«О петлевых поправках к действию деформированной интегрируемой O(4) сигма-модели»

Руководитель НИРС: к. ф-м.н Алфимов М. Н.

Студент: Видинеев А. А.

Цель работы

- Исследовать нелинейную сигма-модель для случая трёхмерного целевого пространства
- Получить в трёхмерном случае выражение для первых членов разложения бета-функции
- Получить выражение для бета-функции при возмущении метрики

Сигма-модель

$$S[\mathbf{X}] = \frac{1}{4\pi}\int G_{ij}(\mathbf{X})\partial_a X^i \partial_a X^j d^n\mathbf{x}$$

Общее выражение для действия сигма-модели

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G)$$

Уравнение ренормгруппы (РГ) связывает ренормгруппу и поток Риччи

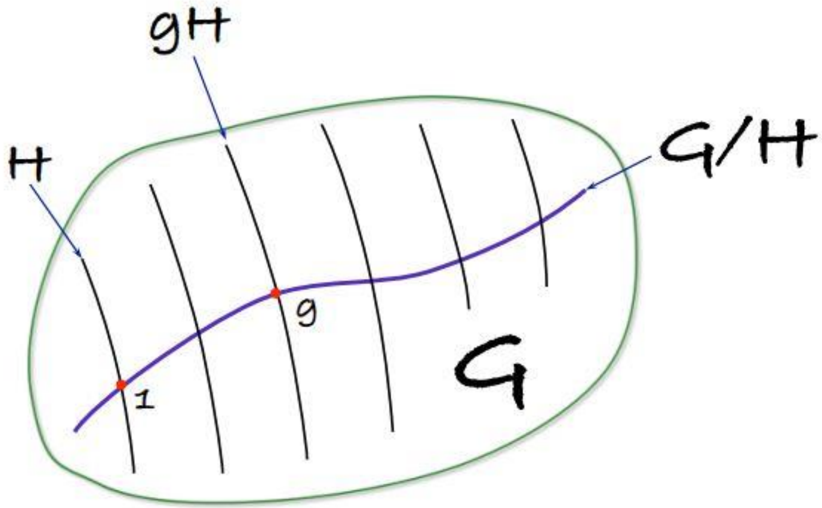
$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + \ldots$$

β-функция раскладывается в ряд по степеням от постоянной Планка $\hbar$

Примеры

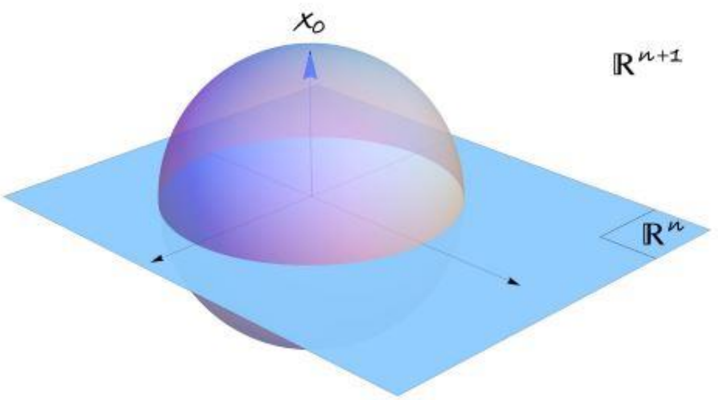
- Модель G, в которой целевое пространство является группой Ли
- Модель G/H, в которой целевое пространство является фактором группы по подгруппе
- Сфера S^n
- Проективное пространство $\mathbf{CP}^{\mathrm{n}}$

Примеры



Фактор группы по подгруппе может не быть группой

$$\mathbb{CP}^n = SU(n+1)/SU(n)\times U(1)$$



Сфера

$$S^n = SO(n+1)/SO(n)$$

Бета-функция

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij}$$

$$\beta_{ij}^{(2)}(G) = \frac{1}{2} R_{iklm} R_j{}^{klm}$$

$$\beta_{ij}^{(3)}(G) = \frac{1}{8} \nabla_k R_{ilmn} \nabla^k R_j{}^{lmn} - \frac{1}{16} \nabla_i R_{klmn} \nabla_j R^{klmn} - \frac{1}{2} R_{imnk} R_{jpq}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8} R_{iklj} R^{kmnp} R^l{}_{mnp}$$

В MS-схеме перенормировки (схема минимального вычитания) известны выражения для первых слагаемых бета-функции

Бета-функция

$$\beta_{ij}^{(1)} = R_{ij}$$

$$\beta_{ij}^{(2)} = (R_{kl}R^{kl} - \frac{1}{2}R^2)G_{ij} + R_{ij}R - R_i{}^k R_{jk}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}^{(3)} = [&\frac{3}{4}R_k{}^m R^{kl} R_{lm} - \frac{7}{8}R_{kl}R^{kl}R + \frac{1}{4}R^3 \\
&-\frac{1}{8}(\nabla_k R)(\nabla^k R) + \frac{1}{4}(\nabla_m R_{kl})(\nabla^m R^{kl})]G_{ij} \\
&+\left(\frac{5}{2}R_{ij}R_{kl}R^{kl} - \frac{11}{8}R_{ij}R^2 + \frac{1}{4}(\nabla_k R_{ij})(\nabla^k R)\right) \\
&+\left(-3R_i{}^k R_j{}^l R_{kl} + \frac{19}{8}R_i{}^k R_{jk} R - \frac{1}{4}(\nabla_l R_{jk})(\nabla^l R_i{}^k)\right) \\
&+\left(-\frac{1}{4}(\nabla_i R^{kl})(\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16}(\nabla_i R)(\nabla_j R)\right)
\end{aligned}$$

Для трёхмерного многообразия эти формулы переписываются так

Тензорные структуры

- Метрике G_{ij} приписывается размерная характеристика $\hbar^{-1}$. Тогда метрика с верхними индексами будет иметь размерность $\hbar$, ковариантная производная ∇_i и тензор Риччи имеют нулевую размерность $\hbar^0$. Скалярная кривизна будет иметь размерность 1.
- β - функция представляет из себя ряд, L-ый член которого - линейная комбинация тензоров размерности $\hbar^{L-1}$.
- Все такие тензоры записываются в алфавите в {G, R, ∇}.
- Наблюдение. Пусть имеется тензор, состоящий из N_R букв R и N_∇ букв ∇. Тогда его размерная характеристика равна $N_R + \frac{N_\nabla}{2} - 1$.

Тензорные структуры

$$\tau_1 = \{R_{ij}, RG_{ij}\}$$

$$\tau_2 = \{G_{ij}R^2, G_{ij}R_{kl}R^{kl}, G_{ij}\nabla^2 R, G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl};$$
$$R_{ij}R, \nabla^2 R_{ij}; R_{il}R_j{}^l; \nabla_i\nabla_j R; \nabla_i\nabla^k R_{jk}, \nabla^k\nabla_i R_{jk}\}$$

Все тензорные структуры небольших размерностей можно перечислить

$$G_{ij}^{(0)} = c_1 R_{ij} + c_2 RG_{ij}$$

$$G_{ij}^{(1)} = (c_3 R^2 + c_4 R_{kl}R^{kl} + c_5\nabla^2 R + c_6\nabla^k\nabla^l R_{kl})G_{ij} + c_7 R_{ij}R$$
$$+ c_8\nabla^2 R_{ij} + c_9 R_{il}R_j{}^l + c_{10}\nabla_i\nabla_j R + c_{11}\nabla_i\nabla^k R_{jk} + c_{12}\nabla^k\nabla_i R_{jk}$$

Смена схемы перенормировки

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} G_{ij}^{(k)}$$

Смена схемы перенормировки приводит к смене метрики в целевом многообразии

$$\dot{\widetilde{G}}_{ij} = -\widetilde{\beta}_{ij}(\widetilde{G}_{mn})$$

$$\widetilde{\beta}_{ij}^{(1)} = R_{ij}$$

$$\widetilde{\beta}_{ij}^{(2)} = -R_i{}^k R_{jk} + (1+c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1-c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 \\ -\frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2 G_{ij}\nabla_k\nabla^k R - c_2 G_{ij}R^{kl}{}_{;k;l}$$

В новой схеме можно вычислить первые члены бета-функции

Уравнение ренормгруппы

Гипотетическая метрика, удовлетворяющая уравнению ренормгруппы

$$ds^2 = (h - 1 - \kappa^2)\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \left(\frac{1-\kappa^2 r^2}{1-r^2} - \frac{2\kappa^2}{h}\right)^{-1} d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right)$$

$$ds^2 = h\left[\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right]$$

$$\dot{G}_{ij} = -\beta_{ij}{}^{(1)} = -R_{ij}$$

Часть метрики, пропорциональная h, должна удовлетворять однопетлевому РГ-уравнению.

Уравнение ренормгруппы

$$\dot{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{h}(1-\kappa^2r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}}{(1-r^2)(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{h}(1-\kappa^2r^2)(1-r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}(1-r^2)}{(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}r^2 \end{pmatrix}$$

Можно вычислить производную метрики и тензор Риччи

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-2+2\kappa^2r^2-2\kappa^4r^2(-1+r^2)}{(-1+r^2)(-1+\kappa^2r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(-1+\kappa^2)(-1+r^2)}{(-1+\kappa^2r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2-2\kappa^2r^4 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{2(-3+\kappa^2(1+3r^2)+\kappa^4(r^2-2r^4))}{h(-1+\kappa^2r^2)}$$

$$\dot{h} = 2-2\kappa^2r^2$$

Оказывается, что нельзя подобрать параметры, чтобы уравнение выполнялось в отсутствие ненулевого векторного поля

Выводы

- Вычислены первые члены разложения β-функции в схеме минимального вычитания.
- Перечислены всевозможные тензорные структуры небольшой размерности. Имеет смысл подсчитать их число для больших размерностей.
- Получено выражение для первых членов β-функции в изменённой схеме перенормировки.
- Выполнена частичная проверка для гипотетической метрики. Нужно рассматривать уравнение с ненулевым векторным полем.

Спасибо за внимание!