МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 514.83

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
О петлевых поправках к действию деформированной интегрируемой O(4) сигма-модели

Студент ________ А. А. Видинеев

Научный руководитель,
доц., к.ф.-м.н., PhD. ________ М. Н. Алфимов

Москва 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Сигма-модель - это теория поля, в которой поле принимает значение в некотором римановом многообразии. Это многообразие может быть произвольным, но чаще всего на нём вводится дополнительная структура, например, структура группы Ли или структура фактора группы Ли по некоторой подгруппе.

Исторически название происходит из статьи Гелл-Манна и Леви, которые представили линейную и нелинейную модель для описания частицы σ - бесспинового мезона, участвующего в бета-распаде вместе с пионами [1].

Примером сигма-модели является $O(3)$ модель, в которой целевое многообразие двумерно. В $O(n)$ моделях целевое пространство n-мерно. Модель $O(n)$ представляет собой эффективную теорию поля, которая связана с нарушением симметрии классической модели Гейзенберга, определенной на квадратной решетке. [2]

В модели G/H целевое пространство является фактором группы G по подгруппе H. При этом G/H не обязательно является группой, так как подгруппа H не обязана быть нормальной. Эти модели применяются в теориях суперсимметрии и супергравитации [3].

Примерами целевых пространств являются n-мерная сфера $S^n = SO(n)/SO(n-1)$, комплексное проективное пространсво $\mathbb{CP}^n = SU(n+1)/SU(n)\times U(1)$, пространство анти-де Ситтера $AdS_{d+1} = SO(d,2)/SO(d,1)$, евклидово пространство анти-де Ситтера $EAdS_{d+1} = SO(d+1,1)/SO(d+1)$ [4].

В данной работе рассматривается сигма-модель с трёхмерным целевым пространством и деформированная $O(4)$ сигма-модель, в которой целевое пространство изморфно фактору $SO(4)/SO(3)$.

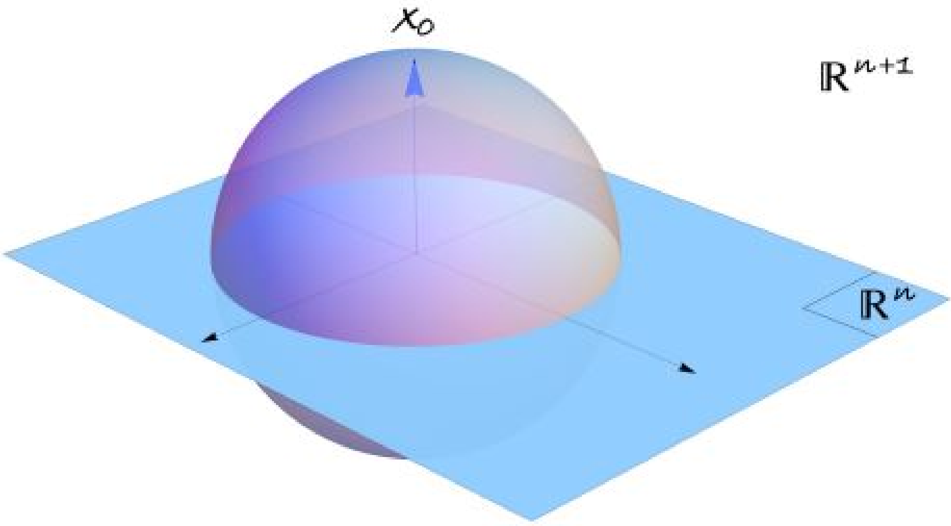

Рисунок 1 — Группа $SO(n+1)$ действует на сфере вращениями, подгруппа $SO(n)$ оставляет неподвижной точку x_0. Это означает, что $S^n = SO(n)/SO(n-1)$

1. ТРЁХМЕРНАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сигма-модель - это скалярная теория поля, в которой многокомпонентное скалярное поле является отображением пространства-времени на риманово многообразие некоторой размерности. Действие записывается следующим образом:

$$S[\mathbf{X}] = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_a X^i \partial_a X^j d^n \mathbf{x}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{X}$ - набор координат на многообразии, а $G_{ij}(\mathbf{X})$ - метрический тензор.

Метрический тензор удовлетворяет уравнению ренормгруппы (РГ):

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G) \tag{1.2}$$

Это уравнениние связывает ренормгруппу с величиной, которая называется потоком Риччи ($\dot{G}$). Начало исследованию потока Риччи было положено Ричардом Гамильтоном в начале 1980-х. [5] Используя метод потока Риччи, Г. Перельман доказал гипотезу Тёрстона о геометризации. Частным случаем гипотезы Тёрстона была гипотеза Пуанкаре.

Бета-функция $\beta(G)$ кодирует зависимость параметра связи от масштаба энергии данного физического процесса, описываемого квантовой теорией поля.

β-функция раскладывается в ряд по степеням от постоянной Планка $\hbar$:

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + ... \tag{1.3}$$

В MS-схеме перенормировки (схема минимального вычитания) известны выражения для первых слагаемых формулы (1.3) [6]:

$$\beta^{(1)}_{ij}(G) = R_{ij}, \tag{1.4}$$

$$\beta^{(2)}_{ij}(G) = \frac{1}{2} R_{iklm} R_j{}^{klm}, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \beta^{(3)}_{ij}(G) = \frac{1}{8} \nabla_k R_{ilmn} \nabla^k R_j{}^{lmn} - \frac{1}{16} \nabla_i R_{klmn} \nabla_j R^{klmn} \\ - \frac{1}{2} R_{imnk} R_{jpq}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8} R_{iklj} R^{kmnp} R^l{}_{mnp} \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2. БЕТА-ФУНКЦИЯ В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В случае, когда многообразие сигма-модели двумерное, тензор Римана выражается через скалярную кривизну и метрику:

$$R_{ijkl} = \frac{R}{2} (G_{ik} G_{jl} - G_{il} G_{jk}) \tag{1.7}$$

Тогда формулы (1.4) - (1.6) упрощаются [7]:

$$\beta^{(1)}_{ij} = \frac{1}{2} R G_{ij} \tag{1.8}$$

$$\beta^{(2)}_{ij} = \frac{1}{4} R^2 G_{ij} \tag{1.9}$$

$$\beta^{(3)}_{ij} = \left(\frac{5}{32} R^3 + \frac{1}{16} (\nabla R)^2 \right) G_{ij} - \frac{1}{16} \nabla_i R \nabla_j R \tag{1.10}$$

Для трёхмерного многообразия формулы также можно переписать:

$$\beta^{(1)}_{ij} = R_{ij} \tag{1.11}$$

$$\beta^{(2)}_{ij} = (R_{kl} R^{kl} - \frac{1}{2} R^2) G_{ij} + R_{ij} R - R_i{}^k R_{jk} \tag{1.12}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{ij}^{(3)} = [&\frac{3}{4}R_k{}^m R^{kl} R_{lm} - \frac{7}{8}R_{kl}R^{kl}R + \frac{1}{4}R^3 \\
&-\frac{1}{8}(\nabla_k R)(\nabla^k R) + \frac{1}{4}(\nabla_m R_{kl})(\nabla^m R^{kl})]G_{ij} \\
&+\left(\frac{5}{2}R_{ij}R_{kl}R^{kl} - \frac{11}{8}R_{ij}R^2 + \frac{1}{4}(\nabla_k R_{ij})(\nabla^k R)\right) \\
&+\left(-3R_i{}^k R_j{}^l R_{kl} + \frac{19}{8}R_i{}^k R_{jk}R - \frac{1}{4}(\nabla_l R_{jk})(\nabla^l R_i{}^k)\right) \\
&+\left(-\frac{1}{4}(\nabla_i R^{kl})(\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16}(\nabla_i R)(\nabla_j R)\right)
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

Метрике G_{ij} приписывается размерная характеристика $\hbar^{-1}$. Тогда метрика с верхними индексами будет иметь рзмерность $\hbar$, ковариантная производная ∇_i и тензор Риччи имеют нулевую размерность $\hbar^0$. Скалярная кривизна, являясь свёрткой метрики с верхними индексами и тензора Риччи с нижними, будет иметь размерность 1.

Из формул (1.8 - 1.13) видно, что в разложении $\beta_{ij}^{(L)}$ участвуют тензоры с размерностью $\hbar^{L-1}$. То есть β - функция представляет из себя ряд, L-ый член которого - линейная комбинация тензоров размерности $\hbar^{L-1}$.

Все такие тензоры можно перечислить. Для этого заметим, что любой тензор можно представить в виде слова, записанного в алфавите из трёх букв $\{G, R, \nabla\}$, причём буквы снабжены индексами так, что после выполнения всех свёрток получается тензор с нижними индексами ij. Обратим внимание, что свёртка происходит между верхним и нижним индексом.

Наблюдение. Пусть имеется тензор, состоящий из N_R букв R и N_∇ букв ∇. Тогда его размерная характеристика равна $N_R + \frac{N_\nabla}{2} - 1$.

Достаточно доказать для случая, когда тензор не содержит скалярных R и ∇^2. Пусть μ - число нижних индексов в тензоре. Тогда имеется $\mu - 2$ верхних индексов. Свёртка по двум индексам даёт одну степень $\hbar$. Таким образом, размерность тензора равна $\mu - 2$. Но $2\mu - 4 = 2N_R + N_\nabla$.

Теперь выпишем наборы τ_1, τ_2, τ_3 тензоров размерности 0 и 1. Число тензорных структур размерности 2 слишком велико, поэтому они перечислены в Приложении. Возможно, что некоторые из приведённых в Приложении тензорных структур являются линейно зависимыми или зависимыми по модулю соотношений дифференциальной геометрии (тождества Бьянки, диффеоморфизмы).

$$\tau_1 = \{R_{ij}, RG_{ij}\} \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered}\tau_2 = \{G_{ij}R^2, G_{ij}R_{kl}R^{kl}, G_{ij}\nabla^2 R, G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl};\\ R_{ij}R, \nabla^2 R_{ij}; R_{il}R_j{}^l; \nabla_i\nabla_j R; \nabla_i\nabla^k R_{jk}, \nabla^k\nabla_i R_{jk}\}\end{gathered} \tag{1.15}$$

1.3. ВОЗМУЩЕНИЕ МЕТРИКИ ПРИ СМЕНЕ СХЕМЫ

Теперь надо выяснить, как изменяется β-функция при переопределении метрики. Изначально β-функция задаётся равенствами (1.11) - (1.13) и соответствует некоторой метрике C_{ij}. Пусть теперь метрика преобразуется произвольным образом по формуле

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} G_{ij}^{(k)}, \tag{1.16}$$

где $G_{ij}^{(k)}$ - произвольная линейная комбинация базисных тензорных структур с размерной характеристикой $\hbar^k$.

Из (1.14) и (1.15) получаем:

$$G_{ij}^{(0)} = c_1 R_{ij} + c_2 R G_{ij}, \tag{1.17}$$

$$\begin{gathered}G_{ij}^{(1)} = (c_3R^2 + c_4R_{kl}R^{kl} + c_5\nabla^2 R + c_6\nabla^k\nabla^l R_{kl})G_{ij} + c_7R_{ij}R\\ +c_8\nabla^2 R_{ij} + c_9R_{il}R_j{}^l + c_{10}\nabla_i\nabla_j R + c_{11}\nabla_i\nabla^k R_{jk} + c_{12}\nabla^k\nabla_i R_{jk}.\end{gathered} \tag{1.18}$$

Вид β-функции в изменённой метрике можно найти из RG-уравнения.

$$\dot{\widetilde{G}}_{ij} = -\widetilde{\beta}_{ij}(\widetilde{G}_{mn}). \tag{1.19}$$

Получаем следующие выражения:

$$\widetilde{\beta}^{(1)}_{ij} = R_{ij}, \tag{1.20}$$

То есть β^1 инвариантна относительно смены схемы перенормировки. Возмущённое β^2 имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}^{(2)}_{ij} = -R_i{}^k R_{jk} + (1+c_2) G_{ij} R_{kl} R^{kl} + (1-c_2) R_{ij} R - \frac{1}{2} G_{ij} R^2 \\ -\frac{1}{2} c_2 \nabla_j \nabla_i R + \frac{1}{2} c_2 G_{ij} \nabla_k \nabla^k R - c_2 G_{ij} R^{kl}{}_{;k;l}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

1.4. МЕТРИКА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ RG-УРАВНЕНИЮ

Какая метрика удовлетворяет уравнению ренормгруппы?

Имеется гипотеза, что искомая метрика даётся следующим выражением [8]:

$$ds^2 = (h - 1 - \kappa^2)\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \left(\frac{1-\kappa^2 r^2}{1-r^2} - \frac{2\kappa^2}{h}\right)^{-1} d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right). \tag{1.22}$$

Разложим теперь это выражение по степеням $\frac{1}{h}$.

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{h dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}\left(1 - \frac{1+\kappa^2}{h}\right) + \\ \frac{h(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}\left(1 - \frac{1+\kappa^2}{h} + \frac{2\kappa^2}{h}\frac{1-r^2}{1+\kappa^2 r^2} + ...\right) d\phi_1{}^2 + \\ h r^2 \left(1 - \frac{1+\kappa^2}{h}\right) d\phi_2{}^2. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Члены, пропорциональные первой степени h должны удовлетворять однопетлевому уравнению ренормгруппы

$$\dot{G}_{ij} = -{\beta_{ij}}^{(1)} = -R_{ij}. \tag{1.24}$$

Выпишем эти члены:

$$ds^2 = h\left[\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}{d\phi_1}^2 + r^2 {d\phi_2}^2\right]. \tag{1.25}$$

Производная этой метрики имеет следующий вид (от времени зависят только параметры h и κ)

$$\dot{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{h}(1-\kappa^2r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}}{(1-r^2)(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{h}(1-\kappa^2r^2)(1-r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}(1-r^2)}{(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}r^2 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Теперь можно найти выражение для тензора Риччи

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-2+2\kappa^2r^2-2\kappa^4r^2(-1+r^2)}{(-1+r^2)(-1+\kappa^2r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(-1+\kappa^2)(-1+r^2)}{(-1+\kappa^2r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2-2\kappa^2r^4 \end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Скалярная кривизна равна

$$R = \frac{2(-3+\kappa^2(1+3r^2)+\kappa^4(r^2-2r^4))}{h(-1+\kappa^2r^2)}. \tag{1.28}$$

Уравнение $\dot{G}_{ij} = -R_{ij}$ тогда приводит, в частности, к равенству

$$\dot{h} = 2 - 2\kappa^2 r^2, \tag{1.29}$$

которое означает что равенство $\dot{G}_{ij} = -R_{ij}$ нельзя удовлетворить простым наложением условий на размерные параметры h и κ. Это означает, что надо рассматривать более общее уравнение $\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G)$ с ненулевым векторным полем V. Поиском этого векторного поля необходимо заняться в будущем.

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассматривали нелинейную сигма-модель с трёхмерным целевым пространством. Для этой модели были вычислены первые члены разложения β-функции в схеме минимального вычитания. Также были перечислены всевозможные тензорные структуры небольшой размерности. Их оказалось много больше, чем в двумерном случае. Это связано с тем, что в двумерном случае, в отличие от трёхмерного, тензор Риччи пропорционален скалярной кривизне. Возможно, что использование соотношений дифференциальной геометрии позволяет сократить число этих структур. С учётом этих соотношений было бы интеренсно в будущем перечислить возможные структуры с большими размерными характеристиками.

После было получено выражение для первых членов β-функции в изменённой схеме перенормировки. Смена схемы перенормировки приводит к изменению метрики целевого пространства на произвольную линейную комбинацию тензорных структур данной размерности.

В последнем разделе была предпринята попытка решения RG уравнения при помощи некоторой гипотетической метрики. Оказалось, что приведённая метрика не решает RG уравнение с нулевым векторным полем V даже в первом порядке. Это означает, что необходимо рассматривать уравнение с ненулевым векторным полем. Эту гипотезу необходимо проверить в будущем. Также в будущем надо решить уравнение ренормгруппы в старших порядках.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gell-Mann, M.; Lévy, M. (1960), "The axial vector current in beta decay Il Nuovo Cimento, Italian Physical Society, 16 (4): 705–726

[2] Lindstrom, Ulf, Uses of Sigma Models, 2018/03/23

[3] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, Supergravity. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2012.

[4] Konstantin Zarembo, Integrability in sigma-models, Integrability: From Statistical Systems to Gauge Theory, 2019.

[5] B. Chow, D. Knopf The Ricci Flow: an introduction. Mathematical Surveys and Monographs 110, American Mathematical Society, Providence, RI, (2004).

[6] D.H. Friedan, Nonlinear models in $2 + \varrho$ dimensions, Annals Phys. 163 (1985) 318.

[7] Mikhail Alfimov and Alexey Vad. Litvinov, On loop corrections to integrable 2D sigma model backgrounds, Journal of High Energy Physics, 2022, (2022)

[8] Ben Hoare, Nat Levine & Arkady A.Tseytlin, Integrable sigma models and 2-loop RG flow, Journal of High Energy Physics volume 2019

3. ПРИЛОЖЕНИЕ

$$
\begin{aligned}
\tau_3 = \{ & G_{ij}R^3, G_{ij}RR_{kl}R^{kl}, G_{ij}R_{kl}R^k{}_pR^p{}_l, G_{ij}R\nabla^2R, G_{ij}(\nabla_lR)(\nabla^lR), \\
& G_{ij}R_{lm}\nabla^l\nabla^mR, G_{ij}(\nabla^lR_{lm})(\nabla^mR), G_{ij}R\nabla^l\nabla^mR_{lm}, G_{ij}(\nabla^lR)(\nabla^mR_{lm}), \\
& G_{ij}R^{lm}\nabla^2R_{lm}, G_{ij}(\nabla^pR^{lm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}R^{pm}\nabla^l\nabla_pR_{lm}, G_{ij}R^{pm}\nabla_p\nabla^lR_{lm}, \\
& G_{ij}\nabla_pR^{pm}\nabla^lR_{lm}, G_{ij}\nabla^lR^{pm}\nabla_pR_{lm}, G_{ij}\nabla^l\nabla^m\nabla_l\nabla_mR, G_{ij}\nabla_l\nabla^2\nabla^lR, \\
& G_{ij}\nabla^2\nabla^2R, G_{ij}\nabla^2\nabla^m\nabla^lR_{lm}, G_{ij}\nabla_p\nabla^m\nabla^p\nabla^lR_{lm}, G_{ij}\nabla^m\nabla^2\nabla^lR_{lm}, \\
& G_{ij}\nabla_p\nabla^m\nabla^l\nabla^pR_{lm}, G_{ij}\nabla^m\nabla_p\nabla^l\nabla^pR_{lm}, G_{ij}\nabla^m\nabla^l\nabla^2R_{lm} \\
& R_{ij}R^2, R_{ij}R_{lm}R^{lm}, R_{ij}\nabla^2R, (\nabla^kR_{ij})(\nabla_kR), R\nabla^2R_{ij}, (\nabla^kR)(\nabla_kR_{ij}), \\
& R_{ij}\nabla^k\nabla^lR_{kl}, (\nabla^kR_{ij})(\nabla^lR_{kl}), R_{kl}\nabla^k\nabla^lR_{ij}, (\nabla^kR_{kl})(\nabla^lR_{ij}), \\
& \nabla^l\nabla^m\nabla_l\nabla_mR_{ij}, \nabla^m\nabla^2\nabla_mR_{ij}, \nabla^2\nabla^2R_{ij} \\
& R_{ik}R_j{}^kR, R_{ik}\nabla^2R_j{}^k, \nabla^pR_{ik}\nabla_pR_j{}^k, (\nabla^2R_{ik})R_j{}^k, R_{ik}R_{jl}R^{kl}, R_{ik}\nabla^k\nabla^lR_{jl}, \\
& R_{ik}\nabla^l\nabla^kR_{jl}, \nabla^lR_{ik}\nabla^kR_{jl}, \nabla^kR_{ik}\nabla^lR_{jl}, (\nabla^l\nabla^kR_{ik})R_{jl}, (\nabla^k\nabla^lR_{ik})R_{jl} \\
& \nabla_i\nabla_jR^2, \nabla_iR\nabla_jR, R\nabla_i\nabla_jR, \nabla_i\nabla_jR_{kl}R^{kl}, \nabla_iR_{kl}\nabla_jR^{kl}, R_{kl}\nabla_i\nabla_jR^{kl}, \\
& \nabla_i\nabla_j\nabla^2R, \nabla_i\nabla^2\nabla_jR, \nabla^2\nabla_i\nabla_jR, \nabla_i\nabla_p\nabla_j\nabla^pR, \nabla_p\nabla_i\nabla^p\nabla_jR, \nabla_p\nabla_i\nabla_j\nabla^pR, \\
& \nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla^lR_{kl}, \nabla_i\nabla^k\nabla^l\nabla_jR_{kl}, \nabla^k\nabla^l\nabla_i\nabla_jR_{kl}, \nabla_i\nabla^k\nabla_j\nabla^lR_{kl}, \\
& \nabla^k\nabla_i\nabla^l\nabla_jR_{kl}, \nabla^k\nabla_i\nabla_j\nabla^lR_{kl} \\
& (\nabla_iR_{jk})(\nabla^kR), (\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla^k\nabla_iR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}), (\nabla^kR)(\nabla_iR_{jk}), \\
& (\nabla_i\nabla^kR)R_{jk}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}), (\nabla_i\nabla_pR_{jk})R^{kp}, (\nabla_p\nabla_iR_{jk})R^{kp}, \nabla_iR^{kp}(\nabla_pR_{jk}), \\
& (\nabla_i\nabla_pR^{kp})R_{jk}, (\nabla_p\nabla_iR^{kp})R_{jk}, (\nabla_pR^{kp})(\nabla_iR_{jk}), R^{kp}\nabla_i\nabla_pR_{jk}, R^{kp}\nabla_p\nabla_iR_{jk} \\
& \nabla^2\nabla_i\nabla_kR_{jk}, \nabla_i\nabla^2\nabla_kR_{jk}, \nabla_i\nabla_k\nabla^2R_{jk}, \nabla_i\nabla_p\nabla_k\nabla^pR_{jk}, \nabla_p\nabla_i\nabla^p\nabla_kR_{jk}, \\
& \nabla_p\nabla_i\nabla_k\nabla^pR_{jk}, \nabla^2\nabla_k\nabla_iR_{jk}, \nabla_k\nabla^2\nabla_iR_{jk}, \nabla_k\nabla_i\nabla^2R_{jk}, \nabla_k\nabla_p\nabla_i\nabla^pR_{jk}, \\
& \nabla_p\nabla_k\nabla^p\nabla_iR_{jk}, \nabla_p\nabla_k\nabla_i\nabla^pR_{jk} \\
& R_{ik}(\nabla_j\nabla_kR), R_{ik}(\nabla_k\nabla_jR), (\nabla_kR_{ik})(\nabla_jR), \\
& R_{ik}\nabla_j\nabla_lR^{kl}, R_{ik}\nabla_l\nabla_jR^{kl}, (\nabla_lR_{ik})(\nabla_jR^{kl})\}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$