

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

УДК 539.121.667

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

**Разработка быстрого алгоритма цифровой обработки сигнала с фотонного
спектрометра PHOS эксперимента ALICE**

Научный руководитель

к.ф.-м.н.,

_____ Д.С. Блау

Студент

_____ П. А. Бахтин

Москва 2022

Содержание

Введение и физический смысл задачи	2
Постановка задач алгоритма	4
Описание предлагаемого алгоритма	5
Статистическое сравнение работоспособности и определения нужного параметра кодом	10
Сравнение времени работы алгоритмов	21
Выводы	23
Список используемых источников	24

Введение и физический смысл задачи

Эксперимент ALICE работает над описанием поведения кварк-глюонной плазмы. Одним из устройств, осуществляющих снятие экспериментальных данных, является электромагнитный калориметр PHOS[1] - установка, регистрирующая падающие на них фотоны. Сигнал от частицы, попадающей в калориметр, регистрируется фотодетектором (в случае PHOS - ливневый фотодиод APD). На фотоумножителе, аналоговый сигнал усиливается многократно. Далее данный сигнал машинно оцифровывается, и наступает стадия первичной обработки: чтобы восстановить энергию и время прилёта фотона, необходимо вычислить параметры сигнала. Сам оцифрованный сигнал выглядит следующим образом:

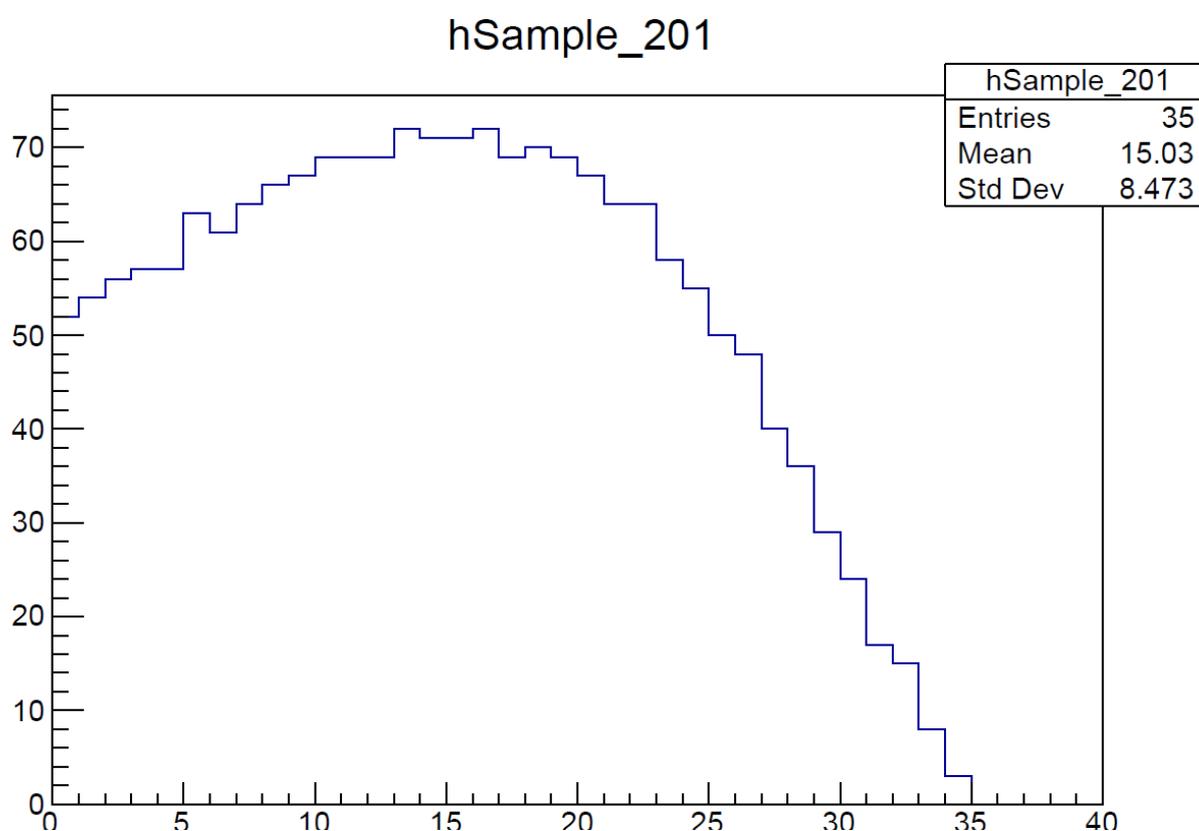


Рисунок 1 — Оцифрованный сигнал фотона снятый с калориметра

В работе [2] было показано, что в подавляющем большинстве слу-

чаев оцифрованный сигнал представляет собой вторую гамма-функцию, чья амплитуда связана с энергией фотона, а время прилёта указывает на геометрическое расположение события, позволяя оное идентифицировать.

Следовательно, основными искомыми параметрами фита являются: время τ идентификации сигнала и амплитуда A сигнала. Дополнительным параметром могут выступать экспоненциальный множитель β , и, вообще говоря, степень $t - \tau$. Последняя принята равной двум, без потери точности согласно [2]

Следует отметить свойства сигнала: каждый бин - промежуток величиной 100 наносекунд (10 МГц АЦП), вертикальные значения лежат в пределах от 0 до 1024.

Постановка задач алгоритма

Однако поскольку для работы калориметра в третьем сеансе измерений на БАК, который начнется в 2022 году и продлится следующие три года, необходима синхронная обработка указанных данных с их получением, к алгоритму фитирования возникают естественным образом некоторые требования, которые не позволяют использовать уже имеющееся средство программного пакета `root` для обработки.

Ранее, для определения искомых величин использовалось фитирование вершины с помощью параболы для поиска амплитуды, а затем фитирование прямой в окрестности точки начала.

Однако поиск точки начала при помощи фитирования прямой в окрестности показал себя недостаточно быстрым и точным, и как следствие - возникла задача его заменить каким-либо другим способом, который будет соответствовать следующим требованиям:

1) Скорость фитирования гистограммы - 300 тактов процессора 2) Разрешение параметра $\delta\tau = 500$ пкс 3) Амплитудное разрешение $\delta A = 0,5$ ADC

Подробнее рассмотрим связь легко обнаружимых точек функции и её основных параметров

$$f(t) = A \cdot (t - \tau)^2 \cdot \exp^{-\beta \cdot t} \quad (1)$$

Тогда время начала регистрации сигнала будет определяться выражением:

$$t = \tau \quad (2)$$

Вычислив производную по времени, можно получить, что время достижения вершины однозначно связано с экспоненциальным множителем:

$$\beta = \frac{2}{t_{max} - \tau} \quad (3)$$

Описание предлагаемого алгоритма

Предложено следующее решение. Сначала, путём сравнения находится бин, представляющий собой максимум в гистограмме. Берётся его окрестность в виде 5 бинов справа и слева от него, после чего вершина фитируется параболой (полиномом 2 степени) методом χ^2 .

Для поиска данного полинома методом наименьших квадратов запишем определение того, какой полином будет правильным, исходя из метода:

$$\min(\sum_{i=k}^n (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c)^2) \quad (4)$$

Он порождает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=k}^n 2 \cdot (a \cdot x_i^4 - y_i \cdot x_i^2 + b \cdot x_i^3 + c \cdot x_i^2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=k}^n 2 \cdot (a \cdot x_i^3 - y_i \cdot x_i + b \cdot x_i^2 + c \cdot x_i) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} = \sum_{i=k}^n 2 \cdot (a \cdot x_i^2 - y_i + b \cdot x_i + c) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Введём систему замен для постоянных, вычисляемых из данных:

$$\begin{cases} \sum_{i=k}^n x_i = S1; \sum_{i=k}^n x_i^2 = S2; \sum_{i=k}^n x_i^3 = S3; \sum_{i=k}^n x_i^4 = S4 \\ \sum_{i=k}^n y_i = \alpha0; \sum_{i=k}^n y_i \cdot x_i = \alpha1; \sum_{i=k}^n y_i \cdot x_i^2 = \alpha2 \end{cases} \quad (6)$$

Используя их, несложно переписать уравнения в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} aS4 + bS3 + cS2 = \alpha2 \\ aS3 + bS2 + cS1 = \alpha1 \\ aS2 + bS1 + c(n - k) = \alpha0 \end{cases} \quad (7)$$

Проведя ещё одну серию замен, можно получить аналитические вы-

ражения для коэффициентов, где серией замен будет:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{\alpha_0}{n-k}; \beta_1 = \frac{\alpha_1}{S_2}; \beta_2 = \frac{\alpha_2}{S_4} \\ \gamma_{10} = \frac{S_1}{n-k}; \gamma_{20} = \frac{S_2}{n-k} \\ \gamma_{32} = \frac{S_3}{S_2}; \gamma_{12} = \frac{S_1}{S_2} \\ \gamma_{34} = \frac{S_3}{S_4}; \gamma_{24} = \frac{S_2}{S_4} \\ \delta = \frac{\beta_1 - \gamma_{32}\beta_0}{1 - \gamma_{12}\gamma_{10}}; \epsilon = \frac{\gamma_{32} - \gamma_{20}\gamma_{12}}{1 - \gamma_{12}\gamma_{10}} \end{array} \right. \quad (8)$$

Используя введённые замены, несложно найти параметры параболы соответствующей методу:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\beta_2 - \gamma_{24}\beta_0 + \gamma_{24}\gamma_{10}\delta - \gamma_{34}\delta}{1 + \gamma_{24}\gamma_{10}\epsilon - \gamma_{24}\gamma_{20} - \epsilon\gamma_{24}} \\ b = a \cdot \epsilon + \delta \\ c = \beta_0 - b \cdot \gamma_{10} - c \cdot \gamma_{32} \end{array} \right. \quad (9)$$

Из этих параметров простым образом получаются два параметра функции, которые далее считают известными для работы следующего этапа, а именно - координаты вершины функции.

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{max} = \frac{-b}{2a} \\ Ampl = a \cdot t_{max}^2 + b \cdot t_{max} + c; \end{array} \right. \quad (10)$$

Таким образом, находится вершина функции, и получаются следующие соотношения, позволяющие восстанавливать все параметры при переборе величины τ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{2}{t_{max} - \tau} \\ A = \frac{(t_{max} - \tau) \exp \frac{2}{t_{max} - \tau} \cdot (t_{max} - \tau)}{Ampl} \end{array} \right. \quad (11)$$

Следующей операцией является минимизация по единственному неизвестному независимому параметру - величине τ . Поскольку требуется достичь нужной точности, алгоритм сделан следующим образом. Сначала ищется минимум функции по крупной сетке, с шагом в 0,5, затем этот шаг двукратно уменьшается, идёт уточнение значения минимума, после чего операция повторяется с увеличенной точностью. Причём, поскольку ось минимизации единственная, то можно искать именно устойчивый минимум, то есть, чтобы при движении и влево, и вправо величина функционала расстояния не увеличивалась.

Рассматривалась также минимизация методом Ньютона для использования в этом случае - однако оказалось, что элемент выражения для вычисления одной итерации в этом случае выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial t_{0i}} = \frac{8}{(t_{max} - t_{0i})^3} \cdot Ampl \\
& \cdot \exp^{\frac{2t_{0i}}{t_{max} - t_{0i} + 2}} \cdot \sum_{i=Sbin}^{Nbins} [(i - 0.5 - t_{0i})^4 \cdot \exp^{\frac{(-4) \cdot (i - 0.5)}{t_{max} - t_{0i}}}] \\
& + \frac{4}{(t_{max} - t_{0i})^2} \cdot Ampl \cdot \exp^{\frac{2t_{0i}}{t_{max} - t_{0i} + 2}} \\
& \cdot \frac{2t_{max}}{(t_{max} - t_{0i})^2} \cdot \sum_{i=Sbin}^{Nbins} [(i - 0.5 - t_{0i})^4 \cdot \exp^{\frac{(-4) \cdot (i - 0.5)}{t_{max} - t_{0i}}}] \\
& + \frac{4}{(t_{max} - t_{0i})^2} \cdot Ampl \cdot \exp^{\frac{2t_{0i}}{t_{max} - t_{0i} + 2}} \\
& \cdot \sum_{i=Sbin}^{Nbins} [(i - 0.5 - t_{0i})^3 \cdot \exp^{\frac{(-4) \cdot (i - 0.5)}{t_{max} - t_{0i}}} \\
& + (i - 0.5 - t_{0i})^4 \cdot \frac{(-4) \cdot (i - 0.5)}{(t_{max} - t_{0i})^2} \exp^{\frac{(-4) \cdot (i - 0.5)}{t_{max} - t_{0i}}}] \\
& - \sum_{i=Sbin}^{Nbins} [Ampl \cdot (-2) \cdot (i - 0.5 - t_{0i}) \exp^{\frac{(-2) \cdot (i - 0.5)}{t_{max} - t_{0i}}} + Ampl \\
& \cdot (-2) \cdot (i - 0.5 - t_{0i})^2 \cdot \exp^{\frac{(-2) \cdot (i - 0.5)}{t_{max} - t_{0i}}} \cdot \frac{2(i - 0.5)}{(t_{max} - t_{0i})^2}]
\end{aligned} \right. \quad (12)$$

Каждая итерация методом Ньютона, как следствие, представляет собой аналог перебора 9 значений при переборе времён, а число итераций подбора составляет 50 штук. При сходимости метода Ньютона за 5-6 итераций, получается, что он, если и даст выигрыш времени, то не на порядок.

Код реализован в парадигме ООП, т.е. к алгоритму статистического сравнения точности фитирования подключены функции, данное фитирование ведущие, генератор параметров функции, симуляция генерации встроена в код обработки симулируемых гистограмм.

Следует также обратить внимание на структуру сравнения качества работы алгоритмов. Их работа исследуется с помощью 2 выборок. Выборка 1: 5000 гистограмм, с параметрами возможными экспериментально, равно-

мерным распределением внутри таковых. Для неё известны настоящие значения параметров фитируемой функции, она используется в первую очередь для сравнения качества определения параметров. Выборка 2: 700 гистограмм из эксперимента для исследования скорости работы алгоритмов на реальных данных.

Примеры работы фитирования гистограмм:

Example Histogram 207

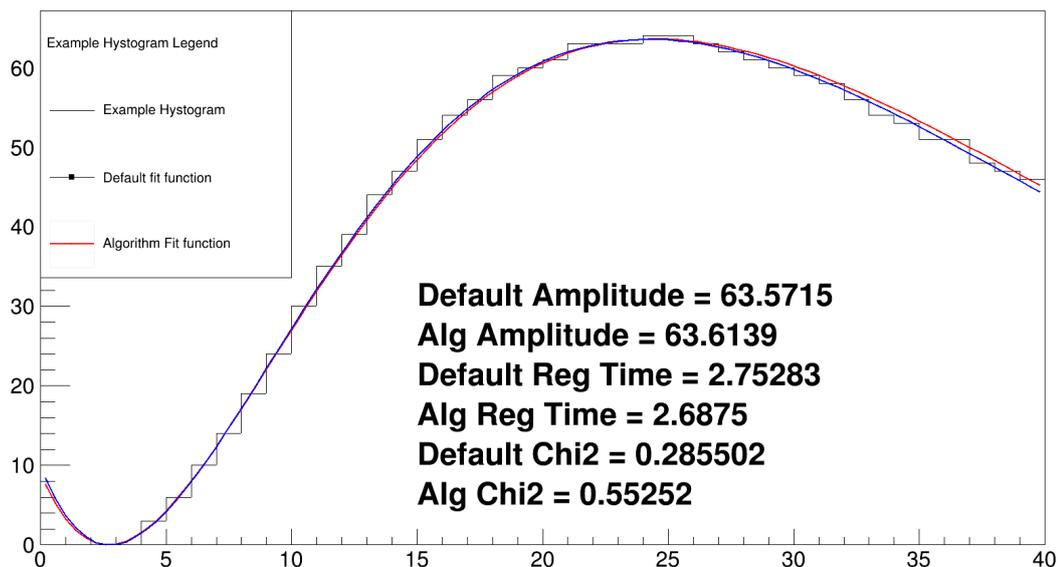


Рисунок 2

Example Histogram 505

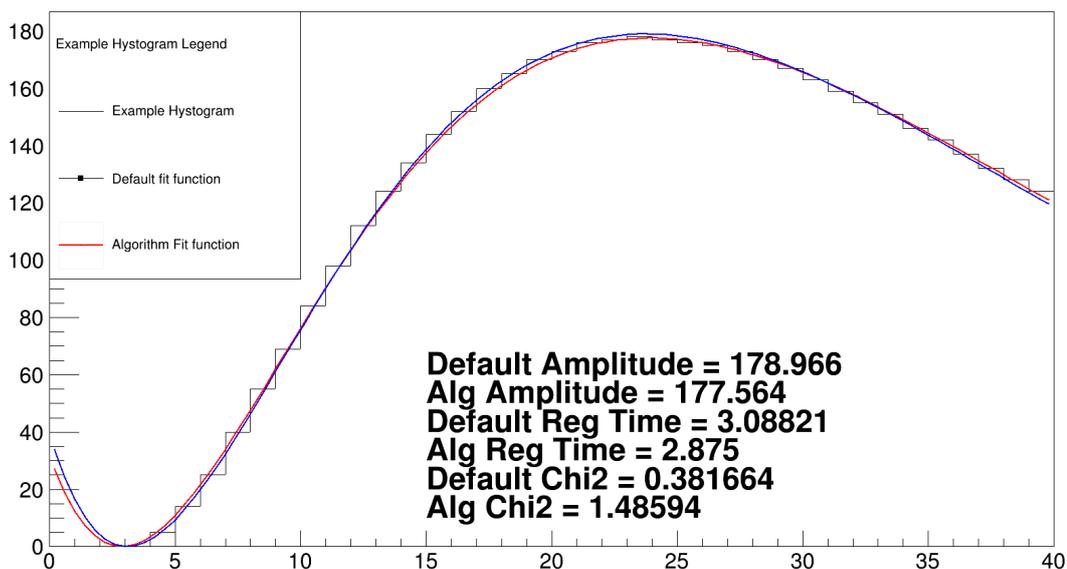


Рисунок 3

Обработка первой сгенерированной выборки

Соответственно, благодаря реализации кода в парадигме ООП, стало возможно провести анализ работоспособности алгоритма, его стабильности и точности, на основе 5000 сгенерированных гистограмм.

Получены гистограммы значений параметров фитирования и критерия χ^2 , к минимизации которого стремится алгоритм.

Распределение независимых параметров функции:

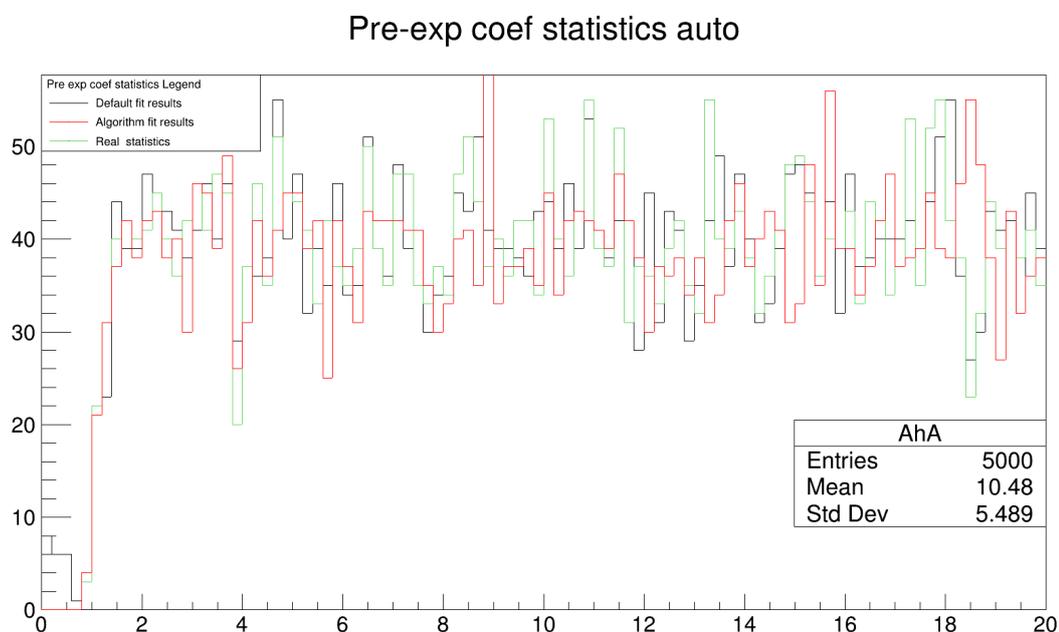


Рисунок 4 — Распределение предэкспоненциального коэффициента

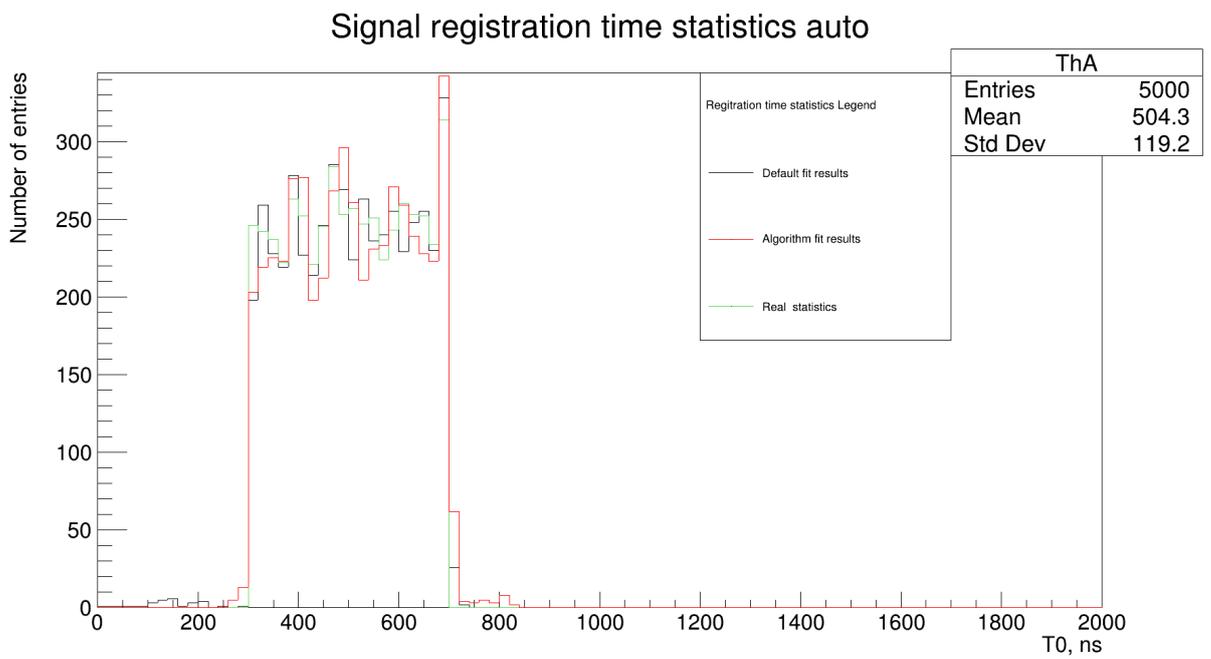


Рисунок 5 — Распределение времени регистрации сигнала

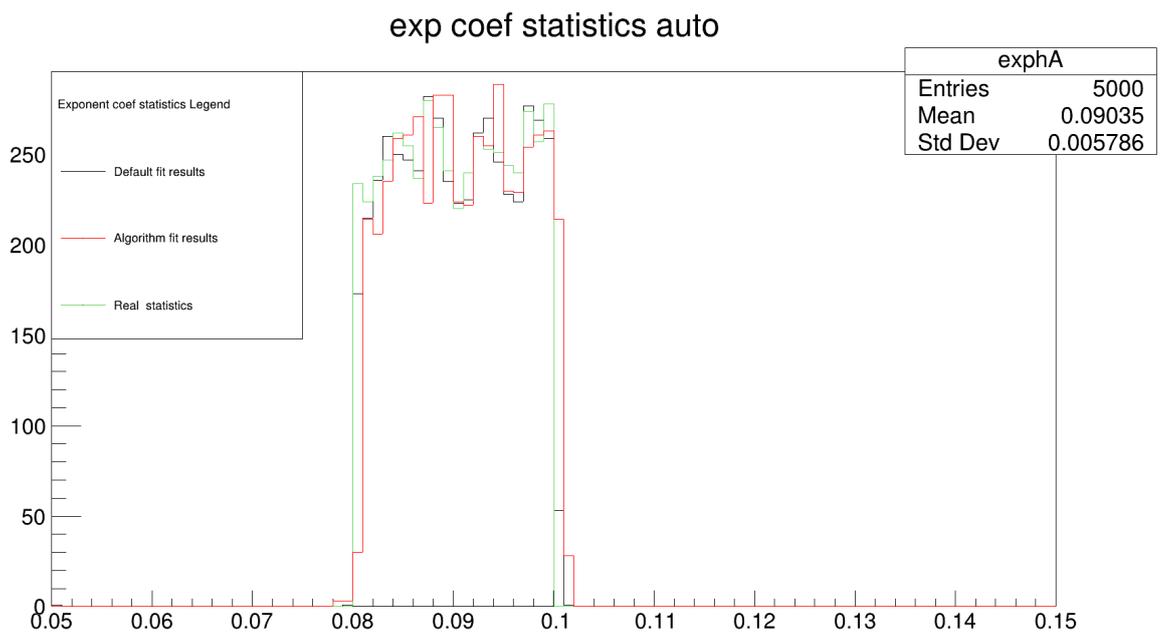


Рисунок 6 — Распределение с экспоненциальными коэффициентами

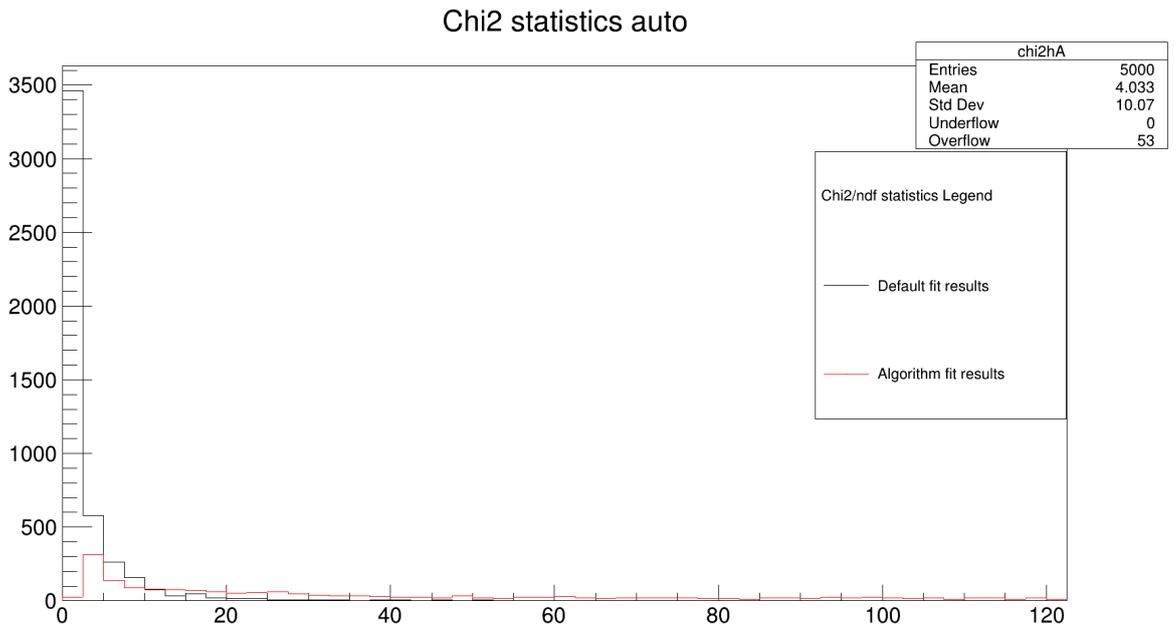


Рисунок 7 — Гистограмма распределения χ^2 результатов фитирования

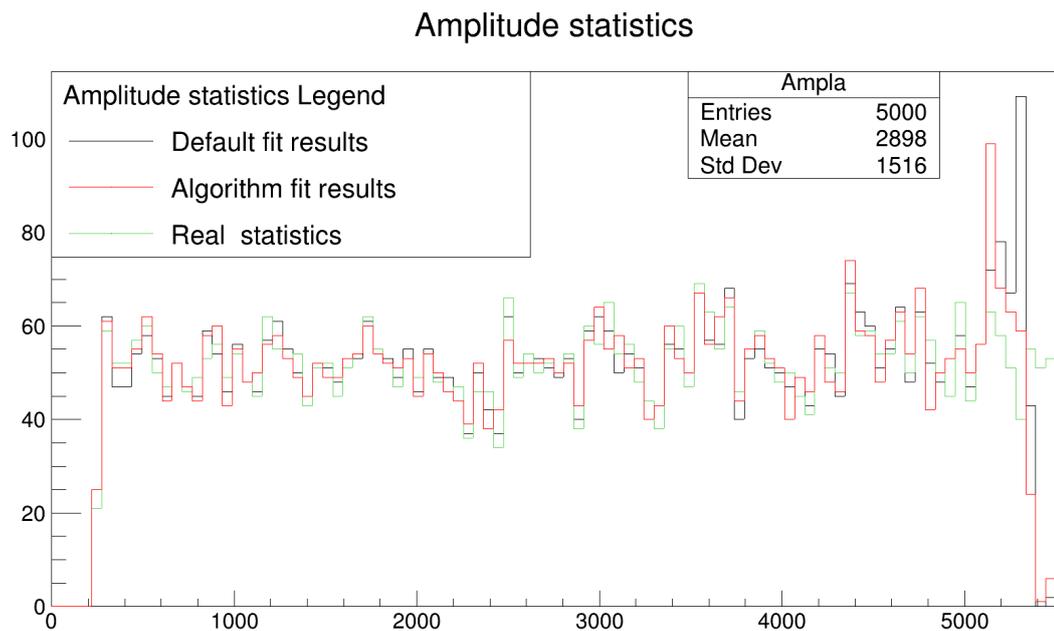


Рисунок 8 — Гистограмма распределения Амплитуд зарегистрированных сигналов

Далее были получены гистограммы распределения разностей по параметрам - здесь следует сфокусировать внимание на параметрах амплитуды и времени регистрации. Отдельно представлены распределения для каждого из алгоритмов по отдельности.

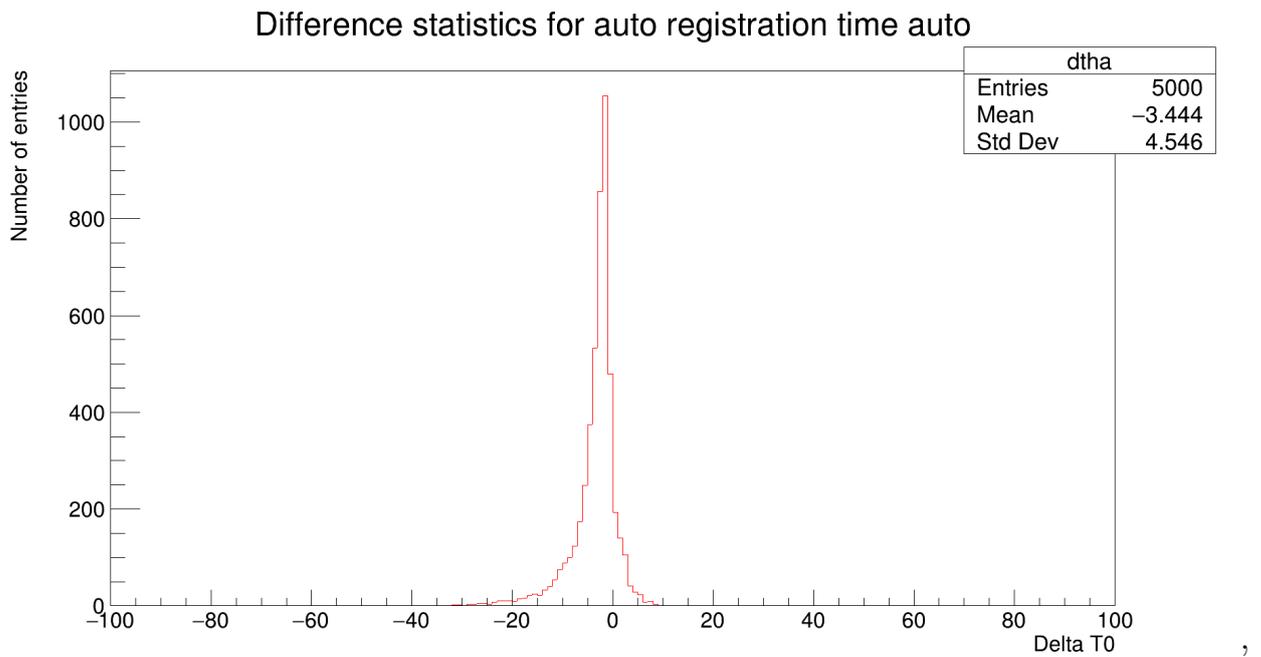


Рисунок 9 — Статистика распределения разности времени регистрации сигнала - менуит

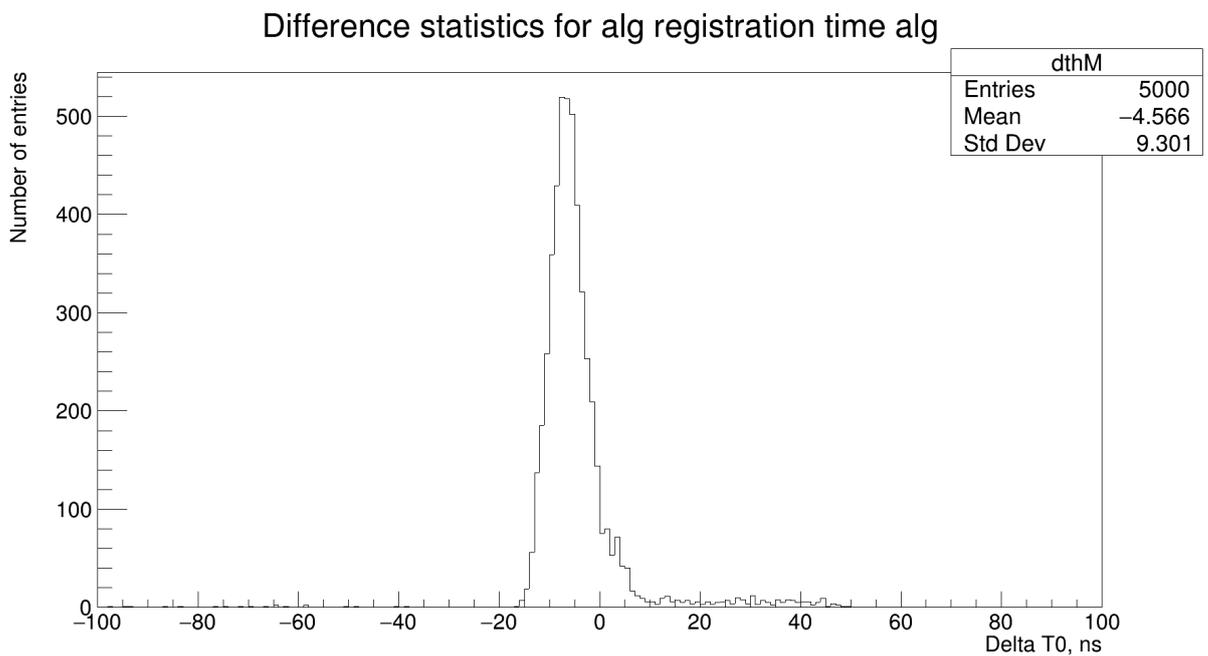


Рисунок 10 — Статистика распределения разности времени регистрации сигнала - построенный алгоритм

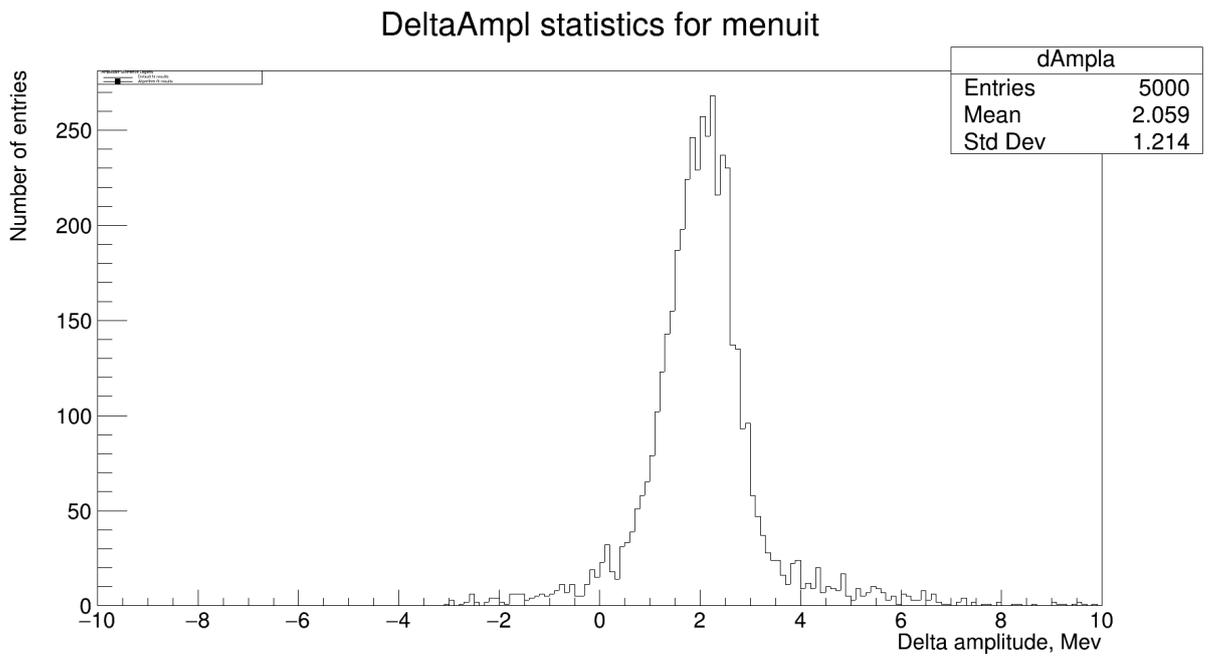


Рисунок 11 — Статистика распределения разности Амплитуд - менюит

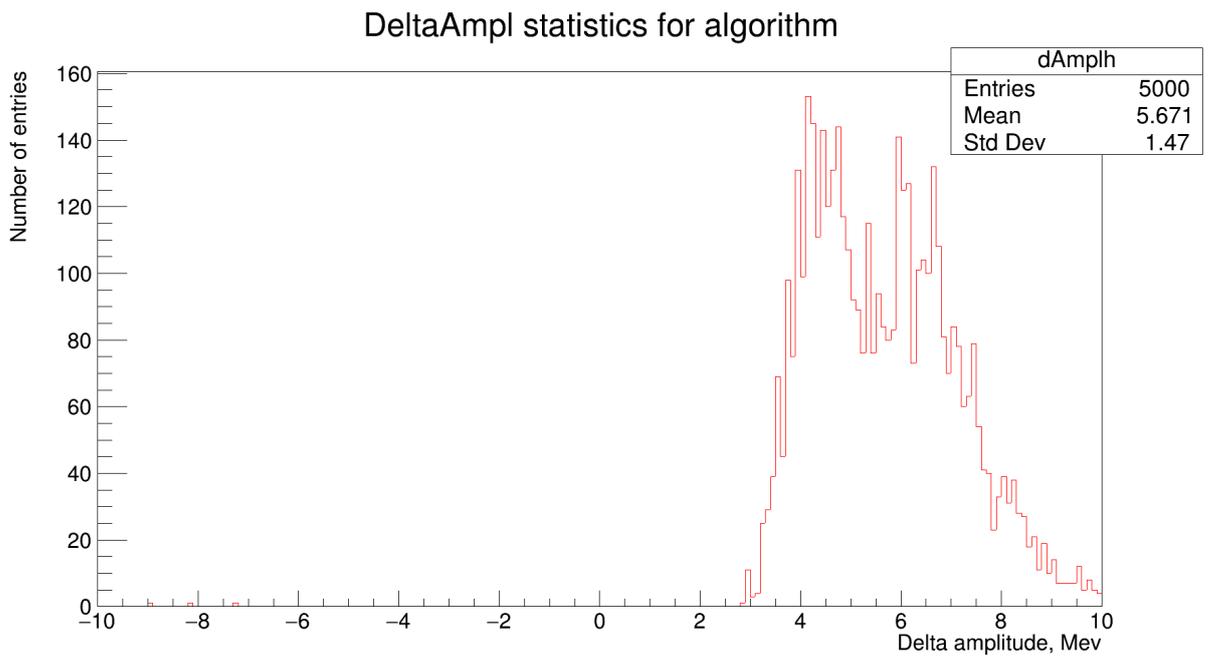


Рисунок 12 — Статистика распределения разности Амплитуд - алгоритм

Также следует представить характеристику качества фитов - в виде распределения функционала расстояния χ^2/ndf . Она, однако, в случае данной выборки носит вспомогательный характер, поскольку нам известны параметры фитируемого сигнала с самого начала.

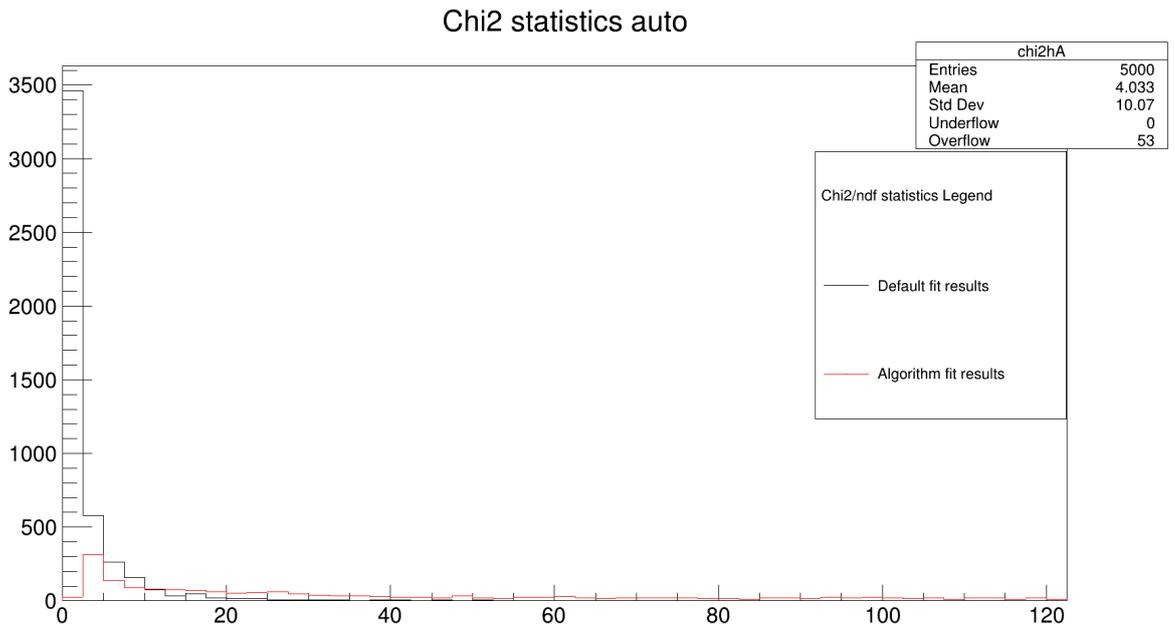


Рисунок 13 — Статистика распределения χ^2/ndf

Далее - следуют гистограммы, где исследуется характер ошибок алгоритмов и наличие у них ошибок. Первое - распределения по разности амплитуд и амплитуде, и распределение по разности времён регистрации и амплитудам.

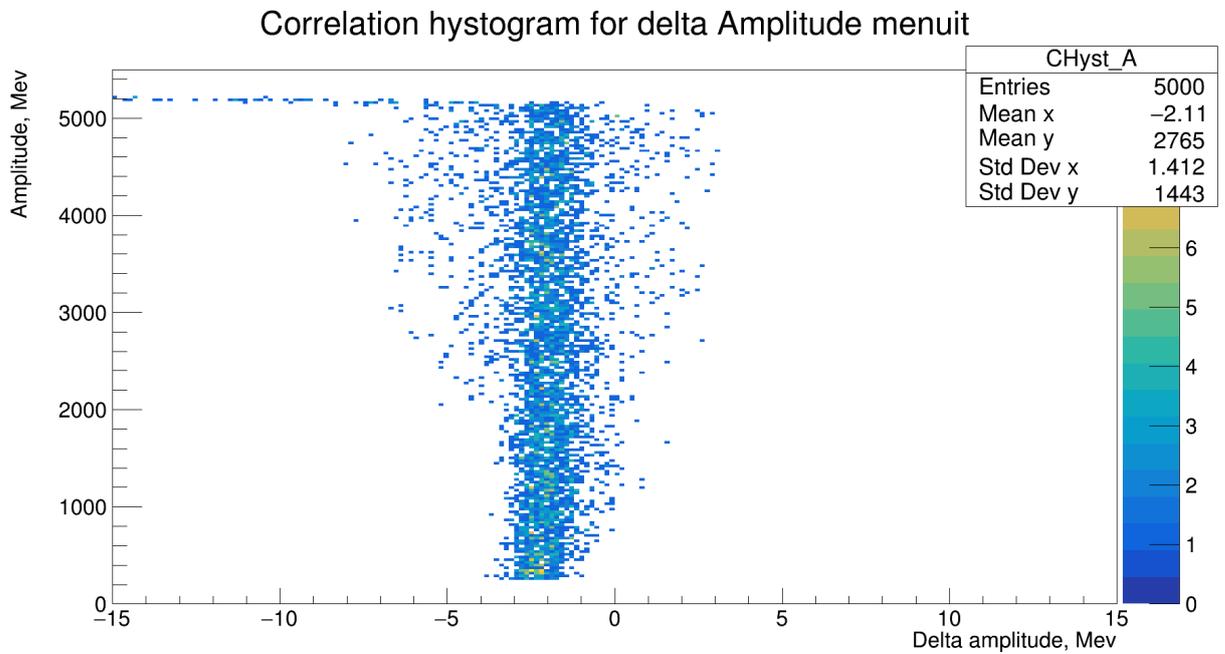


Рисунок 14 — Гистограмма распределения по разности амплитуд и амплитуде - менуит

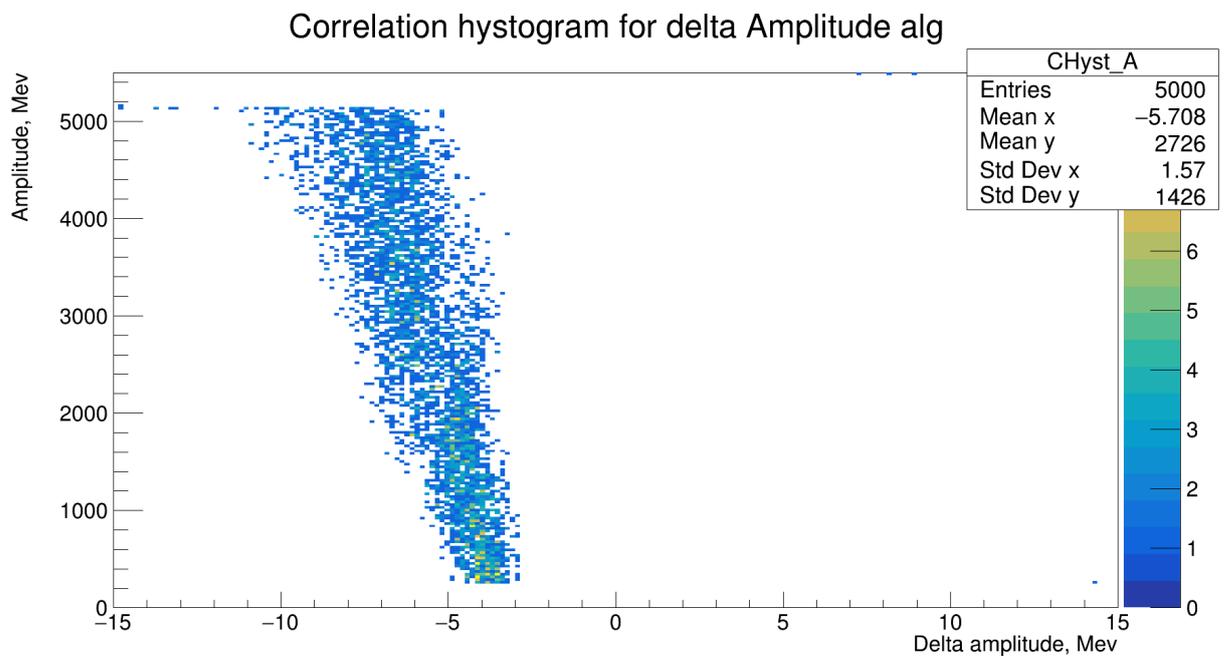


Рисунок 15 — Гистограмма распределения по разности амплитуд и амплитуде - алгоритм

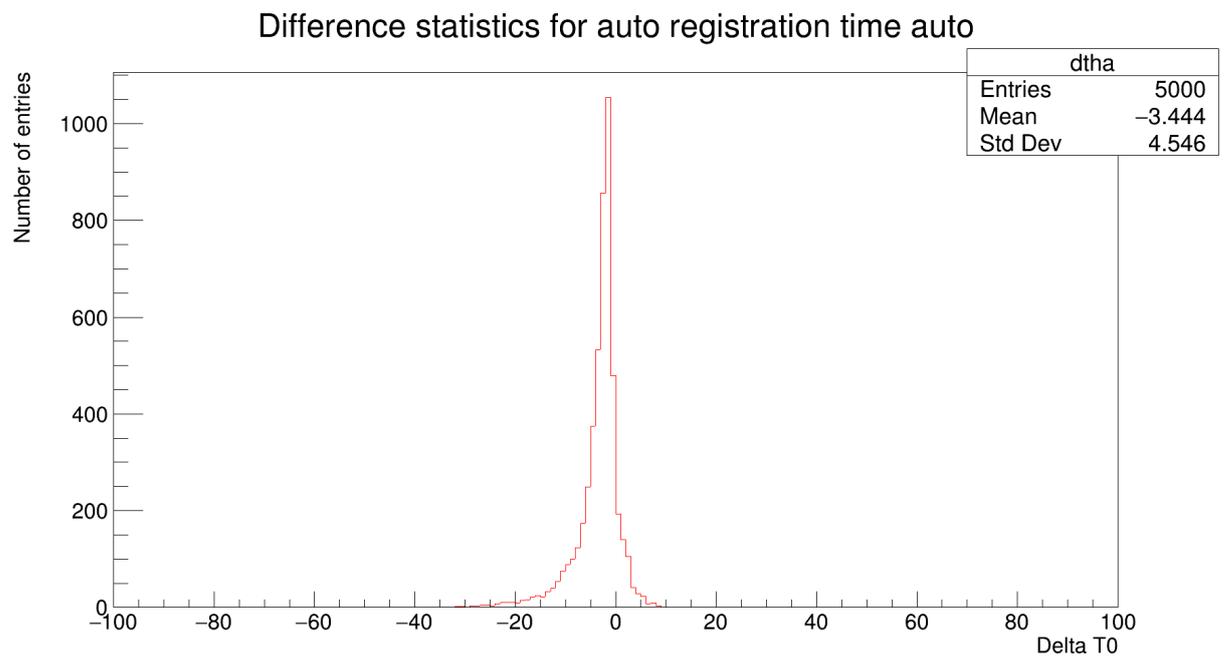


Рисунок 16 — Гистограмма распределения по разности времени регистрации и амплитуде - менуит

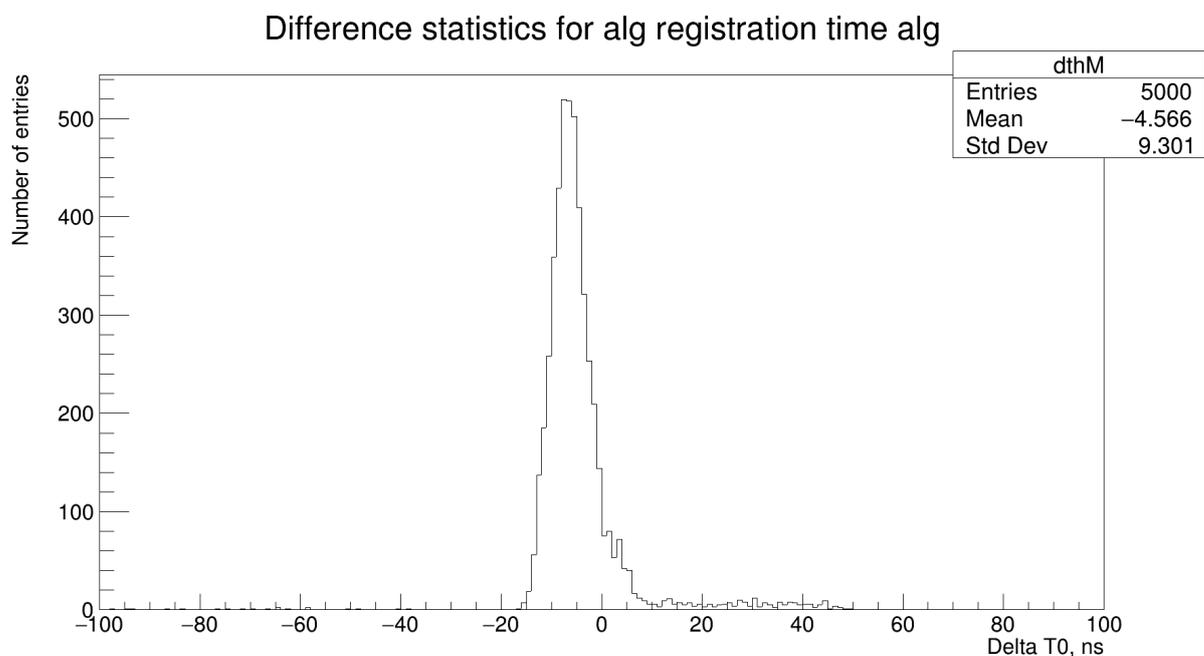


Рисунок 17 — Гистограмма распределения по разности времени регистрации и амплитуде - алгоритм

Отсюда видно: алгоритм лучше определяет время регистрации сигнала при малых сигналах, нежели менуит, не возможен к использованию в гистограммах с переполнением (необходимо подключение менуита в этом случае). В то же время, ошибка определения (сдвиг) для амплитуды линейно зависит от неё самой, для времени регистрации сдвиг постоянный, при переполнении - линейен. Необходимо подробно рассмотреть, скоррелированы ли ошибки определения параметров для разных алгоритмов между собой.

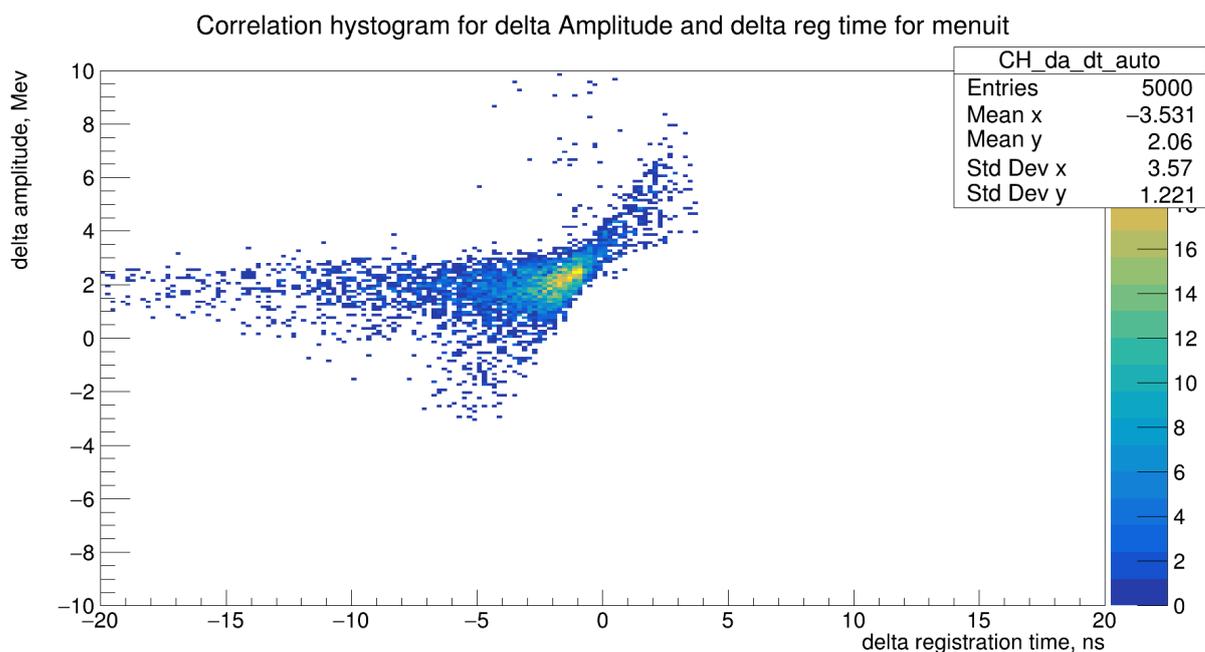


Рисунок 18 — Гистограмма корреляции ошибок определения параметров - менуит

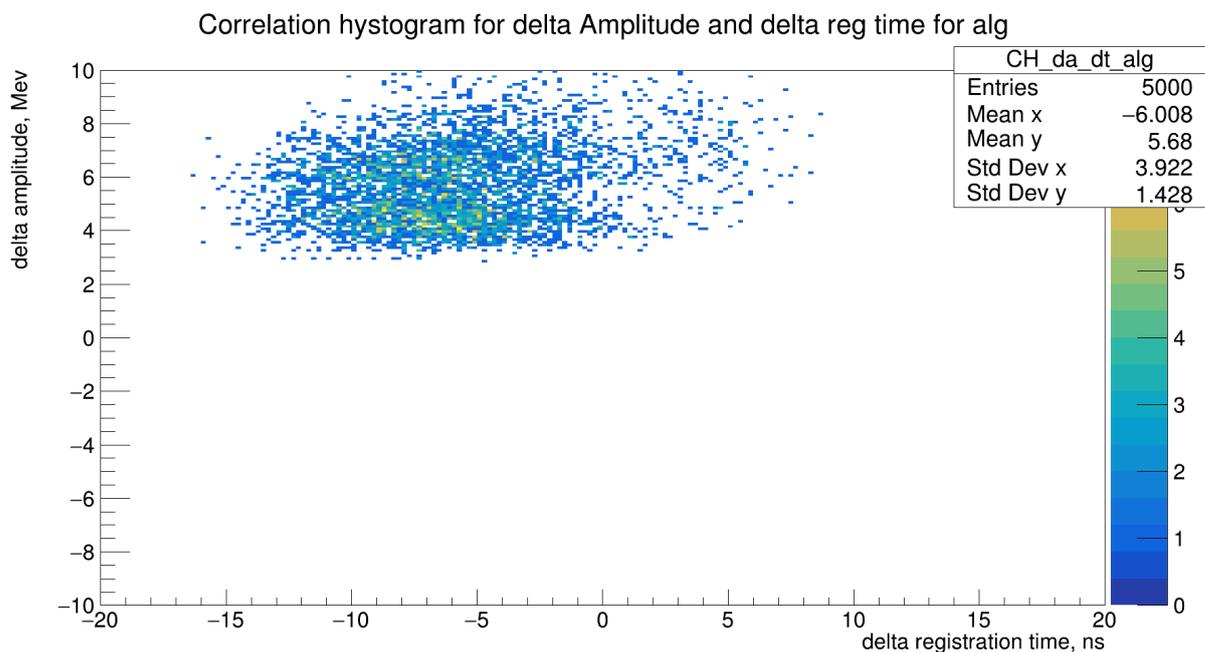


Рисунок 19 — Гистограмма корреляции ошибок определения параметров - алгоритм

Исходя из гистограммы зависимости величины ошибки от амплитуды, можно строить графики разрешения в зависимости от амплитуды временного разрешения для обоих алгоритмов. Получаются следующие гра-

фики:

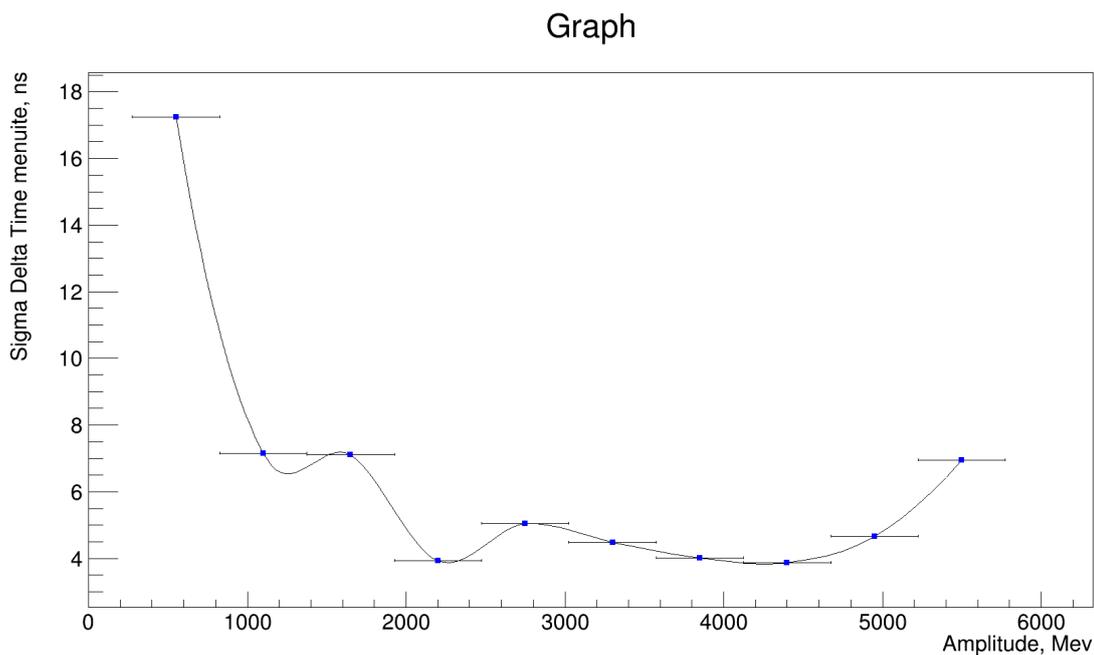


Рисунок 20 — Временное разрешение в зависимости от энергии - менуит

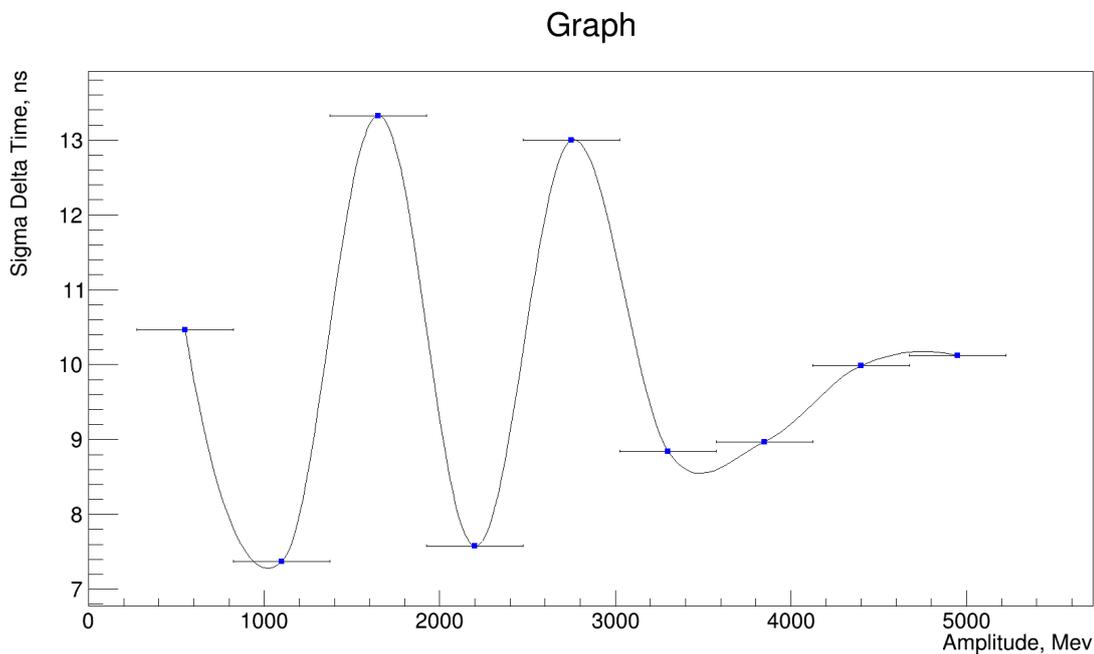


Рисунок 21 — Временное разрешение в зависимости от энергии - алгоритм

Полученные значения временных разрешений для алгоритмов имеют схожие значения 5-10 нс. Такое временное разрешение для "идеальных" гистограмм показывает, что искажения, связанные с фитированием

разными алгоритмами, будут вторичны в эксперименте на фоне погрешностей, связанных с приближением формы регистрируемого сигнала.

Сравнение времени работы алгоритмов

Эта задача достаточно проста. Возможности языка C++ в виде пакета `time.h` позволяют вычислять время работы алгоритмов в тактах процессора. Поскольку применяться алгоритм будет, вообще говоря, вполне возможно на ЭВМ с иными характеристиками, то именно в них и надо вычислять данную характеристику.

Времена работы измерялись, исходя из выборки номер 2 - гистограмм сигналов, полученных при столкновении ядер свинца, поскольку в реальных сигналах могут быть дополнительные искажения формы сигнала относительно функции, которой производится фитирование.

Статистика по времени работы алгоритмов:

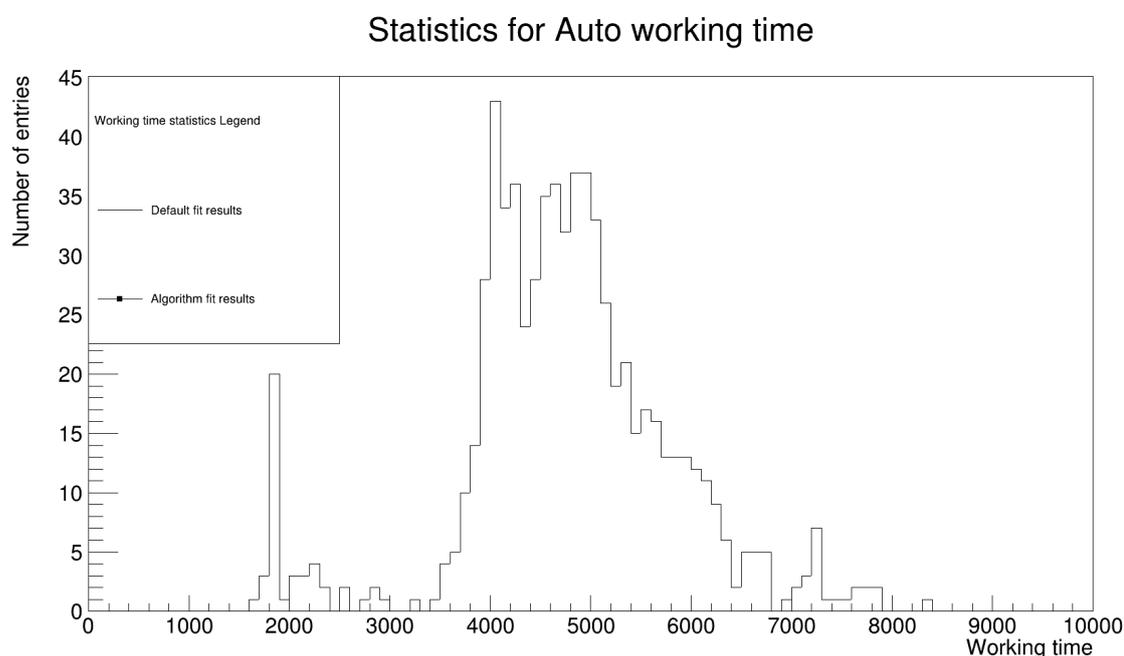


Рисунок 22 — Статистика времени фитирования - менуит

Statistics for Alg working time

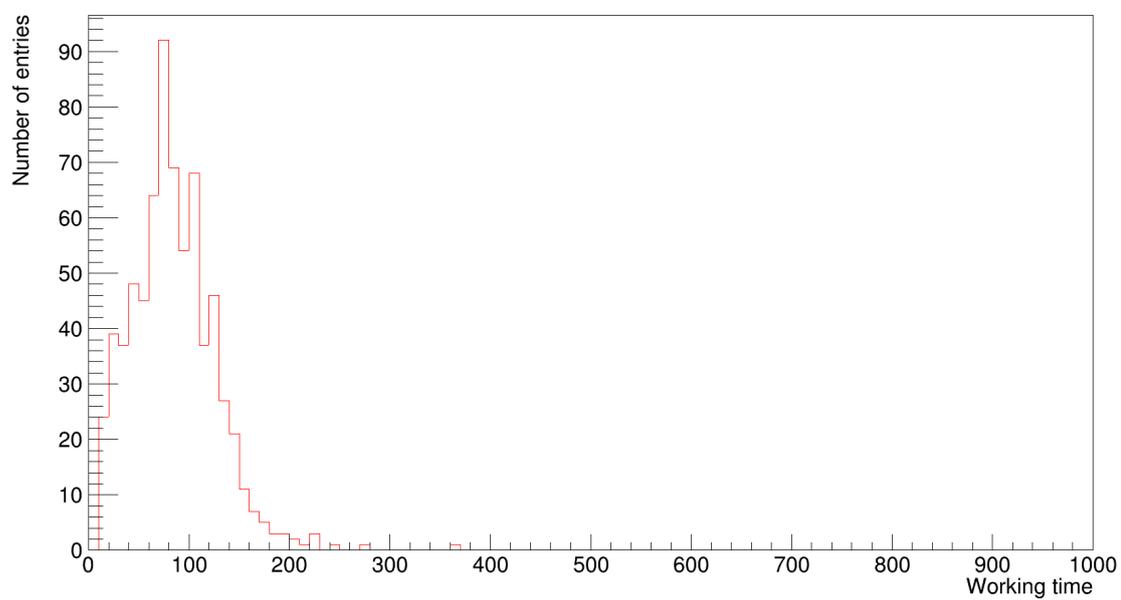


Рисунок 23 — Статистика времени фитирования - алгоритм

Выводы

Построенный алгоритм удовлетворяет требованиям к скорости обработки измеряемых данных, фитируя экспериментальные гистограммы за 200 тактов. Построенный алгоритм не даёт желаемого разрешения по энергии и времени регистрации, однако понижение точности в результате его работы меньше, чем на порядок, при увеличении скорости на порядок. Он требует некоторой доработки и ограничен в использовании при сигналах с переполнением и выбросами. Ошибки по независимым параметрам не скоррелированы, предположительно, они происходят только из округления вниз значений бинов в гистограмах при моделировании сигнала. Также следует отметить, что данная конкретная работа является частью более крупной работы, в которой подбирается оптимальное соотношение между точностью и скоростью вычисления параметров для калориметра PHOS в эксперименте ALICE.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Collaboration A.* https://alice-collaboration.web.cern.ch/menu_projects/phos-cpv. — 2020.
2. Analytical solutions in amplitude and time measurements from discrete sampling of pseudo-Gaussian signals / A. V. M.Yu. Bogolyubsky [et al.] // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A. — 2021. — Vol. 1003, issue 1. — P. 165289.