Экранирование $S(Z, E_\beta)$ | Учет экранирования заряда дочернего ядра электронами атома | ≈ 2.5 | [40] |
| Радиационная поправка $G_\beta(E_\beta, Q)$ | Учет испускания виртуальных/реальных фотонов при бета-распаде | ≈ 6 | [41] |
| Радиационная поправка $H_\nu(E_\nu, Q)$ | | ≈ 1 | [42] |
| Слабый магнетизм $1 + \delta_{WM}$ | Учет вклада дополнительного формфактора, кроме g_a и g_v | ≈ 2.5 | [44] |

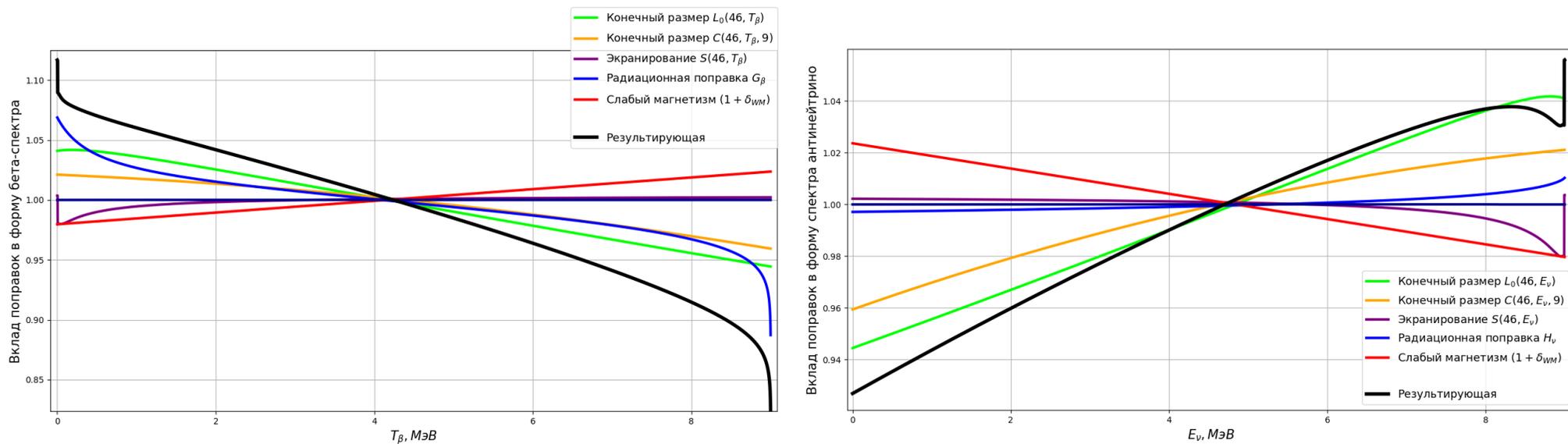


Рисунок 2.12 — Вклад поправок в форму спектров для $Z = 46$ и $Q = 9$ МэВ

2.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНВЕРСИИ КИ

Пусть имеется экспериментально измеренный кумулятивный бета-спектр $\rho_\beta = \left\{ \rho_\beta^{(i)} \pm \Delta\rho_\beta^{(i)} \right\}_{i=1}^N$, содержащий N точек. Выберем пробное число точек \tilde{s} , начиная с последнего значения: $S_{\tilde{s}}^N = \left\{ \rho_\beta^{(N-\tilde{s})}, \rho_\beta^{(N-\tilde{s}-1)}, \dots, \rho_\beta^{(N)} \right\}$, и аппроксимируем их функцией $a\rho_\beta(T_\beta, Q)$ с такими параметрами a и Q , что значение функционала

$$R = R(a, Q) = \sum_{i=N-\tilde{s}}^N \left(\rho_\beta^{(i)} - a\rho_\beta(T_\beta^{(i)}, Q) \right)^2 \quad (2.20)$$

минимально. Из этого условия находятся значения $\{\tilde{a}_N, \tilde{Q}_N\}$, соответствующие срезу $S_{\tilde{s}}^N$, т.е.

$$\{\tilde{a}_N, \tilde{Q}_N\} = \operatorname{argmin} [R(a, Q)] . \quad (2.21)$$

После этого строится функция $\tilde{a}_N \rho_\beta(T_\beta, \tilde{Q}_N)$, которая до некоторого значения ρ_β^{N-s} целиком лежит в полосе погрешностей исходного кумулятивного бета-спектра. Значение

$$s = \min \left\{ \tilde{s} : \left(\rho_\beta^{(N-\tilde{s})} - \tilde{a}_N \rho_\beta(T_\beta^{(N-\tilde{s})}, \tilde{Q}_N) \right) \geq \Delta\rho_\beta^{(N-\tilde{s})} \right\} \quad (2.22)$$

определяет истинное число точек s в первом срезе. Для набора $S_s^N = \left\{ \rho_\beta^{(N-s)}, \rho_\beta^{(N-s-1)}, \dots, \rho_\beta^{(N)} \right\}$ описанная выше процедура аппроксимации повторяется, находятся истинные значения a_N и Q_N . Полученный подгоночный спектр вычитается из исходного кумулятивного:

$$\rho_\beta^{(i)} == \rho_\beta^{(i)} - a_N \rho_\beta(T_\beta^{(i)}, Q_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.23)$$

где "==" означает операцию присваивания.

Алгоритм, описанный выше, итерационно повторяется до тех пор, пока весь экспериментальный спектр ρ_β не будет описан, в результате чего получается набор значений $\{a_i, Q_i\}_{i=1}^M$ (M — число срезов), с помощью

которого строится кумулятивный спектр антинейтрино, соответствующий исходному ρ_β :

$$\rho_\nu(E_\nu) = \sum_{i=1}^M a_i \rho_\nu(E_\nu, Q_i) \quad (2.24)$$

Фактически, при таком алгоритме конверсии по экспериментальным данным группы ILL достаточно от 10 до 15 одиночных синтетических спектров в зависимости от изотопа. Из-за относительно небольшого числа подгоночных переходов на конвертированном спектре антинейтрино проявляются пилообразные скачки, связанные с учетом функции Ферми. Устранение этих скачков в рамках процедуры конверсии КИ проводится в 2 этапа.

На первом этапе к исходному набору синтетических бета-спектров, описывающих кумулятивный спектр, добавляются дополнительные, с заведомо меньшими весами. Параметры дополнительных бета-спектров определяются в процессе описания кумулятивного бета-спектра целиком с использованием как первичного, фиксированного набора, так и дополнительного. Отметим, что существующие модели конверсии предпочитают равномерное распределение одиночных спектров по энергетическому диапазону (около 5 одиночных спектров описывают отрезок энергии шириной 250 кэВ), в то время как реализация КИ распределяет спектры неравномерно - учитывается, что в мягкую область энергий реальных кумулятивных спектров вносят вклад большее число одиночных бета-ветвей, чем в жесткую.

На втором этапе проводится усреднение полученного антинейтринного спектра по бинам с шириной $h = 250$ кэВ [31]. В работе [32] дополнительно регуляризовать решение путем аппроксимации спектра функцией

$$y(E) = \exp \left(\sum_{j=1}^6 a_j E^{j-1} \right). \quad (2.25)$$

Бета-спектр и спектр антинейтрино зависят от трёх основных параметров — нормировочного коэффициента a , энергии конечной точки E_0 и заряда дочернего ядра Z (зависимостью от массового числа A мы пренебрегаем, она не вносит никакого значимого вклада [19]). Первые два из них, как показано выше, определяются в процессе аппроксимации. Технически, заряд Z тоже можно варьировать, однако это увеличит число степеней свободы в предложенной процедуре, делая её ещё более "нефизичной". Другой

вариант — взять некоторое фиксированное значение (к примеру, для ^{235}U положить $Z = 92/2 + 1 = 47$).

Данные варианты обсуждались в работе [31], в ней же проанализирован оптимальный вариант, который был использован при расчете спектров антинейтрино в эксперименте ILL [14, 15]. Предлагается ввести некоторый эффективный заряд $\langle Z \rangle$, который определяется с использованием ядерных баз данных как [31]:

$$\langle Z \rangle(E_0) = \frac{\sum_{Z,A} Y(Z, A) \sum_f \text{BR}_f(E_{0,f}) Z}{\sum_{Z,A} Y(Z, A) \sum_f \text{BR}_f(E_{0,f})} \quad (2.26)$$

где $Y(Z, A)$ — кумулятивный выход деления. Традиционно эту зависимость принято представлять в виде полинома второй степени [14, 15, 19, 31]:

$$\langle Z \rangle(E_0) = Z(E_0) = a_0 + a_1 E_0 + a_2 E_0^2 \quad (2.27)$$

Или же, в терминах энергии реакции Q :

$$Z(Q) = c_0 + c_1 Q + c_2 Q^2 \quad (2.28)$$

Мы будем использовать наборы коэффициентов c_i для аппроксимации $Z(Q)$, полученные в работе [19] для ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu и представленные в таблице 1. Отметим, что в определении [19] Z является зарядом родительского ядра.

Таблица 2. Коэффициенты параметризации $Z(Q)$ для выражения (2.28)

| ИЗОТОП | c_0 | c_1 | c_2 |
|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| ^{235}U | $48.992^{+0}_{-0.164}$ | $-0.399^{+0.161}_{-0}$ | $-0.084^{+0}_{-0.044}$ |
| ^{239}Pu | $49.650^{+0}_{-0.214}$ | $-0.447^{+0.036}_{-0}$ | $-0.089^{+0}_{-0.016}$ |
| ^{241}Pu | $49.906^{+0}_{-0.178}$ | $-0.510^{+0.160}_{-0}$ | $-0.044^{+0}_{-0.052}$ |

2.3. АНАЛИЗ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПРОЦЕДУРЫ КОНВЕРСИИ

Очевидно, что точность метода конверсии по реконструкции реального спектра антинейтрино ограничена, а использованный алгоритм содержит ряд предположений, которые вносят неопределенность в процедуру конверсии.

Во-первых, как было отмечено выше, измеренные бета-спектры не учитывают вклад от долгоживущих продуктов деления, т.к. длительность облучения мишеней изотопов урана и плутония составляла одни сутки. Известно [11], что влияние бета-переходов с временем жизни более суток увеличивает выход бета-электронов на 2-3% в области энергий до 3 МэВ. Также существует различие в энергетическом спектре нейтронов в исследовательском реакторе при облучении мишеней и в активной зоне промышленного реактора, что дает вклад надтепловых нейтронов в деления изотопов урана и плутония [11, 12].

Во-вторых, процедура подгонки с помощью варьирования параметров виртуальных бета-переходов не может обеспечить воспроизведение тонкой структуры спектра антинейтрино, особенно в жесткой области, в которой реальный спектр формируется лишь несколькими продуктами деления, имеющих специфику в схемах распада. Невысокая точность измеренного бета-спектра в жесткой области также вносит определенный произвол в процедуру подгонки и позволяет рассчитывать спектры антинейтрино до энергий, не превышающих 8 МэВ.

Источниками погрешностей процедуры конверсии являются:

- 1) Экспериментальная статистическая погрешность исходных данных и погрешность их нормировки;
- 2) Неопределенности в зависимости эффективного заряда $\langle Z \rangle$ от граничной энергии Q ;
- 3) Неопределенности в выражениях для различных поправок к бета-спектру (особенно в слабом магнетизме);
- 4) Погрешности параметров подгонки Q_i и k_i (и их трансляция с i -ой на $i + 1$ итерацию и т.д.);

- 5) Неопределенности в технических деталях реализации процедуры, таких как, например, вычитание одиночного спектра из кумулятивного;
- 6) Неопределенность в выборе сглаживающего окна при усреднении спектров антинейтрино на последнем этапе;
- 7) Погрешности округления, машинная точность и т.п.;

Подробный анализ вклада различных неопределенностей был проведен в работе Huber [19] — в частности, была проведена оценка ошибок, связанных с неопределенностями в зависимости $\langle Z \rangle(Q)$, влиянием слабого магнетизма и экспериментальными погрешностями в исходных данных группы ILL. Часть этого анализа воспроизведена в настоящей работе с использованием нового подхода, который будет описан ниже. Прежде всего отметим, что неопределенности 5-7 из представленного списка вносят наименьший вклад, который в конечном итоге полностью подавляется процедурой окончательной регуляризации решения - аппроксимации логарифма спектров полиномиальной функцией.

Для анализа неопределенностей конверсии предлагается следующий подход. Пусть в результате конверсии данных ILL ρ_β получены кумулятивные спектры бета-частиц $\rho_\beta^{(1)}(T_\beta)$ и антинейтрино $\rho_\nu^{(1)}(E_\nu)$ (смысл индекса (1) будет раскрыт ниже). Отметим, что по своему построению спектр $\rho_\beta^{(1)}(T_\beta)$ полностью совпадает с исходным ρ_β в пределах полосы погрешностей последнего. Добавим к конверсионному спектру $\rho_\beta^{(1)}(T_\beta)$ случайную погрешность $\delta\rho_\beta^{(1)}(T_\beta)$, подчиняющуюся тому же закону распределения и имеющую тот же масштаб, что погрешности экспериментальных данных ILL, после чего конвертируем уже возмущенный конверсионный спектр $\rho_\beta^{(1)}(T_\beta) + \delta\rho_\beta^{(1)}(T_\beta)$ по алгоритму КИ. В результате получим вторичные конверсионные спектры бета-частиц $\delta\rho_\beta^{(2)}(T_\beta)$ и антинейтрино $\delta\rho_\nu^{(2)}(E_\nu)$. Описанную процедуру можно повторить необходимое число раз, возмущая и конвертируя кумулятивные бета-спектры в спектры антинейтрино, среднее значение которых в пределе стремится к истинному спектру, а среднеквадратичный разброс значений характеризует ошибку процедуры конверсии, вызванную статистической погрешностей исходных данных.

Отметим, что модели Huber для оценки погрешностей такого типа используется похожий подход, с разницей в том, что вместо конверсионного спектра $\rho_\beta^{(1)}(T_\beta)$ использовался бета-спектр, рассчитанный методом *ab*

initio. Основное же преимущество предложенного метода повторной конверсии заключается в возможности дополнительного анализа неопределенностей процедуры преобразования путем сравнения конверсионных спектров $\rho_\nu^{(1)}(E_\nu)$ и $\rho_\nu^{(2)}(E_\nu)$, которые могут быть получены с использованием различного набора поправок.

Полученный результат оценки неопределенностей процедуры конверсии согласуется с результатами Huber [19]. Рисунок ниже иллюстрирует отклонения спектров антинейтрино, получаемых в результате повторной конверсии, от их среднего значения (представлена выборка для 100 итераций). Среднеквадратичный разброс значений в каждом энергетическом бине характеризует статистическую погрешность спектра.

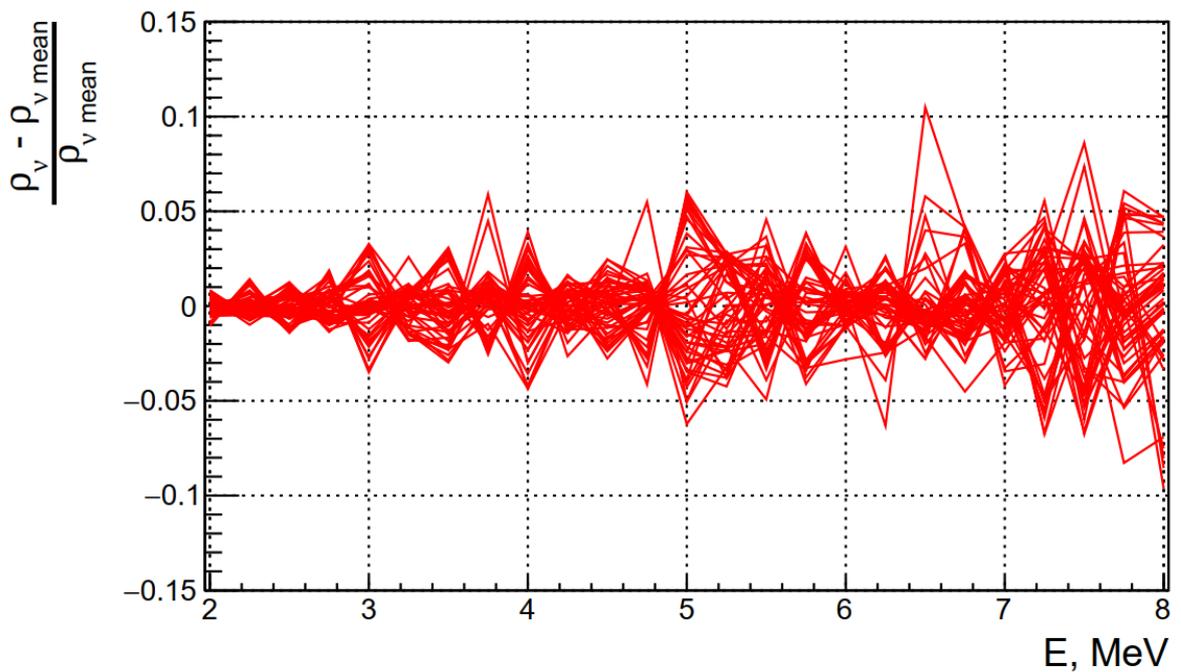


Рисунок 2.13 — Отклонения повторно конвертированных спектров антинейтрино от их среднего значения (представлена выборка для 100 итераций)

2.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОШЕНИЙ ВЫХОДОВ ОБР

Для анализа устойчивости отношения выходов ОБР основных изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu была проведена конверсия спектров группы ПЛ со всевозможными комбинациями поправок к одиночному бета-спектру в модели КИ, для каждой из которых были рассчитаны соответствующие выходы ОБР.

Запись $\sigma(\Delta)$ означает, что данный выход ОБР был рассчитан по кумулятивному спектру реакторных антинейтрино, полученному конверсией данных ПЛ с учетом поправки Δ . Так, $\Delta = 1$ соответствует конверсии без поправок (отметим, что функция Ферми в этом смысле поправкой не является и учитывается всегда). Аналогично, $\Delta = A$ соответствует включению всех поправок модели КИ, а запись $A - \Delta$ — что учтены все поправки, за исключением Δ . Полученные результаты представлены в таблицах 3–5 для трех основных изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu .

Таблица 3. Выходы ОБР ^{235}U для разных поправок

| Δ | $\sigma(\Delta)$, $10^{-43}\text{см}^2\text{дел}^{-1}$ | $\frac{\sigma(A) - \sigma(\Delta)}{\sigma(A)}$ | $\frac{\sigma(\Delta) - \sigma(1)}{\sigma(\Delta)}$ | $\frac{\sigma(A) - \sigma(A - \Delta)}{\sigma(A)}$ |
|---------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1 | 6.38 | 3.33% | - | - |
| (L ₀ C) | 6.62 | -0.30 % | 3.63 % | 3.64 % |
| S | 6.35 | 3.79 % | -0.47 % | -0.45 % |
| Rad | 6.46 | 2.12 % | 1.24 % | 1.36 % |
| WM | 6.32 | 4.24 % | -0.95 % | -1.06 % |
| (L ₀ C) S | 6.59 | 0.15 % | 3.19 % | 3.18 % |
| (L ₀ C) Rad | 6.71 | -1.67 % | 4.92 % | 4.85 % |
| (L ₀ C) WM | 6.55 | 0.76 % | 2.60 % | 2.58 % |
| S Rad | 6.43 | 2.58 % | 0.78 % | 0.76 % |
| S WM | 6.28 | 4.85 % | -1.59 % | -1.67% |
| Rad WM | 6.39 | 3.18 % | 0.16 % | 0.15 % |
| (L ₀ C) S Rad | 6.67 | -1.06 % | 4.35 % | 4.24 % |
| (L ₀ C) S WM | 6.51 | 1.36 % | 2.00 % | 2.12 % |
| (L ₀ C) Rad WM | 6.63 | -0.45 % | 3.77 % | 3.79 % |
| Rad S WM | 6.36 | 3.64 % | -0.31% | -0.30 % |
| A | 6.60 | - | 3.33% | - |

Таблица 4. Выходы ОБР ^{239}Pu для разных поправок

| Δ | $\sigma(\Delta),$ $10^{-43}\text{см}^2\text{дел}^{-1}$ | $\frac{\sigma(A) - \sigma(\Delta)}{\sigma(A)}$ | $\frac{\sigma(\Delta) - \sigma(1)}{\sigma(\Delta)}$ | $\frac{\sigma(A) - \sigma(A - \Delta)}{\sigma(A)}$ |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1 | 4.19 | 3.23% | - | - |
| (L ₀ C) | 4.34 | -0.23% | 3.46% | 3.70% |
| S | 4.17 | 3.70% | -0.48% | -0.46% |
| Rad | 4.24 | 2.10% | 1.18% | 1.39% |
| WM | 4.15 | 4.16% | -0.96% | -0.92% |
| (L ₀ C) S | 4.32 | 0.23% | 3.00% | 3.00% |
| (L ₀ C) Rad | 4.41 | -1.85% | 4.99% | 4.85% |
| (L ₀ C) WM | 4.30 | 0.69% | 2.56% | 2.77% |
| S Rad | 4.21 | 2.77% | 0.48% | 0.69% |
| S WM | 4.12 | 4.85% | -1.70% | -1.85% |
| Rad WM | 4.20 | 3.00% | 0.24% | 0.23% |
| (L ₀ C) S Rad | 4.37 | -0.92% | 4.12% | 4.16% |
| (L ₀ C) S WM | 4.27 | 1.39% | 1.87% | 2.10% |
| (L ₀ C) Rad WM | 4.35 | -0.46% | 3.68% | 3.70% |
| Rad S WM | 4.17 | 3.70% | -0.48% | -0.23% |
| A | 4.33 | - | 3.23% | - |

Таблица 5. Выходы ОБР ^{241}Pu для разных поправок

| Δ | $\sigma(\Delta),$ $10^{-43}\text{см}^2\text{дел}^{-1}$ | $\frac{\sigma(A) - \sigma(\Delta)}{\sigma(A)}$ | $\frac{\sigma(\Delta) - \sigma(1)}{\sigma(\Delta)}$ | $\frac{\sigma(A) - \sigma(A - \Delta)}{\sigma(A)}$ |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1 | 5.82 | 3.16% | - | - |
| (L ₀ C) | 6.04 | -0.50% | 3.64% | 3.66% |
| S | 5.78 | 3.83% | -0.70% | -0.67% |
| Rad | 5.88 | 2.16% | 1.02% | 1.16% |
| WM | 5.75 | 4.34% | -1.22% | -1.16% |
| (L ₀ C) S | 6.00 | 0.17% | 3.00% | 3.16% |
| (L ₀ C) Rad | 6.11 | -1.67% | 4.75% | 4.83% |
| (L ₀ C) WM | 5.97 | 0.67% | 2.52% | 2.66% |
| S Rad | 5.85 | 2.66% | 0.51% | 0.67% |
| S WM | 5.72 | 4.83% | -1.75% | -1.67% |
| Rad WM | 5.82 | 3.16% | 0% | 0.17% |
| (L ₀ C) S Rad | 6.08 | -1.16% | 4.28% | 4.34% |
| (L ₀ C) S WM | 5.94 | 1.16% | 2.02% | 2.16% |
| (L ₀ C) Rad WM | 6.05 | -0.67% | 3.80% | 3.83% |
| Rad S WM | 5.79 | 3.66% | -0.52% | -0.50% |
| A | 6.01 | - | 3.16% | - |

Отметим следующие наблюдения. Введем в рассмотрение функционал

$$h(\Delta) = \frac{\sigma(\Delta) - \sigma(1)}{\sigma(\Delta)} = \frac{\sigma(A) - \sigma(A - \Delta)}{\sigma(A)}. \quad (2.29)$$

Второе равенство в данном выражении выполняется с хорошей точностью, согласно расчетам, представленным в таблицах 3–5. Основными свойствами функционала $h(\Delta)$ является его линейность по поправкам, то выполнение равенства

$$h(\Delta_1\Delta_2) = h(\Delta_1) + h(\Delta_2), \quad (2.30)$$

и независимость от выбранного изотопа. Обращаем внимание, что оба представленных свойства выполняются с точностью долей процента. С этой же точностью выполняется следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta_1\Delta_2) &= \sigma(\Delta_1) \cdot [1 + h(\Delta_2)] = \sigma(\Delta_2) \cdot [1 + h(\Delta_1)] = \\ &= \sigma(1) \cdot [1 + h(\Delta_1\Delta_2)] = \sigma(1) \cdot [1 + h(\Delta_1) + h(\Delta_2)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Отсюда немедленно следует устойчивость отношения выходов ОБР:

$$\frac{\sigma^X(\Delta_1\Delta_2)}{\sigma^Y(\Delta_1\Delta_2)} = \frac{\sigma^X(\Delta_1)}{\sigma^Y(\Delta_1)} \cdot \frac{1 + h(\Delta_2)}{1 + h(\Delta_2)} = \frac{\sigma^X(\Delta_2)}{\sigma^Y(\Delta_2)} \cdot \frac{1 + h(\Delta_1)}{1 + h(\Delta_1)} = \frac{\sigma^X(1)}{\sigma^Y(1)}, \quad (2.32)$$

Данный вывод подтвержден расчетами, представленными в таблице 6 — отличие от постоянной величины наблюдается на уровне долей процента, чем можно пренебречь по сравнению с погрешностью отношений выходов ОБР, составляющей 3–4 %.

Таким образом, отношение выходов ОБР зависит только от отношения исходных бета-спектров и является устойчивой величиной относительно процедуры преобразования.

Таблица 6. Выходы ОБР, рассчитанные по конверсионным спектрам, учитывающим различные поправки, для основных изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu , и их отношения. Сечения приведены в единицах $10^{-43}\text{см}^2\text{дел}^{-1}$.

| Δ | σ^{235} | σ^{239} | σ^{241} | $\sigma^{235}/\sigma^{239}$ | $\sigma^{235}/\sigma^{241}$ |
|---------------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | 6.38 | 4.19 | 5.82 | 1.522 | 1.096 |
| (L ₀ C) | 6.62 | 4.34 | 6.04 | 1.525 | 1.096 |
| S | 6.35 | 4.17 | 5.78 | 1.522 | 1.098 |
| Rad | 6.46 | 4.24 | 5.88 | 1.524 | 1.098 |
| WM | 6.32 | 4.15 | 5.75 | 1.522 | 1.099 |
| (L ₀ C) S | 6.59 | 4.32 | 6.00 | 1.525 | 1.098 |
| (L ₀ C) Rad | 6.71 | 4.41 | 6.11 | 1.522 | 1.098 |
| (L ₀ C) WM | 6.55 | 4.30 | 5.97 | 1.523 | 1.097 |
| S Rad | 6.43 | 4.21 | 5.85 | 1.527 | 1.099 |
| S WM | 6.28 | 4.12 | 5.72 | 1.524 | 1.097 |
| Rad WM | 6.39 | 4.20 | 5.82 | 1.521 | 1.098 |
| (L ₀ C) S Rad | 6.67 | 4.37 | 6.08 | 1.526 | 1.097 |
| (L ₀ C) S WM | 6.51 | 4.27 | 5.94 | 1.525 | 1.096 |
| (L ₀ C) Rad WM | 6.63 | 4.35 | 6.05 | 1.524 | 1.096 |
| Rad S WM | 6.36 | 4.17 | 5.79 | 1.525 | 1.098 |
| A | 6.60 | 4.33 | 6.01 | 1.524 | 1.098 |

3. КОНВЕРСИЯ КИ: РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАА

Экспериментальные данные эксперимента ILL с мелким шагом (50 кэВ для ^{235}U и 100 кэВ для ^{239}Pu , ^{241}Pu) представлены в работе [?] (в дальнейшем мы будем обозначать их $\rho_{\beta, \text{ILL}}^i$, где индекс i принимает значения 235, 239 и 241 соответственно). Помимо этого, по результатам эксперимента НИЦ КИ [?] были получены данные вида:

$$R = \frac{\rho_{\beta, \text{КИ}}^{235} / \rho_{\beta, \text{ILL}}^{235}}{\rho_{\beta, \text{КИ}}^{239} / \rho_{\beta, \text{ILL}}^{239}}, \quad (3.1)$$

график которых представлен на рисунке 3.1. Отметим, что экспериментальные данные в [?] для ^{235}U приведены в интервале [1.5; 9.6] МэВ и для ^{239}Pu в [1.5; 8] МэВ. Экспериментальные данные НИЦ КИ лежат в интервале [1.5; 8] МэВ.

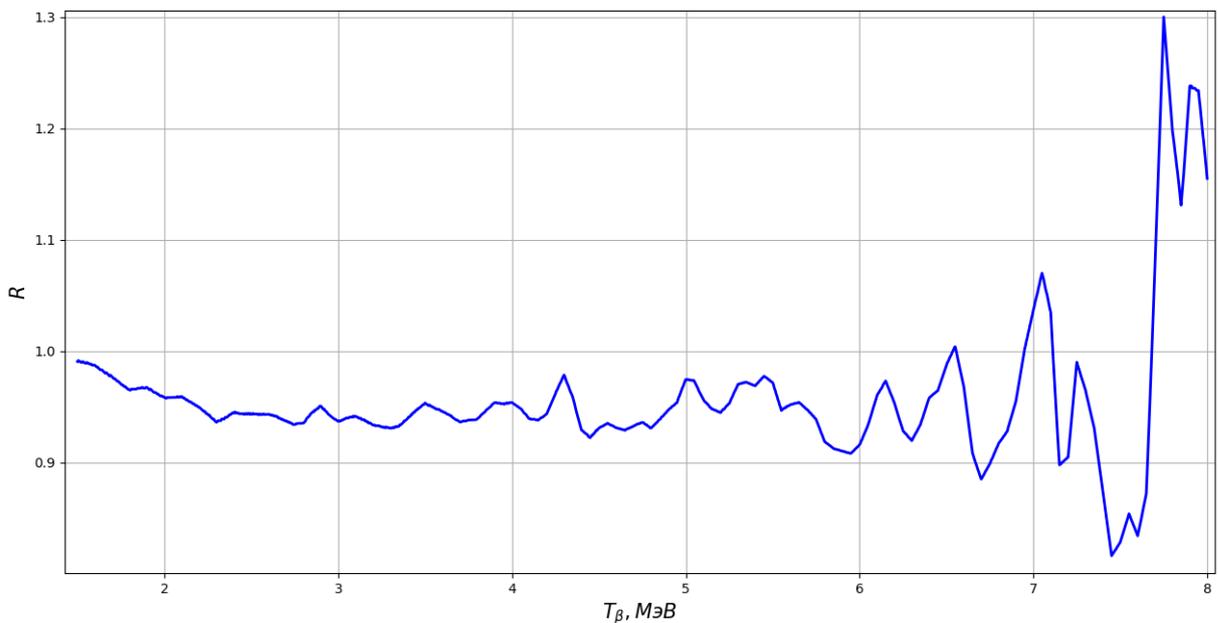


Рисунок 3.1 — Экспериментальные данные НИЦ КИ — отношение отношений кумулятивных спектров ^{235}U и ^{239}Pu (3.1)

График 3.1 иллюстрирует, что отношение $\rho_{\beta, KI}^{235}/\rho_{\beta, KI}^{239}$, в среднем, лежит ниже отношения $\rho_{\beta, ILL}^{235}/\rho_{\beta, ILL}^{239}$ на $\approx 5\%$.

Рассмотрим две предельные гипотезы:

- 1) Кривая спектра β -частиц ^{235}U группы ILL ошибочно завышена на $\approx 5\%$;
- 2) Кривая спектра β -частиц ^{239}Pu группы ILL ошибочно занижена на $\approx 5\%$;

Спектры $\rho_{\beta, KI}$ определим в соответствии с гипотезами как

$$\begin{aligned}\rho_{\beta, KI}^{235} &= \rho_{\beta, ILL}^{235} \cdot R, \\ \rho_{\beta, KI}^{239} &= \rho_{\beta, ILL}^{239} / R.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Для $\rho_{\beta, KI}^{235}$, $\rho_{\beta, ILL}^{235}$, $\rho_{\beta, KI}^{239}$, $\rho_{\beta, ILL}^{239}$ реализуем конверсию по изложенному в предыдущих параграфах алгоритму. Полученные результаты представлены на рисунках 3.2 — 3.3 (черные линии соответствуют сравнению нашей конверсии исходных данных ILL без учета спектральной поправки КИ и конверсии Huber [19]). Заметим, что различия моделей КИ и Huber в случае ^{235}U составляют порядка $\pm 0.5\%$ (при энергиях 8 МэВ разница увеличивается до $\pm 2\%$, что связано с выбором начальной точки конверсии), а в случае ^{239}Pu — до $\pm 4\%$. В среднем же модели друг с другом согласуются в пределах погрешностей процедуры преобразования.

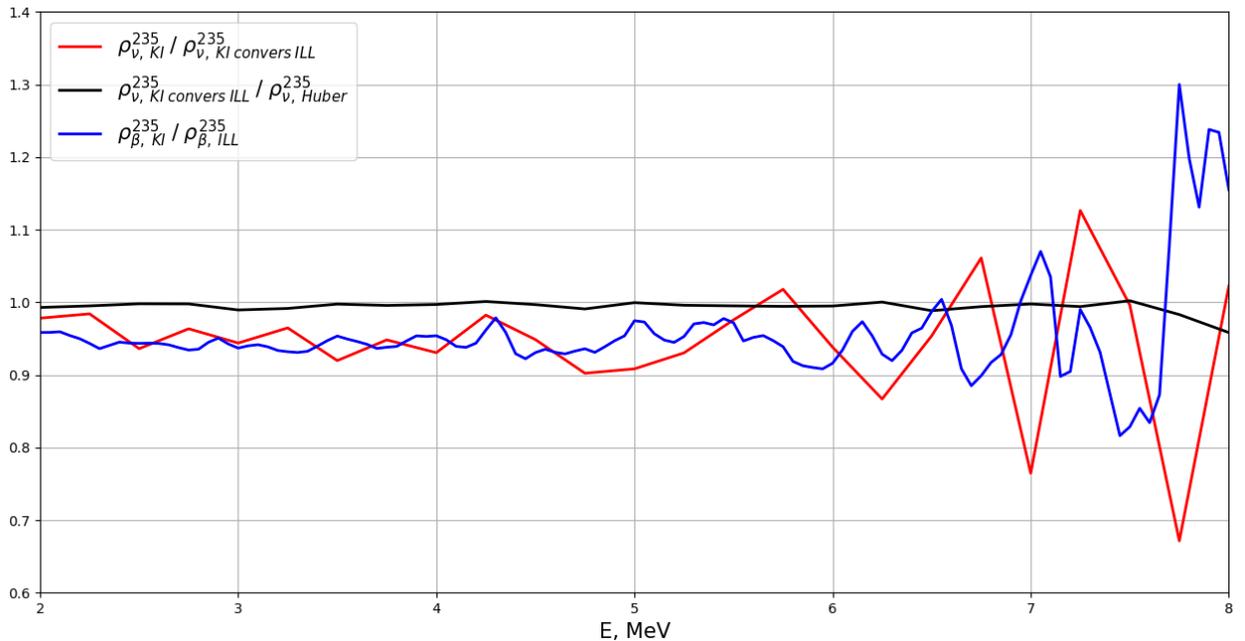


Рисунок 3.2 — Отношения спектров $\rho_{KI}^{235}/\rho_{ILL}^{235}$, гипотеза 1

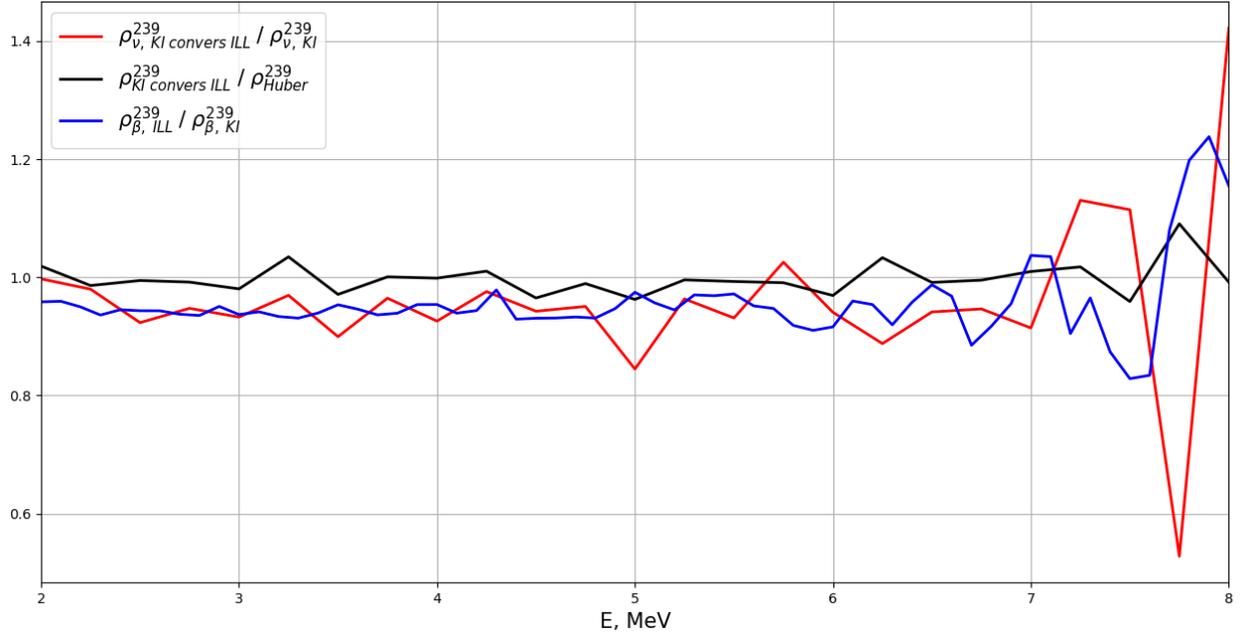


Рисунок 3.3 — Отношения спектров $\rho_{\text{ILL}}^{239}/\rho_{\text{KI}}^{239}$, гипотеза 2

Заметим, что процедура конверсии в среднем устойчива относительно изменения исходных спектров ILL на $\approx 5\%$ — спектры антинейтрино отличаются на эту же величину.

Расчет выходов ОБР для описанных моделей дает следующий результат:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{KI}}^{235} &= (6.26 \pm 0.12) \cdot 10^{-43} \text{ см}^2 \text{ дел}^{-1}, \\ \sigma_{\text{KI}}^{239} &= (4.55 \pm 0.12) \cdot 10^{-43} \text{ см}^2 \text{ дел}^{-1},\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{KI-ILL}}^{235} &= (6.60 \pm 0.14) \cdot 10^{-43} \text{ см}^2 \text{ дел}^{-1}, \\ \sigma_{\text{KI-ILL}}^{239} &= (4.33 \pm 0.12) \cdot 10^{-43} \text{ см}^2 \text{ дел}^{-1}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Отношения сечений с поправкой и без

$$\left(\frac{\sigma_{\text{KI}}^{235}}{\sigma_{\text{KI-ILL}}^{239}} \right) = \left(\frac{\sigma_{\text{KI-ILL}}^{235}}{\sigma_{\text{KI}}^{239}} \right) \approx 1.45 \pm 0.05 \quad (3.5)$$

являются постоянной величиной, не зависящей от выбора гипотезы, и отличаются от отношения сечений без учета спектральной поправки КИ на ту же величину $\langle R \rangle \approx 5\%$, на которую, в среднем, отличаются β -спектры. Данный результат согласуется с доказанной выше устойчивостью отноше-

ния выходов ОБР к процедуре конверсии и зависимостью последнего только от начальных данных по кумулятивным бета-спектрам.

В таблице 7 приведено итоговое сравнение измеренных [3, 4] сечений и расчетных.

Таблица 7. Экспериментальные и расчетные значения взвешенных сечений в единицах 10^{-43} см² дел⁻¹.

| | σ^{235} | σ^{239} | $\sigma^{235}/\sigma^{239}$ |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------------------|
| Daya Bay [3] | 6.10 ± 0.15 | 4.32 ± 0.25 | 1.41 ± 0.09 |
| RENO [4] | 6.15 ± 0.19 | 4.18 ± 0.26 | 1.47 ± 0.10 |
| Среднее | ≈ 6.13 | ≈ 4.25 | ≈ 1.44 |
| KI-ILL | 6.60 ± 0.14 | 4.33 ± 0.11 | 1.53 ± 0.05 |
| KI | 6.26 ± 0.12 | 4.33 ± 0.11 | 1.45 ± 0.05 |

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была предложена модель конверсии для расчета реакторных спектров антинейтрино, на основе которой было разработано программное обеспечение для реализации описанной процедуры. Созданное ПО было запатентовано в рамках внутренней НИР НИЦ КИ "Наука и практика нейтринных исследований на АЭС".

В работе впервые описан и реализован метод повторной конверсии, с использованием которого, в частности, был проведен анализ неопределенностей метода конверсии; показано, что процедура преобразования с хорошей точностью линейна по поправкам, доказана устойчивость отношения выходов ОБР $\sigma^{235}/\sigma^{239}$.

С использованием экспериментальных данных группы КИ и представленной в данной работе процедуры конверсии были пересчитаны спектры реакторных антинейтрино для изотопов ^{235}U и ^{238}U , описано решение проблемы реакторной антинейтринной аномалии.

Дальнейшая работа будет направлена на развитие методики удаленного мониторинга работы ядерного реактора по нейтринному излучению и на пересчет эффективных тепловых энергий основных изотопов с использованием полученных в данной работе кумулятивных спектров реакторных антинейтрино.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Pontecorvo B. *Inverse β -decay* // National Research Council of Canada, Chalk River (1946), Report PD-205
- [2] *Evolution of the Reactor Antineutrino Flux and Spectrum at Daya Bay* / F. An [et al.] // Phys. Rev. Lett (2017), vol. 118, p. 251801, DOI:10.1103/PhysRevLett.118.251801
- [3] *Extraction of the ^{235}U and ^{239}Pu Antineutrino Spectra at Daya Bay* / F. An [et al.] // Phys. Rev. Lett (2019), vol. 123, p. 111801, DOI:10.1103/PhysRevLett.123.111801
- [4] *Fuel-composition dependent reactor antineutrino yield at RENO* / G. Bak [et al.] // Phys. Rev. Lett (2018), vol. 122, p. 232501, DOI:10.1103/PhysRevLett.122.232501
- [5] *Accurate Measurement of the Electron Antineutrino Yield of ^{235}U Fissions from the STEREO Experiment with 119 Days of Reactor-On Data* / H. Almazan [et al.] // Phys. Rev. Lett. (2020), vol. 125, p. 201801, DOI:10.1103/PhysRevLett.125.201801
- [6] *Neutrino Detectors as Tools for Nuclear Security* / A. Betstein [et al.] // Rev. Mod. Phys. (2020), vol. 92, p. 011003, DOI:10.1103/RevModPhys.92.011003
- [7] *Antineutrino reactor safeguards — a case study* / E. Christensen [et al.] // arXiv eprint (2013), arXiv:1312.1959 [physics.ins-det]
- [8] Hayes A., Vogel P. *Reactor Neutrino Spectra* // Annual Review of Nuclear and Particle Science (2016), vol. 66, pp. 219–244, DOI:10.1146/annurev-nucl-102115-044826
- [9] *Updated Summation Model: An Improved Agreement with the Daya Bay Antineutrino Fluxes* / M. Estienne [et al.] // Phys. Rev. Lett. (2019), vol. 123, p. 022502, DOI:10.1103/PhysRevLett.123.022502
- [10] X. Mougeot *Reliability of usual assumptions in the calculation of β and ν spectra* // Phys. Rev. C (2015), vol. 91, p. 055504, DOI:10.1103/PhysRevC.91.055504
- [11] В. И. Копейкин, Л. А. Микаэлян, В. В. Синев *Обратный бета-распад в неравновесном потоке антинейтрино ядерного реактора* // ЯФ (2001), том 64, стр. 914
- [12] В. И. Копейкин, М. Д. Скорохватов *Особенности протекания реакции обратного бета-распада на протоне в потоке антинейтрино ядерного реактора* // ЯФ (2017), том 80, стр. 142–150

- [13] *Absolute measurement of the beta spectrum from ^{235}U fission as a basis for reactor antineutrino experiments* / Schreckenbach K. [et al.] // Phys. Letters B (1981), vol. 99, pp. 251–256, DOI:10.1016/0370-2693(81)91120-5
- [14] *Experimental beta-spectra from ^{239}Pu and ^{235}U thermal neutron fission products and their correlated antineutrino spectra* / Von Feilitzsch F. [et al.] // Phys. Letters B (1982), vol. 118, pp.162–166, DOI:10.1016/0370-2693(82)90622-0
- [15] *Determination of the antineutrino spectrum from ^{235}U thermal neutron fission products up to 9.5 MeV* / Schreckenbach K. [et al.] // Phys. Letters B (1985), vol. 160, pp. 325–330, DOI:10.1016/0370-2693(85)91337-1
- [16] *Antineutrino spectra from ^{241}Pu and ^{239}Pu thermal neutron fission products* / Hanh A. [et al.] // Phys. Letters B (1989), vol. 218, pp. 365–368, DOI:10.1016/0370-2693(89)91598-0
- [17] *Re-publication of the data from the BILL magnetic spectrometer: The cumulative β -spectra of the fission products of ^{235}U , ^{239}Pu and ^{241}Pu* / Haag N. [et al.] // arXiv e-prints (2014), arXiv:1405.3501 [nucl-ex]
- [18] *Improved predictions of reactor antineutrino spectra* / Mueller T. A. [et al.] // Phys. Rev. C (2011), vol. 83, p. 054615, DOI:10.1103/PhysRevC.83.054615
- [19] Huber P. *Determination of antineutrino spectra from nuclear reactors* // Phys. Rev. C (2011), vol. 84, p. 024617, DOI:10.1103/PhysRevC.84.024617
- [20] Фаянс С.А. *Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ при низких энергиях* // Ядерная физика (1985), том 42, вып. 4(10), с. 929–940
- [21] Strumia A., Vissani F. *Precise quasielastic neutrino/nucleon cross section* // Phys. Letters B (2003), vol. 564, No. 1–2, pp. 42–54, DOI:10.1016/S0370-2693(03)00616-6
- [22] *The Reactor Antineutrino Anomaly* / G. Mention [et al.] // Phys. Rev. D (2011), vol. 83, p. 073006, DOI:10.1103/PhysRevD.83.073006
- [23] C. Giunti, Y.F. Li, C.A. Ternes, Z. Xin *Reactor antineutrino anomaly in light of recent flux model refinements* // arXiv preprint (2021), arXiv:2110.06820 [hep-ph]
- [24] Копейкин В.И., Панин Ю.Н., Сабельников А.А. *Измерение отношения кумулятивных спектров бета-частиц от продуктов деления ^{235}U и ^{239}Pu для решения задач физики реакторных антинейтрино* // Ядерная физика (2021), том 84, №1, с. 3–11, DOI:10.31857/S0044002721010128
- [25] Kopeikin V., Skorokhvatov M., Titov O. *Reevaluating reactor antineutrino spectra with new measurements of the ratio between ^{235}U and ^{239}Pu β spectra* // Phys. Rev. D (2021), vol. 104, p. L071301, DOI:10.1103/PhysRevD.104.L071301

- [26] *High precision analytical description of the allowed β spectrum shape* / Hayen L. [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* (2018), vol. 90, p. 015008, DOI:10.1103/RevModPhys.90.015008
- [27] *Experimental Determination of the Antineutrino Spectrum of the Fission Products of ^{238}U* / Haag N. [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* (2013), vol. 112, p. 122501, DOI:10.1103/PhysRevLett.112.122501
- [28] *Analysis of the Daya Bay Reactor Antineutrino Flux Changes with Fuel Burnup* / Hayes A. C. [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* (2018), vol. 120, p. 022503, DOI:10.1103/PhysRevLett.120.022503
- [29] *First-forbidden transitions in the reactor anomaly* // Hayen L. [et al.] // *Phys. Rev. C* (2019), vol. 100, p. 054323, DOI:10.1103/PhysRevC.100.054323
- [30] Yu-Feng Li, Di Zhang *New realization of the conversion calculation for reactor antineutrino fluxes* // *Phys. Rev. D* (2019), vol. 100, p. 053005, DOI:10.1103/PhysRevD.100.053005
- [31] Vogel P. *Conversion of electron spectrum associated with fission into the antineutrino spectrum* // *Phys. Rev. C* (2007), vol. 76, p. 025504, DOI:10.1103/PhysRevC.76.025504
- [32] Huber P., Schwetz T. *Precision spectroscopy with reactor antineutrinos* // *Phys. Rev. D* (2004), vol. 70, p. 053011, DOI:10.1103/PhysRevD.70.053011
- [33] Боровой А.А., Копейкин В.И., Микаэлян Л.А., Толоконников С.В. *О связи между спектрами реакторных $\bar{\nu}_e$ и β -электронов* // *Ядерная физика* (1982), т.36, вып.2(8), с.400–402
- [34] Behrens H., Janecke J. *Numerical Tables for Beta-Decay and Electron Capture* // Springer — 1969. — DOI:10.1007/b19939
- [35] Wilkinson D. H. *Evaluation of Beta-Decay II. Finite mass and size effects* // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* (1990)
- [36] Elton L. R. B. *A semi-empirical formula for the nuclear radius* // *Nuclear physics* (1958), vol. 5, pp. 173–178, DOI:10.1016/0029-5582(58)90016-6
- [37] Vogel P. *Analysis of the antineutrino capture on protons* // *Phys. Rev. D* (1984), vol. 29, p. 1918, DOI:10.1103/PhysRevD.29.1918
- [38] *Systematic Uncertainties in the Analysis of the Reactor Neutrino Anomaly* / Hayes A. C. [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* (2014), vol. 112, p. 202501, DOI:10.1103/PhysRevLett.112.202501
- [39] *High precision analytical description of the allowed β spectrum shape* / Hayen L. [et al.] // *Reviews of modern physics* (2018), vol. 90, p. 015008, DOI:10.1103/RevModPhys.90.015008

- [40] Behrens H., Bühring W. *Electron radial wave functions and nuclear beta-decay* // Clarendon press, Oxford (1982)
- [41] Sirlin A. *General Properties of the Electromagnetic Corrections to the Beta Decay of a Physical Nucleon* // Phys. Rev (1967), vol. 164, p. 1767, DOI:10.1103/PhysRev.164.1767
- [42] Sirlin A. *Radiative Correction to the $\bar{\nu}_e$ (ν_e) Spectrum in β -decay* // Phys. Rev. D (2011), vol. 84, p. 014021, DOI:10.1103/PhysRevD.84.014021
- [43] Batkin I., Sundaresan M. *Effect of radiative corrections on the solar neutrino spectrum* // Phys. Rev. D. (1995), vol. 52, pp. 5362–5365, DOI:10.1103/PhysRevD.52.5362
- [44] Hayes A., Wang X. *Weak magnetism correction to allowed β decay for reactor antineutrino spectra* // Phys. Rev. C (2017), vol. 95, p. 064313, DOI: 10.1103/PhysRevC.95.064313
- [45] P.A. Zyla [et al.] *The Review of Particle Physics* // Progress of Theoretical and Experimental Physics (2020), vol. 2020, No. 8, DOI:10.1093/ptep/ptaa104

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица А1. Коэффициенты параметризации поправки $L_0(Z, E)$ для электронов: воспроизведение таблицы 1 работы [35].

| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| a_{-1} | 0.115 | -1.8123 | 8.2498 | -11.223 | -14.854 | 32.086 |
| a_0 | -0.00062 | 0.007165 | 0.01841 | -0.53736 | 1.2691 | -1.5467 |
| a_1 | 0.02482 | -0.5975 | 4.84199 | -15.3374 | 23.9774 | -12.6534 |
| a_2 | -0.14038 | 3.64953 | -38.8143 | 172.137 | -346.708 | 288.787 |
| a_3 | 0.008152 | -1.15664 | 49.9663 | -273.711 | 657.629 | -603.703 |
| a_4 | 1.2145 | -23.9931 | 149.972 | -471.299 | 662.191 | -305.68 |
| a_5 | -1.5632 | 33.4192 | -255.133 | 938.53 | -1641.28 | 1095.36 |

Таблица А2. Узлы сеточной функции $N(\tilde{Z})$ для параметризации поправки на экранирование: воспроизведение таблицы 4.7 работы [40].

| \tilde{Z} | 1 | 8 | 13 | 16 | 23 | 27 | 29 | 49 | 84 | 92 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $N(\tilde{Z})$ | 1.000 | 1.420 | 1.484 | 1.497 | 1.52 | 1.544 | 1.561 | 1.637 | 1.838 | 1.907 |

ПРИЛОЖЕНИЕ В

КУМУЛЯТИВНЫЕ СПЕКТРЫ РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО ДЛЯ ^{235}U И ^{238}U

Таблица В1. Кумулятивные спектры антинейтрино изотопов ^{235}U и ^{238}U с учетом спектральной поправки НИЦ "КИ".

| E_ν , MeV | ρ_ν^{235} , fission $^{-1}\text{MeV}^{-1}$ | δ^{235} , % | ρ_ν^{238} , fission $^{-1}\text{MeV}^{-1}$ | δ^{238} , % | |
|---------------|---------------------------------------------------|--------------------|---------------------------------------------------|--------------------|-----|
| 2.00 | 1.28 | < 1.0 | 1.58 | ≈ 3.5 | |
| 2.25 | 1.10 | | 1.40 | | |
| 2.50 | $8.55 \cdot 10^{-1}$ | | 1.16 | | |
| 2.75 | $7.40 \cdot 10^{-1}$ | | 1.05 | | |
| 3.00 | $6.08 \cdot 10^{-1}$ | | $8.95 \cdot 10^{-1}$ | | |
| 3.25 | $5.29 \cdot 10^{-1}$ | | $7.61 \cdot 10^{-1}$ | | 3.1 |
| 3.50 | $4.16 \cdot 10^{-1}$ | | $6.05 \cdot 10^{-1}$ | | 2.6 |
| 3.75 | $3.44 \cdot 10^{-1}$ | 1.1 | $5.12 \cdot 10^{-1}$ | 2.6 | |
| 4.00 | $2.73 \cdot 10^{-1}$ | 1.2 | $4.12 \cdot 10^{-1}$ | 2.6 | |
| 4.25 | $2.26 \cdot 10^{-1}$ | 1.4 | $3.44 \cdot 10^{-1}$ | 2.8 | |
| 4.50 | $1.69 \cdot 10^{-1}$ | 1.7 | $2.62 \cdot 10^{-1}$ | 2.9 | |
| 4.75 | $1.23 \cdot 10^{-1}$ | 1.8 | $1.93 \cdot 10^{-1}$ | 3.3 | |
| 5.00 | $9.98 \cdot 10^{-2}$ | 1.9 | $1.54 \cdot 10^{-1}$ | 3.7 | |
| 5.25 | $8.00 \cdot 10^{-2}$ | 2.0 | $1.24 \cdot 10^{-1}$ | 4.1 | |
| 5.50 | $6.27 \cdot 10^{-2}$ | 2.2 | $1.00 \cdot 10^{-1}$ | 5.0 | |
| 5.75 | $5.16 \cdot 10^{-2}$ | 2.4 | $7.83 \cdot 10^{-2}$ | 5.9 | |
| 6.00 | $3.63 \cdot 10^{-2}$ | 2.7 | $5.24 \cdot 10^{-2}$ | 7.6 | |
| 6.25 | $2.49 \cdot 10^{-2}$ | 3.0 | $3.45 \cdot 10^{-2}$ | 10.6 | |
| 6.50 | $2.05 \cdot 10^{-2}$ | 3.0 | $2.94 \cdot 10^{-2}$ | 12.6 | |
| 6.75 | $1.69 \cdot 10^{-2}$ | 3.3 | $2.88 \cdot 10^{-2}$ | 11.7 | |
| 7.00 | $8.70 \cdot 10^{-3}$ | 3.6 | $1.60 \cdot 10^{-2}$ | 14.1 | |
| 7.25 | $6.03 \cdot 10^{-3}$ | 4.1 | $9.58 \cdot 10^{-3}$ | 21.9 | |
| 7.50 | $4.63 \cdot 10^{-3}$ | 4.4 | $7.12 \cdot 10^{-3}$ | 30 | |
| 7.75 | $2.96 \cdot 10^{-3}$ | 5.0 | $4.93 \cdot 10^{-3}$ | ≈ 30 | |
| 8.00 | $1.59 \cdot 10^{-3}$ | 7.0 | $3.09 \cdot 10^{-3}$ | ≈ 30 | |