Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное автономное образовательное учереждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 539.1.05

ОТЧЕТ
О НАУЧНО - ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КЛАСТЕРА ПЧД СО ЗВЕЗДАМИ

Студент _____ С. О. Пугачев

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., доцент _____ К. М. Белоцкий

Москва 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

1 Взаимодействие звезды с кластером 4

Заключение 13

ВВЕДЕНИЕ

Первичные черные дыры (ПЧД) привлекают большое внимание современных исследователей. Их рассматривают в качестве кандидатов в скрытую массу. Но наложенно много ограничений на их плотность в разных диапазонах масс [1]. Однако, существуют модели, где ПЧД рождаются в виде скоплений(кластеров). В этом случае, данные ограничения должны быть пересмотренны [2]. В данной работе рассматривается рассеяние кластера на звездах внутри их скопления. Данный эффект приводит к ограничениям на плотность одиночных ПЧД. Здесь рассматриваются динамические эффекты присущие не к одиночным ПЧД, а к кластерам ПЧД.

Приливные силы хорошо известны в астрономии. Постоянные или медленно меняющиеся приливные силы, такие как приливное поле Галактики в целом, действуя на звездные скопления, ограничивают размер системы, но не нарушают её равновесие и не изменяют её энергию. Однако быстро меняющиеся приливные силы их ещё называют приливными ударами, например, вызванные пролетом межзвездного облака, сообщают каждой звезде в скоплении небольшой "толчок"и посредством этого увеличивают кинетическую энергию звездного скопления [3].

Таким образом, приливные силы играют важную роль во многих областях астрофизики: слияние галактик [4; 5], образование звездных двойных систем путем приливного захвата двух тел [5; 6] и разрушение звездных скоплений и звездных двойных систем [7; 8], к которым могут быть ПЧД [9–11].

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВЕЗДЫ С КЛАСТЕРОМ

Рассмотрим взаимодействие кластера ПЧД и звезды. Предполагаем, что они не связаны гравитационно друг с другом. Рассмотрим случай, когда кластер движется со скорость v, а звезда покоится. Перейдем в систему где центр масс кластера покоится, при этом уже звезда движется относительно кластера со скоростью v и прицельным параметром b. Представим нашу систему на графике 1.1

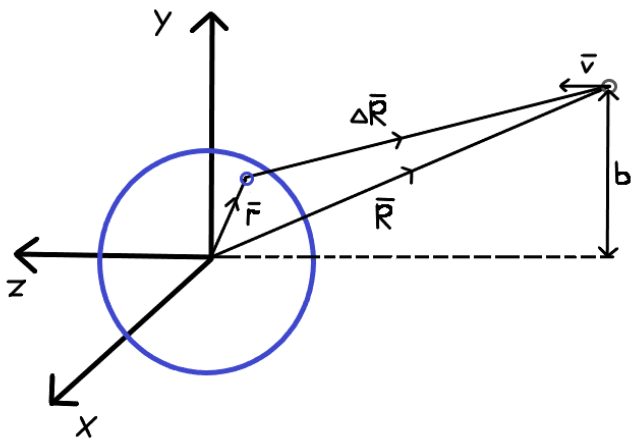

Рисунок 1.1 — Взаимодействие кластера ПЧД со звездой

Координаты ПЧД в кластере - $\mathbf{r} = (x, y, z)$, координаты пролетающей звезды - $\mathbf{R} = (0, b, vt)$, $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = -x\mathbf{e}_x + (b - y)\mathbf{e}_y + (z - vt)\mathbf{e}_z$, $\Delta R = |\mathbf{R} - \mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + (b - y)^2 + (z - vt)^2}$. Найдем изменение скорости

ПЧД в кластере:

$$\Delta\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Gm_\star}{\Delta R^3}\Delta\mathbf{R}\mathrm{d}t = Gm_\star \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x\mathbf{e}_x + (b-y)\mathbf{e}_y + (z-vt)\mathbf{e}_z}{\left(x^2 + (b-y)^2 + (z-vt)^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2Gm_\star}{v}\frac{-x\mathbf{e}_x + (b-y)\mathbf{e}_y}{x^2 + (b-y)^2} \tag{1.1}$$

Приливной удар сообщает каждой ПЧД импульс $\Delta\mathbf{v}$. Предполагается, что во время встречи рассматриваемые ПЧД остаются неподвижными, так что их потенциальная энергия не меняется. Энергия кластера до взаимодействия:

$$E_i = \sum_i \frac{m_i\mathbf{v}_i^2}{2} + U \tag{1.2}$$

энергия кластера после взаимодействия:

$$E_f = \sum_i \frac{m_i(\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}_i)^2}{2} + U \tag{1.3}$$

изменение энергии:

$$\Delta E = \sum_i \frac{m_i(\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}_i)^2}{2} + U - \sum_i \frac{m_i\mathbf{v}_i^2}{2} - U = \sum_i \frac{m_i(2\mathbf{v}_i\Delta\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}_i{}^2)}{2} \tag{1.4}$$

Изменение энергии каждой ПЧД является чисто кинетическим. Мы предполагаем, что слагаемое $\mathbf{v}\Delta\mathbf{v}$ в 1.4 равно нулю, что справедливо для любого статического, невращающегося, сферически-симметричного объекта [12; 13] . Полное изменение энергии кластера в результате встречи в системе покоя определяется выражением:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\sum_i m_i\Delta\mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})(\Delta\mathbf{v})^2 \tag{1.5}$$

Для нашего случая $\rho(\mathbf{r}) = \rho = const$. В сферических координатах $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta E &= 2\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\frac{1}{r^2\sin^2\theta + b^2 - 2br\sin\phi\sin\theta} \\ &= 2\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho \int_0^{R_{cl}} r^2\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{r^2\sin^2\theta + b^2 - 2br\sin\phi\sin\theta} \\ &= 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho\left[R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2}\arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}}\right)\right]\end{aligned} \tag{1.6}$$

Построим график 1.2 изменения энергии кластера от прицельного параметра в системе покоя кластера.

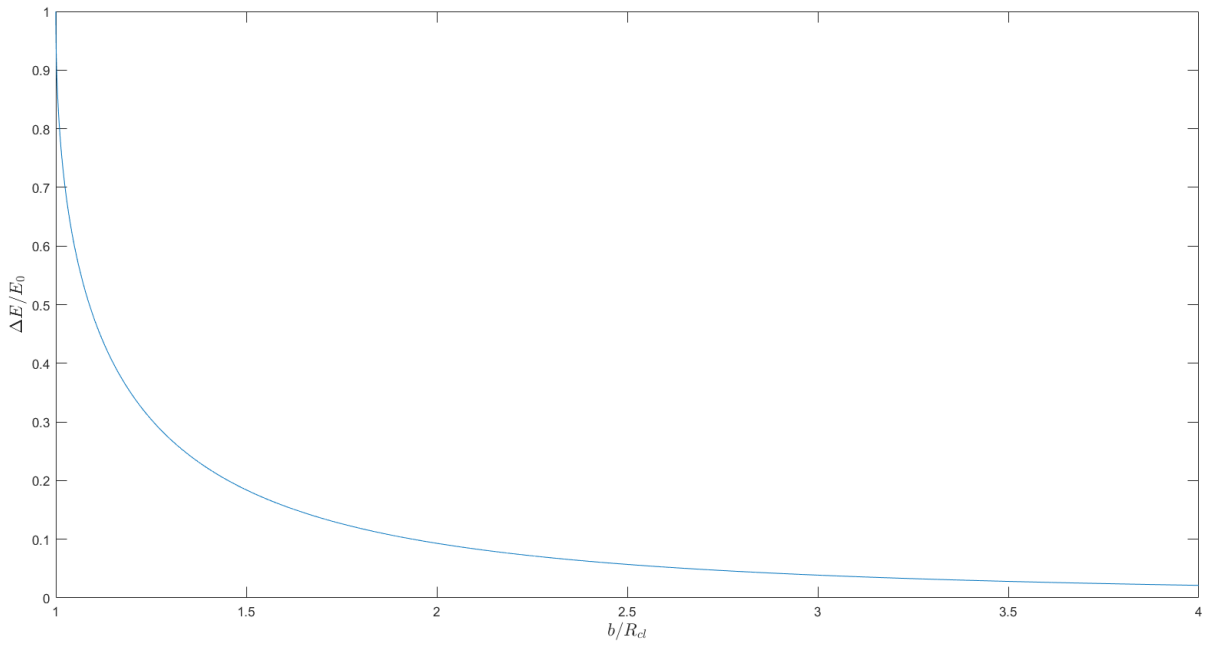

Рисунок 1.2 — изменения энергии кластера от прицельного параметра в системе покоя кластера, где $E_0 = 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho R_{cl}$

Уравнение 1.6 включает кинетическую энергию полученную центром масс(ЦМ) кластера. Из уравнения 1.1 находим, что ЦМ приобретает ско-

рость:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v}_{CM} &= \frac{1}{M_{cl}}\int\limits_0^{R_{cl}}\rho r^2\mathrm{d}r\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{2\pi}\Delta\mathbf{v}\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{2Gm_\star}{M_{cl}v}\rho\int\limits_0^{R_{cl}}r^2\mathrm{d}r\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{2\pi}\frac{-r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x+(b-r\sin\theta\sin\phi)\,\mathbf{e}_y}{r^2\sin^2\theta+b^2-2br\sin\phi\sin\theta} \\ &= \frac{2Gm_\star}{vb}\mathbf{e}_y\end{aligned} \tag{1.7}$$

найдем изменение энергии ЦМ:

$$\Delta E_{CM} = \frac{M_{cl}\Delta\mathbf{v}_{CM}^2}{2} = \left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2\frac{2M_{cl}}{b^2} \tag{1.8}$$

Нас интересует получение выигрыша во внутренней энергии кластера. Для этого воспользуемся теоремой Кёнига, которая позволяет выразить полную кинетическую энергию механической системы через энергию движения центра масс и энергию движения относительно центра масс.

$$E = E_{in} + E_{CM} \tag{1.9}$$

Теперь необходимо вычесть энергию, полученную ЦМ, из общей полученной энергии, что дает следующее выражение для изменения внутренней энергии:

$$\begin{aligned}\Delta E_{in} = \Delta E - \Delta E_{CM} &= 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2\rho\left[R_{cl}-\sqrt{b^2-R_{cl}^2}\arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2-R_{cl}^2}}\right)\right] \\ &- \left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2\frac{2M_{cl}}{b^2} \\ &= 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2\rho\left[R_{cl}-\sqrt{b^2-R_{cl}^2}\arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2-R_{cl}^2}}\right)-\frac{R_{cl}^3}{3b^2}\right]\end{aligned} \tag{1.10}$$

Изменение внутренней энергии кластера ПЧД представленно на рисунке 1.3.

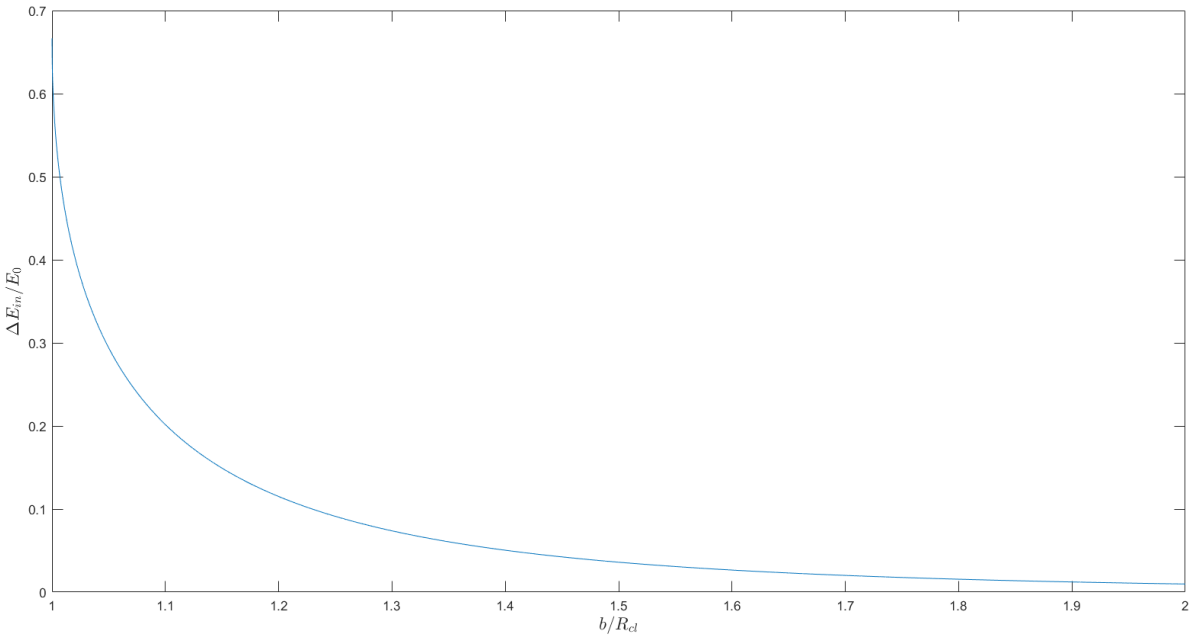

Рисунок 1.3 — Изменение внутренней энергии кластера ПЧД от прицельного параметра, где $E_0 = 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho R_{cl}$

Теперь когда мы знаем какую внутреннею энергию кластер получает от одной звезды, мы можем просуммировать по всем встречам со звездами, которые происходят с частотой $n_\star v \cdot 2\pi b db$ в единицу времени:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{in} &= 16\pi^2\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho n_\star v\left[\int\limits_{R_{cl}}^{R} R_{cl} b\mathrm{d}b - \int\limits_{R_{cl}}^{R}\sqrt{b^2-R_{cl}^2}\arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2-R_{cl}^2}}\right)b\mathrm{d}b\right. \\ &\left. - \int\limits_{R_{cl}}^{R}\frac{R_{cl}\mathrm{d}b}{3b}\right] \\ &= \frac{16}{3}\pi^2\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho n_\star v\left[R_{cl}(R^2-R_{cl}^2) - (R^2-R_{cl}^2)^{3/2}\arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R^2-R_{cl}^2}}\right)\right]\end{aligned} \tag{1.11}$$

Построим график 1.4 изменение внутренней энергии в единицу времени от размера системы.

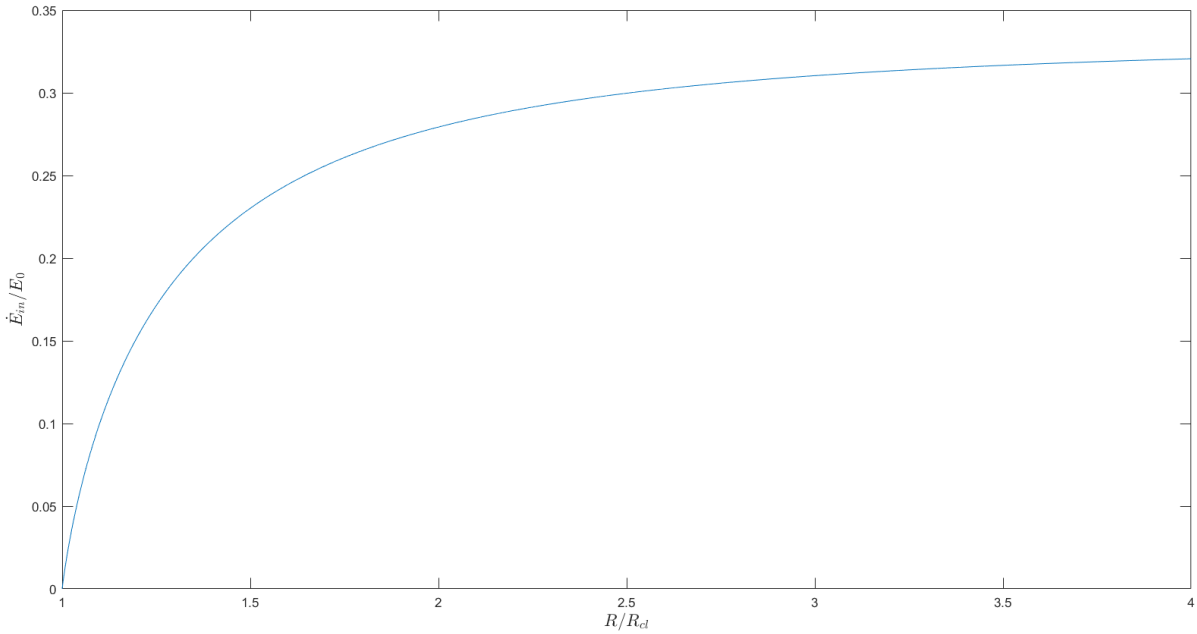

Рисунок 1.4 — Изменение внутренней энергии в единицу времени от размера системы, где $E_0 = \dfrac{16}{3}\pi^2 n_\star v \left(\dfrac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho R_{cl}$

Также просуммируем по всем встречам со звездами, которые происходят с частотой $n_\star v \cdot 2\pi b db$ в единицу времени, чтобы найти скорость изменения полной энергии:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= 16\pi^2 \left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho n_\star v \left[\int_{R_{cl}}^{R} R_{cl} b \mathrm{d}b - \int_{R_{cl}}^{R} \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}}\right) b \mathrm{d}b\right] \\ &= \frac{16}{3}\pi^2 \left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho n_\star v \left[R_{cl}(R^2 - R_{cl}^2) + R_{cl}^3 \ln\frac{R}{R_{cl}}\right. \\ &\left. - (R^2 - R_{cl}^2)^{3/2} \arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R^2 - R_{cl}^2}}\right)\right]\end{aligned} \tag{1.12}$$

Построим график 1.5 изменение полной энергии в единицу времени от размера системы.

Вернемся в лабораторную систему, где кластер движется относитель-

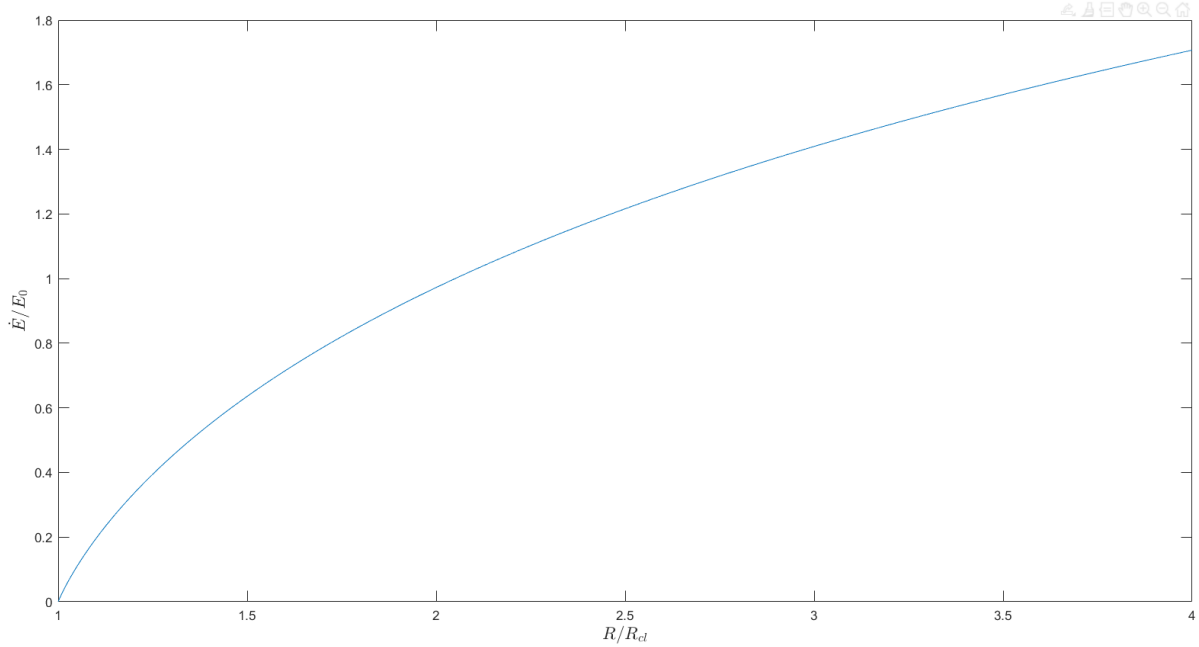

Рисунок 1.5 — Изменение полной энергии кластера ПЧД от прицельного параметра в системе покоя кластера, где $E_0 = 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho R_{cl}$

но звезды. Кинетическая энергия кластера:

$$\Delta E = \Delta E_{in} + \Delta E_{CM} \tag{1.13}$$

В лабораторной системе отсчета, изменение энергия ЦМ равна:

$$\Delta E_{CM} = -\frac{M_{cl}\Delta \mathbf{v}_{CM}^2}{2} = -\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \frac{2M_{cl}}{b^2} \tag{1.14}$$

найдем изменение кинетической энергии:

$$\Delta E = 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho\left[R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2}\arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}}\right) - \frac{2R_{cl}^3}{3b^2}\right] \tag{1.15}$$

Построим график 1.6 изменения кинетической энергии кластера ПЧД.

Теперь когда мы знаем какую энергию кластер передает одной звезде, мы можем просуммировать по всем встречам со звездами, которые проис-

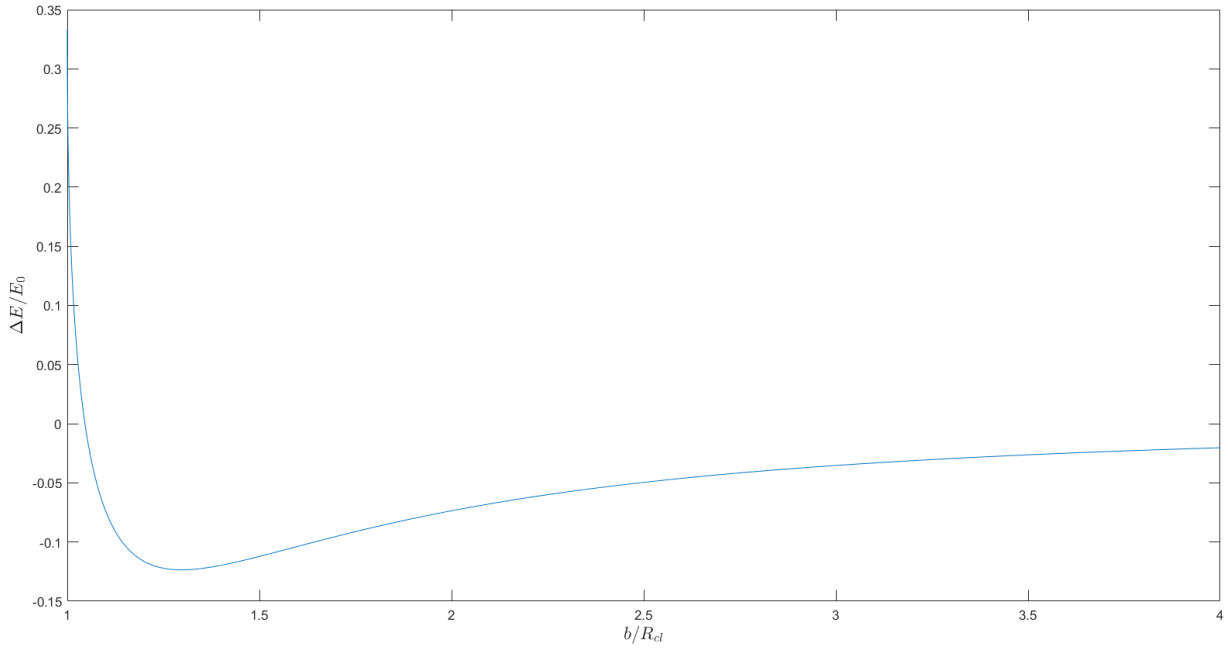

Рисунок 1.6 — Изменение кинетической энергии кластера ПЧД от прицельного параметра, где $E_0 = 8\pi\left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho R_{cl}$

ходят с частотой $n_\star v \cdot 2\pi b db$ в единицу времени:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= 16\pi^2 n_\star v \left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho \left[R_{cl} \int\limits_{R_{cl}}^{R} b\mathrm{d}b \right. \\ &\left. - \int\limits_{R_{cl}}^{R} \sqrt{b^2 - R_{cl}^2}\, \arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}}\right) b\mathrm{d}b - \int\limits_{R_{cl}}^{R} \frac{2R_{cl}^3 \mathrm{d}b}{3b} \right] \\ &= 16\pi^2 n_\star v \left(\frac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho \frac{1}{3} \left[R_{cl}(R^2 - R_{cl}^2) - R_{cl}^3 \ln\frac{R}{R_{cl}} \right. \\ &\left. - (R^2 - R_{cl}^2)^{3/2} \arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R^2 - R_{cl}^2}}\right) \right]\end{aligned} \tag{1.16}$$

Построим график 1.7 изменения энергии кластера ПЧД в единицу времени.

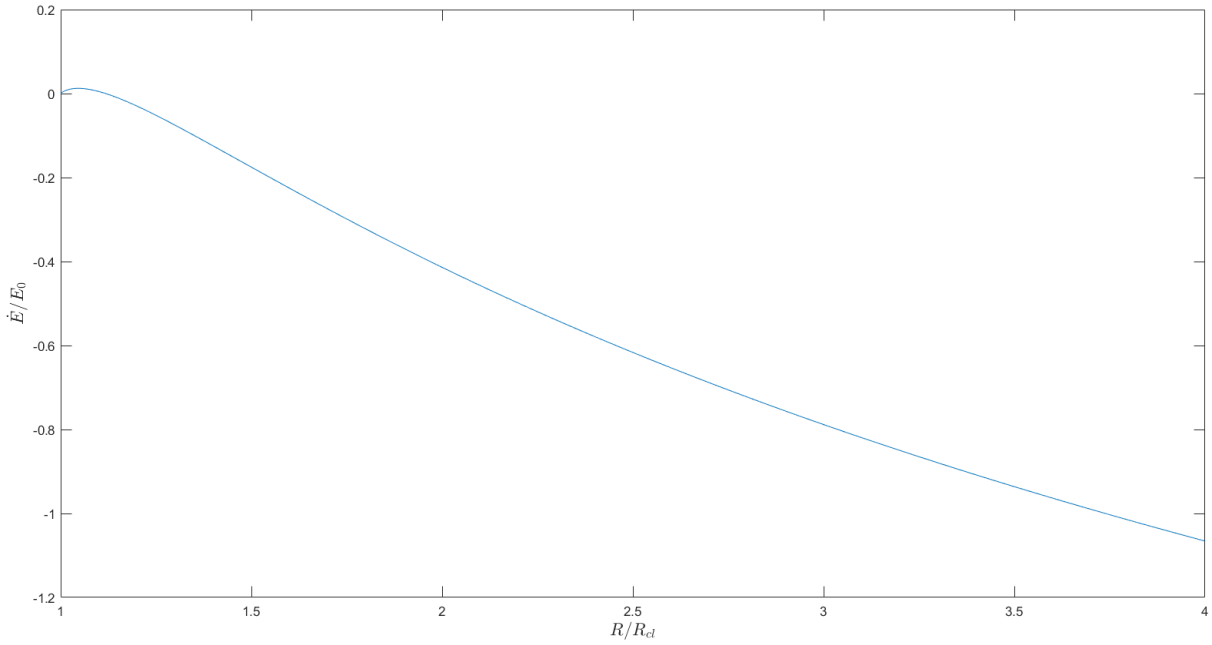

Рисунок 1.7 — Изменение энергии в единицу времени от размера системы, где $E_0 = \dfrac{16}{3}\pi^2 n_\star v \left(\dfrac{Gm_\star}{v}\right)^2 \rho R_{cl}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучалось взаимодействие кластера ПЧД со звездами. В ходе работы были получены выражения для изменения внутренней энергии кластера в приближениях, что кластер покоится, звезда налетает на него, и в обратном приближении, когда кластер движется, а звезда покоится. В результате этих приближений были получены полное изменение энергии кластера. Результаты показали, если кластер покоится, то в ходе взаимодействия со звездами он будет получать энергию, если кластер движется, то он будет терять энергию при большинстве прицельных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Constraints on primordial black holes / B. Carr [et al.] // Rept. Prog. Phys. — 2021. — Vol. 84, no. 11. — P. 116902. — arXiv: 2002.12778 [astro-ph.CO].
2. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].
3. *King I. R.* An Introduction to Classical Stellar Dynamics // University of California, Berkeley. — 1994.
4. *Richstone D. O.* Collisions of Galaxies in Dense Clusters. I. Dynamics of Collisions of Two Galaxies //. — 1975. — Vol. 200. — P. 535–547.
5. *Lee H. M.*, *Ostriker J. P.* Cross Sections for Tidal Capture Binary Formation and Stellar Merger //. — 1986. — Vol. 310. — P. 176.
6. *Press W. H.*, *Teukolsky S. A.* On formation of close binaries by two-body tidal capture. //. — 1977. — Vol. 213. — P. 183–192.
7. *Heggie D. C.* Binary evolution in stellar dynamics. //. — 1975. — Vol. 173. — P. 729–787.
8. *Bahcall J. N.*, *Hut P.*, *Tremaine S.* Maximum mass of objects that constitute unseen disk material //. — 1985. — Vol. 290. — P. 15–20.
9. *Fuller G. M.*, *Kusenko A.*, *Takhistov V.* Primordial Black Holes and r-Process Nucleosynthesis // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 119, issue 6. — P. 061101.
10. *Weinberg M. D.*, *Shapiro S. L.*, *Wasserman I.* The Dynamical Fate of Wide Binaries in the Solar Neighborhood //. — 1987. — Vol. 312. — P. 367.
11. *Moore B.* An Upper Limit to the Mass of Black Holes in the Halo of the Galaxy //. — 1993. — Vol. 413. — P. L93. — arXiv: astro-ph/9306004 [astro-ph].

12. *Banik U.*, *Bosch F. C. van den.* A fully general, non-perturbative treatment of impulsive heating // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2021.

13. *Spitzer Lyman J.* Disruption of Galactic Clusters. //. — 1958. — Vol. 127. — P. 17.