

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.17

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**ПЕРЕСМОТР ОГРАНИЧЕНИЯ ПО БЕЛЫМ
КАРЛИКАМ НА ПЛОТНОСТЬ ПЕРВИЧНЫХ
ЧЕРНЫХ ДЫР В СЛУЧАЕ ИХ
КЛАСТЕРИЗАЦИИ**

Научный руководитель
к.ф.-м.н.

_____ К. М. Белоцкий

Студент

_____ Н. Б. Мясников

Москва 2022

Содержание

1	Введение	3
2	Исследование возможности снятия ограничения на первичные черные дыры по белым карликам в случае кластеризации	3
3	Пересмотр ограничения по белым карликам на плотность первичных черных дыр в случае их кластеризации	6
4	Заключение	11

1 Введение

Первичные черные дыры (ПЧД) могут составлять значительную часть темной материи во Вселенной. Кластеризация ПЧД может существенно повлиять на ограничения их плотности. Мы предлагаем аналитическое рассмотрение кластеризации ПЧД. В случае если ПЧД образуют кластеры, они могут ослабить или снять существующие ограничения на плотность равномерно распределенных ПЧД, что позволит ПЧД стать жизнеспособными кандидатами на темную материю.

2 Исследование возможности снятия ограничения на первичные черные дыры по белым карликам в случае кластеризации

Оценить возможность снятия ограничения на плотность ПЧД по белым карликам (БК) в скоплениях в случае кластеризации. Первый этап оценки проводился при следующих параметрах: Радиус кластера ПЧД $R = 1 \text{ пк} = 3 \cdot 10^{18} \text{ см}$, общая масса кластера $M = 10^3 M_{\odot} = 2 \cdot 10^{36} \text{ г}$. Для БК использовались стандартные значения: $M_{\text{БК}} = 1 M_{\odot}$, $R_{\text{БК}} = 6400 \text{ км}$. Для получения гравитационного сечения $\sigma_{\text{ГЗ}}$ захвата БК использовалась формула:

$$\sigma_{\text{БК}} = 4\pi R_{\text{БК}}^2 \cdot \left(\frac{v_2}{v_{\infty}} \right)^2,$$

где v_2 – вторая космическая скорость, v_{∞} – скорость на бесконечно большом расстоянии, $R_{\text{БК}}$ – радиус белого карлика. Таким образом, было получено значение $\sigma_{\text{ГЗ}} = 5.4 \cdot 10^{11} \text{ км}^2$ для БК. Следующая важная для нашей задачи величина – $N_{\text{БК}}$ – количество ПЧД, с которыми провозаимодействует (т.е. захватит) БК при пролете через кластер. Значение $N_{\text{БК}}$ может быть получено следующим выражением:

$$N = \sigma_{\text{WD}} \cdot d \cdot n,$$

Где $\sigma_{\text{БК}}$ – гравитационное сечение захвата БК, $d = 2R$ – диаметр кластера, n – концентрация ПЧД внутри кластера. Подставив заданные в условии величины, получаем следующее:

$$N = \frac{\sigma M}{2mR^2},$$

где m – масса ПЧД, принадлежащая промежутку $[10^{18}; 10^{24}] \text{ г}$.

Таблица 1

m, г	N
10^{18}	$6 \cdot 10^8$
10^{19}	$6 \cdot 10^7$
10^{20}	$6 \cdot 10^6$
10^{21}	$6 \cdot 10^5$

Логарифмируя значения из таблицы 1, получаем:

Таблица 2

$\log(\mathbf{m})$	$\log(\mathbf{N})$
18	9
19	8
20	7
21	6

По полученным данным можем построить график в логарифмическом масштабе

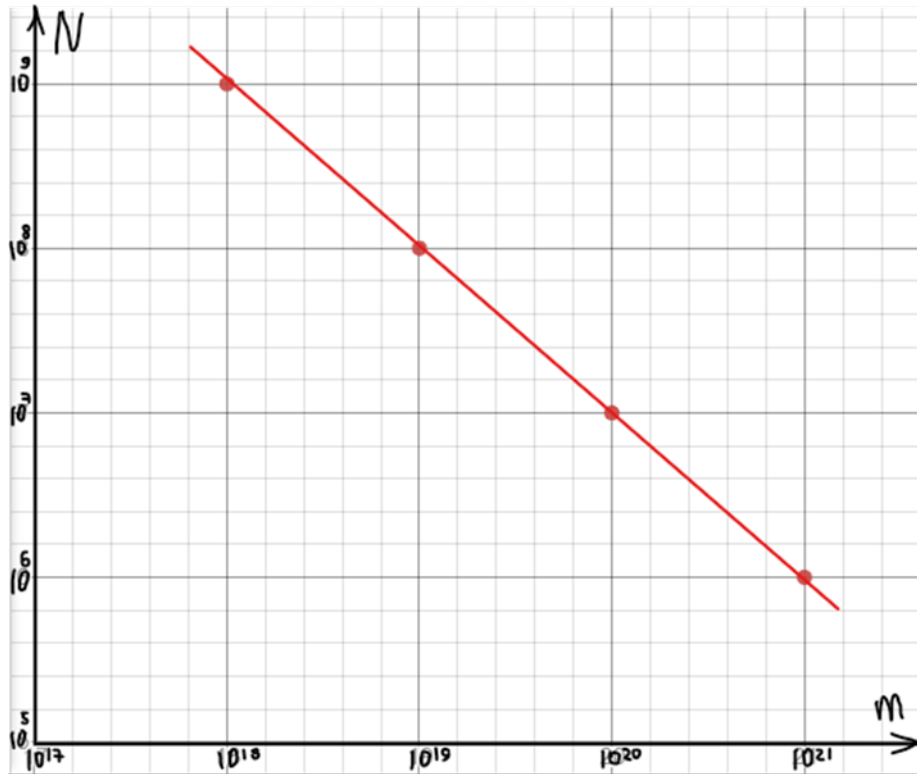


Рисунок 1 — Зависимость количества пойманных ПЧД белым карликом при пролете через кластер с параметрами $R = 1\text{пк} = 3 \cdot 10^{18}$ см, $M = 10^3 M_{\odot} = 2 \cdot 10^{36}$ г от массы ПЧД.

Следующим естественным предположением для усовершенствования модели будет изменение параметров кластера следующим образом: общая масса кластера $M_1 = 10^{-3} M_{\odot} = 2 \cdot 10^{36}$ г, $M_2 = 1 M_{\odot}$, $M_3 = 10^4 M_{\odot}$, радиус кластера ПЧД $R =$
 $= 1\text{пк} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 10^{18}$ см $\cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Аналогичным образом, получаем:

Таблица 3

m, g	N_1	N_2	N_3
10^{18}	10^6	$6 \cdot 10^7$	10^9
10^{19}	10^5	$6 \cdot 10^6$	10^8
10^{20}	10^4	$6 \cdot 10^5$	10^7
10^{21}	10^3	$6 \cdot 10^4$	10^6
10^{22}	10^2	$6 \cdot 10^3$	10^5
10^{23}	10	$6 \cdot 10^2$	10^4
10^{24}	1	$6 \cdot 10^1$	10^3
M	$10^{-3}M_{\odot}$	$1M_{\odot}$	10^4M_{\odot}

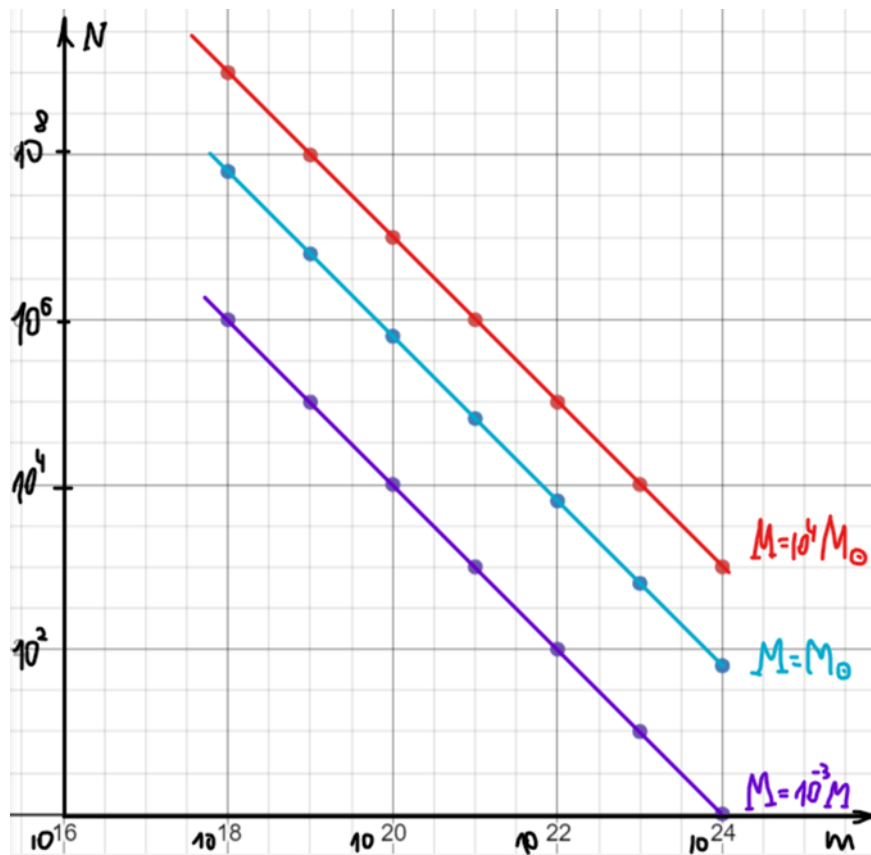


Рисунок 2 — Зависимость количества пойманных ПЧД белым карликом при пролете через кластер с параметрами $R = 1 \text{пк} = 3 \cdot 10^{18} \text{ см}$, $M_1 = 10^{-3}M_{\odot}$, $M_2 = 1M_{\odot}$, $M_3 = 10^4M_{\odot}$ от массы ПЧД.

Следующий этап исследования заключается в построении схожей модели, но в масштабах галактики. Параметры галактики: $M = 5 \cdot 10^{12}M_{\odot}$, $R = 100 \text{кпк}$. Поскольку физика процесса та же, то и формулы сильно отличаться не будут. Таким образом, имеем:

$$\sigma_{\text{кл}} = 4\pi R_{\text{кл}}^2 \cdot \left(\left(\frac{v_2}{v_{\infty}} \right)^2 + 1 \right)$$

где v_2 – вторая космическая скорость, v_{∞} – скорость на бесконечно большом расстоянии, $R_{\text{кл}}$ – радиус кластера ПЧД. Таким образом, было получено значение сечение гравитационного захвата:

тационного захвата кластера $\sigma_{\text{кл}} = 5.24 \cdot 10^{38} \text{см}^2$. В масштабах галактики отношение $(\frac{v_2}{v_\infty})^2$ стремится к нулю, поэтому формула упрощается:

$$\sigma_{\text{кл}} = 4\pi R_{\text{кл}}^2$$

Используя формулу (2), получим значение N – количество кластеров, в которые залетит ПЧД при пролете сквозь галактику по диаметру: $N = 1,5$ для массы кластера $M_3 = 10^4 M_\odot$ – наиболее интересный для нас вариант. Для того, чтобы посчитать статистическую вероятность можно разделить полученное значение N на общее количество кластеров N_d , лежащих вдоль траектории полета (на диаметре галактики) БК. После несложных подсчетов получаем отношение: $p = \frac{1.5}{46415} = 3 \cdot 10^{-5}$ – вероятность попадания БК в кластер при пролете вдоль диагонали галактики.

3 Пересмотр ограничения по белым карликам на плотность первичных черных дыр в случае их кластеризации

Следующий этап исследования заключается в построении обратной задачи, которая представляет собой получение графика в координатах $(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}})$ при прочих фиксированных параметрах, при которых ограничение на плотность скрытой массы, приходящейся на ПЧД, снимается.

В статье [1] приводятся оценки ограничений на долю массы ПЧД в скрытой массе.

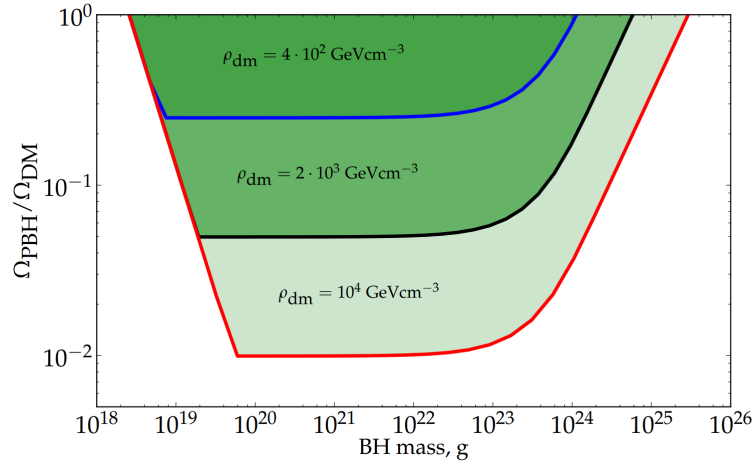


Рисунок 3 — Зависимость ограничений в зависимости от доли массы ПЧД в общем количестве скрытой массы от предполагаемой плотности скрытой массы в ядре шарового скопления. Показаны три случая: $\rho_{\text{DM}} = 4 \cdot 10^2 \text{ ГэВсм}^{-3}$, $\rho_{\text{DM}} = 2 \cdot 10^3 \text{ ГэВсм}^{-3}$ и $\rho_{\text{DM}} = 10^4 \text{ ГэВсм}^{-3}$.

В текущей работе в рассмотрение была взята красная линия (случай $\rho_{\text{DM}} = 10^4 \text{ ГэВсм}^{-3}$) как крайний допустимый случай.

По данным значениям была решена задача:

$$N_1(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}}) = f^{-1},$$

где N_1 есть количество захватов ПЧД белым карликом при пролете через кластер ПЧД, а $f \equiv \frac{\Omega_{\text{РВН}}}{\Omega_{\text{DM}}}$ – величина, взятая из статьи [1].

Из смысла эффекта экранировки можно утверждать, что величина, обратная доли ПЧД в скрытой массе, есть количество захватов ПЧД белым карликом, поскольку N_1 можно рассматривать, как коэффициент, показывающий, во сколько раз уменьшится ограничение на долю в случае кластеризации.

Для того, чтобы построить контурный график $N_1(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}})$ (где N_1 – количество событий внутри кластера, $N_1 \gg 1$), была использована уже знакомая оценка:

$$N_1 = \sigma_{\text{БК}} \cdot d_{\text{кл}} \cdot n_{\text{ПЧД}},$$

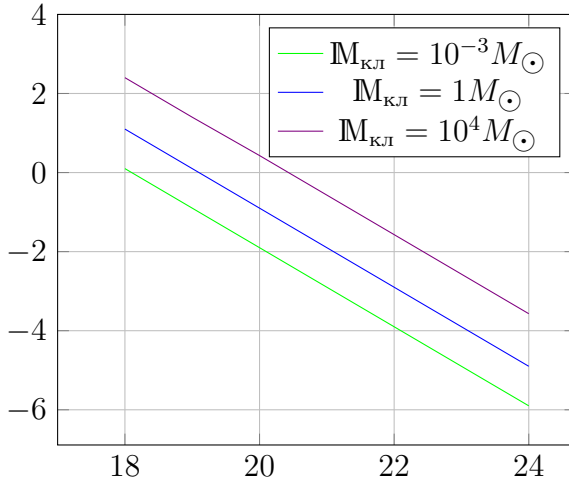
Где $\sigma_{\text{БК}}$ – гравитационное сечение захвата БК, $d = 2R$ – диаметр кластера, n – концентрация ПЧД внутри кластера.

Подстановка постоянных величин в выражение упрощает формулу, а также выделяет явную зависимость $N_1(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}})$ от $m_{\text{ПЧД}}$ и $M_{\text{кл}}$:

$$N_1(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}}) = 10^8 \cdot \frac{M_{\text{кл}}^{\frac{1}{3}}}{m_{\text{ПЧД}}},$$

где 10^8 есть константа размерности [масса $^{\frac{2}{3}}$].

Был построен график зависимости $N_1(m_{\text{ПЧД}})$ при различных значениях $M_{\text{кл}}$



По оси X откладывается десятичный логарифм от значения массы ПЧД $\log(m_{\text{ПЧД}})$, по оси Y – десятичный логарифм от количества захватов ПЧД белым карликом при пролете через кластер ПЧД $\log(N_1(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}}))$.

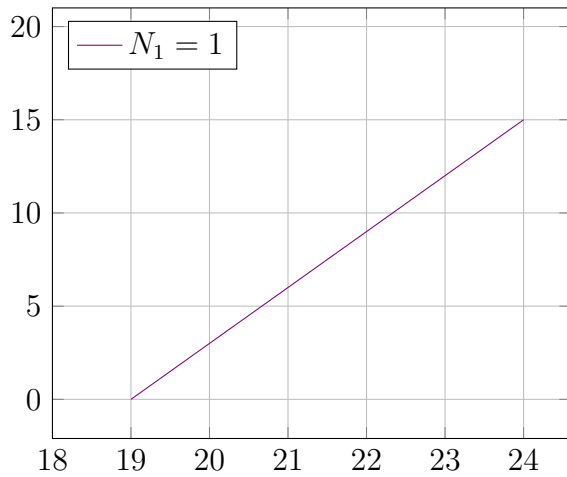
Ограничение на долю ПЧД в ТМ снимается в том случае, когда ожидаемое количество событий при пролете БК через кластер ПЧД равно единице:

$$N_1(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}}) = 10^8 \cdot \frac{M_{\text{кл}}^{\frac{1}{3}}}{m_{\text{ПЧД}}} = 1,$$

Поэтому в координатах $(m_{\text{ПЧД}}, M_{\text{кл}})$ формула приобретает вид:

$$M_{\text{кл}}(m_{\text{ПЧД}}) = 10^{-24} \cdot m_{\text{ПЧД}}^3$$

Из этой формулы был получен график зависимости $M_{\text{кл}}(m_{\text{ПЧД}})$ в логарифмическом масштабе для случая $N_1 = 1$:

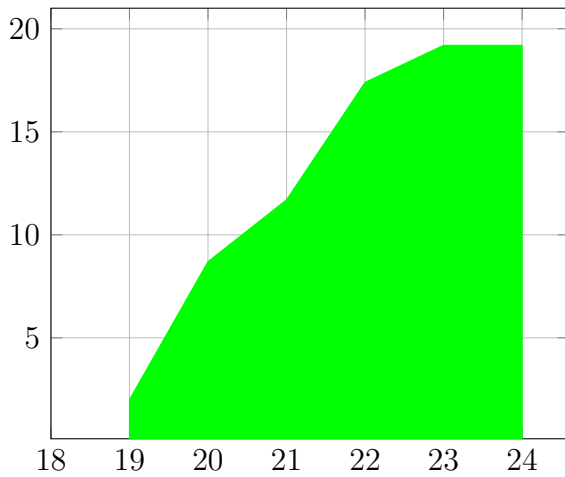


Зависимость массы кластера $M_{\text{кл}}(m_{\text{ПЧД}})$ от массы ПЧД $m_{\text{ПЧД}}$ и f в общем случае дается следующей формулой:

$$M_{\text{кл}}(m_{\text{ПЧД}}, f^{-1} \equiv N_1) = 10^{-24} \cdot (f^{-1}(m_{\text{ПЧД}}) \cdot m_{\text{ПЧД}})^3$$

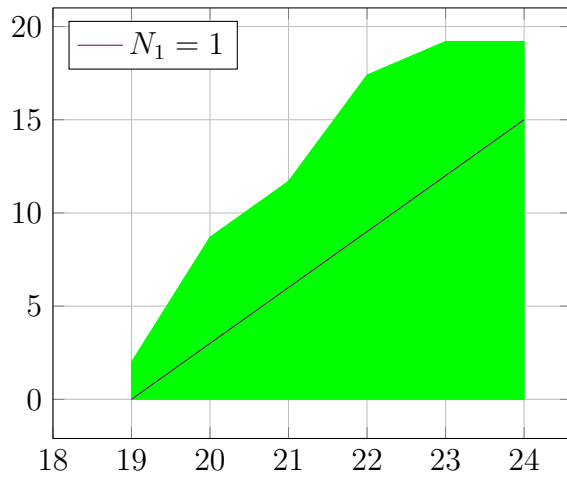
Для получения значений N_1 был использован график $f(m_{\text{ПЧД}})$ из статьи [1] (Рисунок 3). В рассмотрение был взят крайний случай $\rho_{dm} = 10^4 \text{GeVcm}^{-3}$ (красная линия).

По полученным значениям был построен график в координатах $M_{\text{кл}}(m_{\text{ПЧД}})$.



Разрешенная зона отмечена зеленым цветом.

В системе координат, учитывающей ограничения из статьи [1] линия для случая $N_1=1$ лежит в допустимых значениях масс кластера и ПЧД



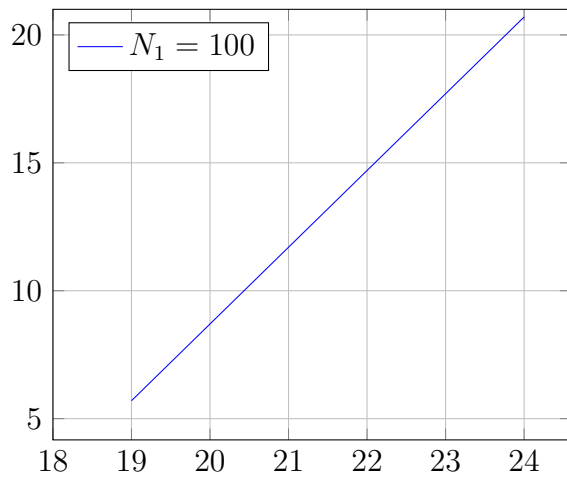
Также был рассмотрен случай $N_1 = 100$:

$$N_1(m_{\text{пчд}}, M_{\text{кл}}) = 10^8 \cdot \frac{M_{\text{кл}}^{\frac{1}{3}}}{m_{\text{пчд}}} = 100,$$

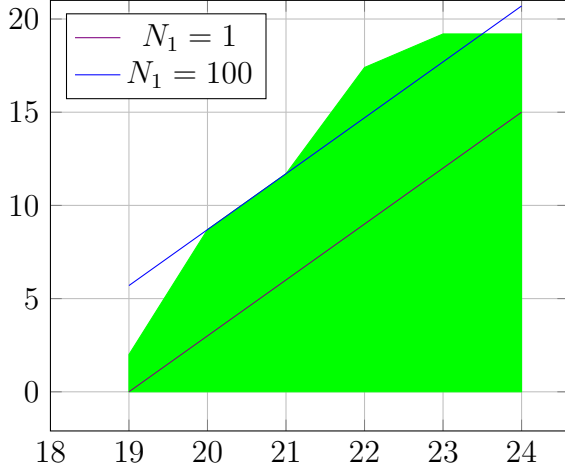
Отсюда

$$M_{\text{кл}}(m_{\text{пчд}}) = 10^{-18} \cdot m_{\text{пчд}}^3$$

И соответствующий график зависимости $M_{\text{кл}}(m_{\text{пчд}})$ в логарифмическом масштабе для случая $N_1 = 100$:



В общей системе координат получается следующая картина:



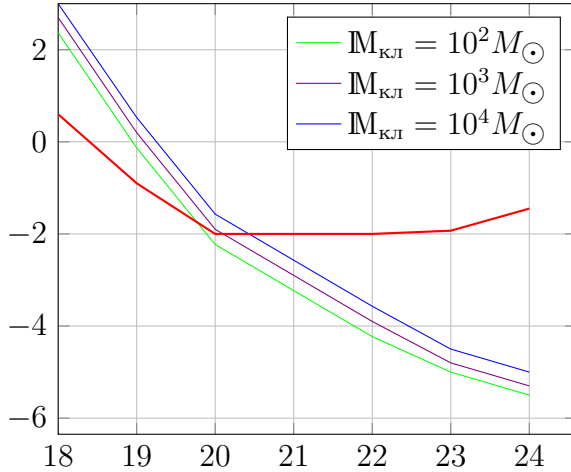
Следующий этап исследования заключается в получении ограничений на долю ПЧД в скрытой массе в случае их кластеризации. Другими словами, получения f' – допустимой доли ПЧД в скрытой массе в рассматриваемой модели.

При первом рассмотрении выражение, определяющее f' выглядело следующим образом:

$$f' = f \cdot N_1 = f \cdot 10^8 \cdot \frac{M_{\text{кл}}^{\frac{1}{3}}}{m_{\text{пчд}}},$$

Поскольку N_1 имеет смысл того, во сколько раз уменьшается ограничение f из статьи [1] из-за эффекта экранировки, вызванной кластеризацией ПЧД.

Был построен график в логарифмическом масштабе для разных масс кластеров ПЧД в общей системе координат $(\frac{\Omega_{\text{РВН}}}{\Omega_{\text{DM}}}, m_{\text{пчд}})$ с ограничениями из статьи [1], которые представляют случай нулевой кластеризации. На графике это красная линия.

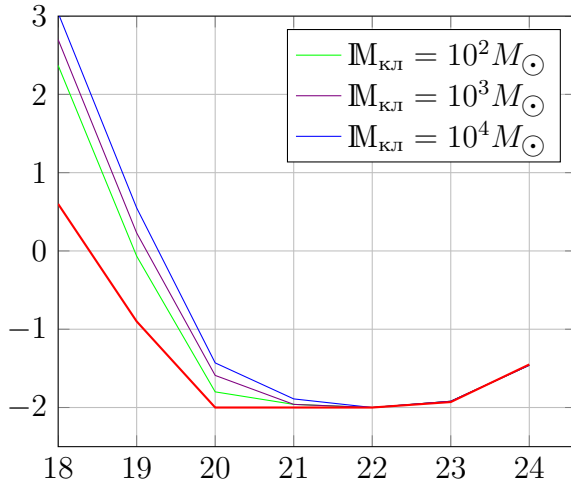


Поскольку график зависимости ведет себя неправильно при увеличении m и ведет себя не так как ожидается, формула для f' была преобразована следующим образом:

$$f' = f \cdot N_1 = f \cdot \left(10^8 \cdot \frac{M_{\text{кл}}^{\frac{1}{3}}}{m_{\text{пчд}}} + 1 \right),$$

Поправочная единица появилась, поскольку рассматриваются ситуации, где $N_1 > 1$, то есть после первого взаимодействия (крайний предельный случай).

Был получен соответствующий график в логарифмическом масштабе для разных масс кластеров ПЧД. По оси ординат откладывается $\frac{\Omega_{PBH}}{\Omega_{DM}}$, по оси абсцисс $-m_{ПЧД}$. Красная линия на графике – это с ограничения из статьи [1].



Из графика видно, что в случае кластеризации доля скрытой массы, приходящейся на ПЧД, увеличивается. В области высоких масс ПЧД ограничения становятся равны таковым для случая нулевой кластеризации (статья [1]).

4 Заключение

В данной работе в первом этапе “Исследование возможности снятия ограничения на первичные черные дыры по белым карликам в случае кластеризации” получены количественные оценки взаимодействия БК с кластером ПЧД. Данные занесены в таблицу 1. Значения логарифмов чисел из таблицы 1 занесены в таблицу 2. На ее основании был построен график зависимости количества пойманных ПЧД белым карликом при пролете через кластер с параметрами $R = 1$ пк, $M = 10^3 M_{\odot}$ от массы ПЧД (рисунок 1). Развивая мысль, начальные параметры кластера были изменены в пользу физической достоверности. Следуя алгоритму из предыдущего этапа, были получены таблицы 3 и 4. На их основании был построен график зависимости количества пойманных ПЧД белым карликом при пролете через кластер с параметрами $R = 1$ пк, $M_1 = 10^{-3} M_{\odot}$, $M_2 = 1 M_{\odot}$, $M_3 = 10^4 M_{\odot}$, от массы ПЧД. Для того, чтобы показать, как меняется характер графика, на одной координатной плоскости изображено 3 линии, соответствующие разным массам кластеров. После этого была сделана оценка гравитационного сечения, а затем и количества кластеров, в которые залетит БК в масштабах галактики при пролете вдоль диаметра. Используя полученные данные, была получена вероятность попадания БК в кластер. Порядок величины – 10^{-5} . Полученные результаты свидетельствуют о том, что в случае нахождения БК внутри кластера он достоверно захватит ПЧД, как следствие, будет уничтожен. Но в то же время вероятность попадания в кластер мала. Таким образом, ограничение на плотность распространения ПЧД можно снять, заменив его на вероятность попадания в кластер. Второй этап работы заключался в пересмотре ограничений, поскольку результаты предыдущего, оценочного, этапа свидетельствовали, что это возможно.

Для получения ограничений на плотность массы ПЧД в скрытой массе в случае их кластеризации решалась обратная задача

$$N_1(m_{\text{пчд}}, M_{\text{кл}}) = f^{-1},$$

где N_1 есть количество захватов ПЧД белым карликом при пролете через кластер ПЧД, а $f \equiv \frac{\Omega_{\text{РВН}}}{\Omega_{\text{DM}}}$ – величина, взятая из статьи [1].

Из смысла эффекта экранировки можно утверждать, что величина, обратная доли ПЧД в скрытой массе, есть количество захватов ПЧД белым карликом, поскольку N_1 можно рассматривать, как коэффициент, показывающий, во сколько раз уменьшится ограничение на долю в случае кластеризации.

Из этой формулы был получен график зависимости $M_{\text{кл}}(m_{\text{пчд}})$ в логарифмическом масштабе и разрешенные значения для случая нулевой кластеризации. На него были нанесены два случая: $N_1 = 1$ и $N_1 = 100$.

Следующий этап исследования заключается в получении ограничений на долю ПЧД в скрытой массе в случае их кластеризации. Другими словами, получении f' – допустимой доли ПЧД в скрытой массе в рассматриваемой модели.

Из модельных приближений была получена аналитическая формула, определяющая f' .

$$f' = f \cdot N_1 = f \cdot \left(10^8 \cdot \frac{M_{\text{кл}}^{\frac{1}{3}}}{m_{\text{пчд}}} + 1 \right),$$

Был получен соответствующий график в логарифмическом масштабе для разных масс кластеров ПЧД. Из графика видно, что в случае кластеризации доля скрытой массы, приходящейся на ПЧД, увеличивается. В области высоких масс ПЧД ограничения становятся равны таковым для случая нулевой кластеризации (статья [1]). Таким образом, в нулевом приближении мы получили результаты, увеличивающие возможную долю ПЧД в скрытой массе за счет их кластеризации.

Список литературы

- [1] Fabio Capela, Maxim Pshirkov и Peter Tinyakov. «Constraints on primordial black holes as dark matter candidates from capture by neutron stars». В: *Phys. Rev. D* 87.12 (2013), с. 123524. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.123524. arXiv: 1301.4984 [astro-ph.CO].
- [2] Bernard Carr и др. «Constraints on primordial black holes». В: *Rept. Prog. Phys.* 84.11 (2021), с. 116902. DOI: 10.1088/1361-6633/ac1e31. arXiv: 2002.12778 [astro-ph.CO].
- [3] Fabio Capela, Maxim Pshirkov и Peter Tinyakov. «Constraints on Primordial Black Holes as Dark Matter Candidates from Star Formation». В: *Phys. Rev. D* 87.2 (2013), с. 023507. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.023507. arXiv: 1209.6021 [astro-ph.CO].
- [4] Fabio Capela, Maxim Pshirkov и Peter Tinyakov. «A comment on "Exclusion of the remaining mass window for primordial black holes ...", arXiv:1401.3025». В: (февр. 2014). arXiv: 1402.4671 [astro-ph.CO].
- [5] Konstantin M. Belotsky и др. «Clusters of primordial black holes». В: *Eur. Phys. J. C* 79.3 (2019), с. 246. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6741-4. arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].
- [6] Paolo Pani и Abraham Loeb. «Tidal capture of a primordial black hole by a neutron star: implications for constraints on dark matter». В: *JCAP* 06 (2014), с. 026. DOI: 10.1088/1475-7516/2014/06/026. arXiv: 1401.3025 [astro-ph.CO].