

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

(НИЯУ «МИФИ»)

УДК 539.123, 519.688

ОТЧЕТ

ПО ПРЕДДИПЛОМНОЙ ПРАКТИКЕ ПО ТЕМЕ

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА СПЕКТРОВ
РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ
И ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ**

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., профессор

_____ М.Д. Скорохватов

Студент

_____ Д.В. Попов

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Реакторные антинейтрино и их регистрация	7
1.1 Спектры реакторных антинейтрино	7
1.2 Обратный бета-распад	8
2 Метод конверсии	11
2.1 Соответствие конверсионного и реального спектров реакторных антинейтрино	11
2.2 Алгоритм конверсии КИ	12
2.3 Спектры бета-распада	14
2.3.1 Функция Ферми	15
2.3.2 Поправки на конечный размер ядра	18
2.3.3 Экранирование	21
2.3.4 Радиационные поправки	22
2.3.5 Слабый магнетизм	24
3 Результаты конверсии	26
3.1 Оценка погрешностей и сравнение с другими моделями	26
3.2 Доказательство устойчивости отношений выходов ОБР	29
3.2.1 Устойчивость к поправкам подгоночных спектров	29
3.2.2 Устойчивость к вкладу запрещенных переходов	33
Заключение	35
Список использованных источников	36
Приложение А. Вспомогательные данные	42
Приложение Б. Кумулятивные спектры реакторных антинейтрино модели КИ	43

ВВЕДЕНИЕ

С момента открытия электронных антинейтрино в эксперименте Ф. Райнеса и К. Коуэна [1] в Саванна–Ривер было сформулировано и активно развивается по сей день новое направление в физике атомного ядра и элементарных частиц — физика и спектроскопия реакторных антинейтрино. За последние два десятилетия в этой области были достигнуты результаты, имеющие важное значение как для фундаментальных исследований (механизм нейтринных осцилляций, объяснение природы массы нейтрино, возможное существование стерильных состояний нейтрино и т.д.), так и для прикладных приложений:

- в реакторном эксперименте KamLAND [2] в 2003 —2008 впервые наблюдалось исчезновение потока антинейтрино реактора, что согласовывалось с гипотезой нейтринных осцилляций;
- коллаборациями Daya Bay [3] и RENO [4] было проведено прецизионное измерение угла смешивания θ_{13} на уровне значимости более пяти стандартных отклонений;
- в реакторных нейтринных экспериментах проводятся исследования, направленные на поиск новой физики вне рамок Стандартной Модели (в частности, уже упоминавшийся поиск стерильных нейтрино — см., например, [5–7]), что в первую очередь связано со следующими экспериментальными аномалиями:
 - ”Reactor Antineutrino Anomaly” (RAA) [8]: измеренный на стандартном удалении 15–100 м от реактора поток реакторных антинейтрино оказался на 5% меньше теоретически ожидаемого [9; 10];
 - ”Bump effect” [11; 12]: в области энергий реакторных антинейтрино 5 —7 МэВ наблюдается локальный 10% избыток измеренного потока над теоретически ожидаемым [5; 10];
- в Курчатовском Институте (КИ) Л.А. Микаэляном было предложено использовать антинейтрино ядерного реактора в качестве инструмента для удаленного мониторинга работы последнего [13–15]. Идея получает свое развитие и реализацию в недавних работах [16–18], в том числе для нужд военной промышленности и ядерного нераспространения [19; 20].

Недостаточно полная совокупность сведений о спектрах реакторных антинейтрино может приводить к неопределенностям в анализе реакторных экспериментов, а иногда и к неоднозначной интерпретации результатов. В связи с повышением точности измерений и планированием реакторных экспериментов но-

вого поколения (например, [21]), изучение реакторных спектров антинейтрино в последние годы приобретает особую **актуальность**.

Целью настоящей работы является расчет и прецизионное изучение спектров реакторных антинейтрино.

Прежде всего обсудим историю проблематики. Существует два основных подхода к вычислению спектров реакторных антинейтрино: метод прямого суммирования и метод конверсии. Метод прямого суммирования (также называемый методом *ab initio* – методом расчёта из первых принципов) состоит в вычислении спектров антинейтрино от всех бета-активных продуктов деления топлива ядерного реактора, основную часть которого (более 99%) составляют тяжелые изотопы ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{241}Pu , и их последующем сложении с учётом активности каждого продукта (см., например, обзор [22] и работу [23]). Всего в спектры бета-электронов и антинейтрино дают вклад порядка нескольких тысяч ядерных переходов; для части переходов экспериментальные данные о схемах распада могут быть не вполне достоверными из-за эффекта пандемониума [24], а в ряде случаев данные совсем отсутствуют. Помимо этого, зачастую имеется разброс в информации о кумулятивных выходах продуктов деления, приводимой в разных базах данных; более того, метод предполагает, что при расчёте спектров для всех осколков деления используются одинаковые допущения и приближения, что не всегда правомерно (см., например, анализ, приведённый в работе [25]). Всё сказанное осложняет предсказания спектров в рамках подхода *ab initio*.

Второй метод — метод конверсии — в своей наиболее широко используемой форме был сформулирован и применен в работах [26–29]. Предложенный подход основан на "генетической" связи между бета-спектрами электронов и антинейтрино и заключается в следующем. Тонкие фольги изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu облучались в потоке тепловых нейтронов реактора Института Лауэ–Ланжевена (ILL), бета-электроны от продуктов деления выводились из реактора и измерялись спектрометром с высоким разрешением [30]. Каждый измеренный таким образом кумулятивный бета-спектр описывался как сумма некоторого количества (обычно около 30) синтетических разрешенных бета-спектров, параметры которых определялись методом подгонки. Далее для таких переходов производился пересчёт электронного спектра в антинейтринный и полученные спектры суммировались для получения кумулятивных спектров соответствующих изотопов $\rho_{\nu}^{235}(E_{\nu})$, $\rho_{\nu}^{239}(E_{\nu})$, $\rho_{\nu}^{241}(E_{\nu})$.

Поскольку деление ^{238}U инициируется быстрыми нейтронами, соответствующие кумулятивные бета-спектры невозможно было измерить на реакторе ILL, и спектр антинейтрино $\rho_{\nu}^{238}(E_{\nu})$ для был рассчитан только из предположений теоретических моделей (например, [31]). Измерение кумулятивного бета-спектра деления быстрыми нейтронами ^{238}U было выполнено в Техническом университете Мюнхена (TUM) в эксперименте на нейтронном источнике FRM с последующем пересчетом в спектр антинейтрино $\rho_{\nu}^{238\text{TUM}}(E_{\nu})$ [32].

В 2007 году в работе [33] был проведен дополнительный анализ процедуры

конверсии на основе моделирования методом Монте–Карло, получены условия применимости этой процедуры, обеспечивающие восстановление спектров реакторных антинейтрино с точностью порядка 1%. В частности, необходимо, чтобы размеры энергетических бинов конвертированного спектра антинейтрино были в несколько раз больше длины отрезков, на которые исходные бета–спектры разбиваются для подгонки. Кроме того, требуется информация из ядерных баз данных о связи между эффективным средним зарядом ядра и граничной энергией для реальных бета–переходов.

В работе [34] для получения кумулятивных спектров антинейтрино от ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu был применен смешанный подход. Сначала спектры электронов и антинейтрино от переходов с хорошо известными параметрами суммировались согласно методу *ab initio*. Далее, для определения вклада неизученных переходов, вычисленный кумулятивный бета–спектр вычитался из данных ILL; результат вычитания преобразовывался методом конверсии в спектр антинейтрино. Итоговый спектр антинейтрино получался сложением вкладов изученных и неизученных переходов. Нормировка спектров антинейтрино, полученных этим новым методом, примерно на 3% превышала нормировку спектров, полученных группой ILL [26–29].

Позднее в работе [35] алгоритм конверсии спектров бета–электронов с использованием только виртуальных бета–переходов был дополнен с помощью введения ряда поправок для описания разрешенных бета–спектров. Результаты для ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu хорошо согласовались с результатами смешанной модели [34] и подтвердили сдвиг нормировки на 3% по сравнению с ILL. По итогам работ [34; 35] была сформирована т.н. модель Huber–Mueller (НМ), широко применяемая для анализа реакторных нейтринных экспериментов, сочетающая в себе результаты конверсионной модели [35] для спектров антинейтрино от ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu и спектр от ^{238}U из работы [34].

Дальнейшее развитие методика расчета спектров получила в работах [36–38] путем рассмотрения запрещенных переходов первого порядка. Известно, что вклад таких переходов в кумулятивные реакторные спектры составляет около 25%, и правильный учет их формы существенен в рамках метода *ab initio*. Метод конверсии же основан на преобразовании измеренного бета–спектра, в котором уже содержится вклад запрещенных переходов. Соответственно, можно ожидать, что процедура конверсии реального бета–спектра в генетически связанный с ним спектр антинейтрино слабо зависит от формы подгоночных спектров. Анализ вопроса в работах [36; 37] показал, что варьирование доли запрещенных переходов приводит к изменениям значений конвертированных спектров в пределах 1–4%. Тем не менее, на данный момент проблема о правильном учёте запрещенных переходов в методе конверсии остается открытой.

В ходе выполнения настоящей работы ставились следующие **задачи**:

1. Провести отбор поправок, вносящих существенный вклад (в пределах 1% и выше) в форму одиночных бета–спектров; привести сравнительный ана-

- лиз различных моделей для одной и той же поправки;
2. Сформулировать и реализовать математическую модель процедуры конверсии, описать ограничения предложенной методики;
 3. Сформулировать и реализовать методы для анализа погрешностей метода конверсии, вызванных как наличием статистических экспериментальных ошибок, так и неопределенностей самой процедуры;
 4. Провести анализ устойчивости процедуры конверсии и её производных относительно вариаций начальных данных;
 5. Провести конверсию кумулятивных спектров группы ILL [26–29], привести сравнение полученных результатов с уже существующими моделями (НМ [34; 35], TUM [32]).

Научная новизна. Объединение представленной в настоящей работе методики расчета спектров реакторных антинейтрино с данными группы ILL [26–29] и результатами по измерению отношения кумулятивных реакторных бета-спектров, полученными группой КИ [39], формирует новую модель спектров реакторных антинейтрино — модель Курчатовского института, предсказания которой хорошо согласуются с результатами реакторных экспериментов с короткой базой [40–43] и потенциально закрывают проблему RAA [44]. Представленный анализ аддитивности влияния различных поправок на процедуру конверсии объясняет эффект 3% сдвига нормировки спектров модели НМ [34; 35] относительно данных ILL и позволяет упростить вычисления наблюдаемых величин.

Методология и методы исследования. Настоящая работа является расчетно-теоретической и в основном использует численные методы (в частности, Монте-Карло) и методы статистического анализа. При описании бета-спектра и его поправок используется аппарат квантовой механики и квантовой теории поля.

1. РЕАКТОРНЫЕ АНТИНЕЙТРИНО И ИХ РЕГИСТРАЦИЯ

1.1. СПЕКТРЫ РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО

Принцип работы ядерного реактора основан на самоподдерживающейся, цепной реакции деления тяжелых ядер, сопровождающейся выделением энергии. При одном таком делении образуется 2 (или более) нестабильных осколка с избыточным числом нейтронов, которые претерпевают серию β -распадов для возвращения в долину стабильности. На один акт деления приходится в среднем 6 β -распадов, что соответствует рождению 6 электронных антинейтрино с энергиями до 8 МэВ.

Кумулятивный спектр реакторных антинейтрино «в момент рождения» представляется, строго говоря, в следующем виде [45]:

$$\rho_\nu(E_\nu, t) = [1 + c_\Sigma(E_\nu, t)] \sum_i \alpha_i(t) \rho_\nu^{(i)}(E_\nu) + \rho_{\text{SNF}}(E_\nu, t) [\text{МэВ}^{-1} \text{ дел}^{-1}], \quad (1.1)$$

где $\alpha_i(t)$ — доля делений i -ого изотопа, $\rho_\nu^{(i)}(E_\nu)$ — соответствующий кумулятивный спектр антинейтрино продуктов деления i -ого изотопа (под i -ыми изотопами здесь и далее всегда будут подразумеваться ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu). Множитель $[1 + c_\Sigma(E_\nu, t)]$ в уравнении (1.1) выступает в качестве спектральной поправки, учитывающей вклады долгоживущих изотопов и от β -излучателей, возникающих при активации нейтронами продуктов деления. Слагаемое ρ_{SNF} является спектром $\bar{\nu}$ -излучения бассейна выдержки отработавшего топлива. Отметим, что факторы $C_\Sigma(E_\nu, t)$ и $\rho_{\text{SNF}}(E_\nu, t)$, рассчитанные в [45], не являются объектом исследований в рамках обсуждаемого в настоящей работе метода конверсии, что будет аргументированно ниже, поэтому далее по умолчанию будут опускаться.

Каждый из кумулятивных спектров антинейтрино $\rho_\nu^{(i)}(E_\nu)$ является суммой по всем возможным продуктам деления f и по всем возможным реализациям их бета-распадов b [34; 46]:

$$\rho_\nu^{(i)}(E_\nu) = \sum_f \sum_b a_f \text{BR}_f^b \rho_\nu^{fb}(E_\nu, Q_{fb}, Z_f, A_f), \quad (1.2)$$

где a_f — активность f -ого элемента, нормированная на деление i -ого изотопа, BR_f^b — коэффициент ветвления (branching ratio) — доля f -ядер, распадающихся по данной b -ветви относительно всех f -ядер, Q_{fb} — граничная энергия

бета-распада, Z_f, A_f — заряд и атомный номер f ядра. Входящий в (1.2) одиночный спектр антинейтрино $\rho_\nu^{fb}(E_\nu, Q_{fb}, Z_f, A_f)$ генетически связан с соответствующим ему одиночным бета-спектром:

$$\rho_\beta^{fb} = k p_\beta E_\beta (Q_{fb} - T_\beta)^2 F(Z_f, E_\beta) C^{fb}(E_\beta) \delta(Q_{fb}, Z_f, E_\beta), \quad (1.3)$$

где k — нормировочный множитель, $p_\beta, T_\beta, E_\beta$ — импульс, кинетическая и полная энергии β -электрона соответственно, $F(Z_f, E_\beta)$ — функция Ферми, описывающая кулоновское взаимодействие β -электрона с дочерним ядром. Множитель $C^{(bf)}(E_\beta)$ — фактор формы — включает в себе ядерный матричный элемент и зависит от запрещенности перехода (в случае разрешенных переходов он равен единице). Последний множитель $\delta^{(b)}(Z_f, Q_{fb}, E_\beta)$ содержит различные поправки к одиночному спектру (связанные, например, с конечными размерами ядер, экранированием дочернего ядра от β -электронов электронами с атомных оболочек и т.д.), наиболее существенные из которых будут далее обсуждаться дополнительно. Для получения искомого $\rho_\nu^{fb}(E_\nu, Q_{fb}, Z_f, A_f)$ в выражении (1.3) необходимо сделать замену $T_\beta = E_\nu \rightarrow Q_{fb} - T_\beta$ и изменить поправки, входящие в $\delta(Q_{fb}, Z_f, E_\beta)$, если для антинейтринного спектра они имеют отличный вид, чем для бета-спектра.

Поток реакторных антинейтрино на расстоянии L от активной зоны описывается следующим равенством

$$\Phi_\nu(E_\nu, t) = \frac{N_f}{4\pi L^2} \sum_i \alpha_i(t) \rho_\nu^{(i)}(E_\nu) [\text{МэВ}^{-1} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}], \quad (1.4)$$

где N_f — число делений тяжелых изотопов в единицу времени, связанное с тепловой мощностью ядерного реактора соотношением

$$P_{\text{th}} = N_f \langle \varepsilon \rangle = N_f \sum_i \alpha_i(t) \varepsilon_i = \sum_i f_i(t) \varepsilon_i. \quad (1.5)$$

Здесь ε_i — тепловая энергия деления i -ого изотопа, $f_i = N_f \alpha_i$ — число делений i -ого изотопа, $\langle \varepsilon \rangle = \sum_i \alpha_i \varepsilon_i$ — средняя тепловая энергия деления.

1.2. ОБРАТНЫЙ БЕТА-РАСПАД

С момента открытия в экспериментах на ядерном реакторе [1], детектирование антинейтрино осуществляется, в основном, по реакции обратного бета-распада (ОБР)



с пороговой энергией антинейтрино

$$E_{\text{thr}} = \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p} \approx 1.806 \text{ МэВ}, \quad (1.7)$$

где m_n, m_p и m_e — массы нейтрона, протона и электрона соответственно.

Сечение реакции ОБР крайне мало (порядка 10^{-43} см²) при энергиях реакторных антинейтрино, поэтому для эффективной регистрации необходимы большие объемы рабочего вещества детектора, в качестве которого обычно используют сцинтиллятор с высоким содержанием протонов. Рожденный в результате ОБР позитрон забирает большую часть энергии реакции, которую затем достаточно быстро (за несколько наносекунд) теряет в рабочем веществе за счет ионизационных и радиационных потерь, после чего происходит аннигиляция позитрона с электронами вещества в два γ -кванта с энергиями $m_e = 0.511$ МэВ. Нейтрон ОБР тем временем замедляется и диффундирует в среде до момента захвата протоном с последующим испусканием γ -кванта с энергией 2.2 МэВ. Происходит это через фиксированное время после реакции ОБР. В результате описанного процесса на выходе детектора появляются два сигнала — быстрый, от потерь энергии позитроном и аннигиляции, и запаздывающий, от захвата нейтрона. Отметим, что сигнал определенной энергии от нейтрона, наблюдаемый через фиксированное время после первого сигнала, выступает в качестве естественного триггера регистрации антинейтринного события.

В наиболее общем виде сечение ОБР представлено в работах [47; 48]. В релятивистски-инвариантной форме оно записывается в виде [47]:

$$\frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dt} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{4\pi(s - m_p^2)^2} \sum_{i=1}^7 A_i(s, t), \quad (1.8)$$

где G_F — постоянная Ферми слабого взаимодействия, V_{ud} — ud -элемент СКМ-матрицы смешивания, $s = (p_p^\mu + p_\nu^\mu)^2$, $t = (p_e^\mu - p_\nu^\mu)^2$ — мандельштамовские переменные, p^μ — 4-импульс. Явный вид функций $A_i(s, t)$ можно найти в приложении работы [47].

В системе покоя протона, где $s = 2m_p E_\nu$, $t = m_n^2 - m_p^2 - 2m_p(E_\nu - E_e)$, дифференциальное сечение ОБР записывается как

$$\frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_e}(E_e, E_\nu) = 2m_p \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dt}. \quad (1.9)$$

Отметим, что в работе [47] также была рассчитана радиационная поправка

$$\begin{aligned} \delta_{\text{rad}}(E_e) = & \frac{\alpha}{\pi} \left[\left(\frac{2}{\beta} \ln \frac{2\beta}{1+\beta} + \frac{7}{8\beta} + \frac{3\beta}{8} \right) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 2 \ln \frac{4\beta^2}{1-\beta^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4}{\beta} \text{Li}_2 \left(\frac{2\beta}{1+\beta} \right) + \frac{23}{8} + \frac{3}{2} \ln \frac{m_p}{m_e} \right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (1.11)$$

— полилогарифм второго порядка.

Используя выражения (1.8 – 1.10) для дифференциального сечения ОБР и предсказываемый поток антинейтрино ядерного реактора (1.4), можно записать ожидаемый спектр позитронов:

$$\frac{dN_e}{dE_e}(E_e, t) = \epsilon N_p \int_{E_\nu \min}^{E_\nu \max} \Phi_\nu(E_\nu, t) \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_e}(E_e, E_\nu) dE_\nu [\text{МэВ}^{-1} \text{ с}^{-1}], \quad (1.12)$$

где ϵ — эффективность регистрации, N_p — число протонов мишени.

Традиционно выражение (1.12) записывают в более удобном виде:

$$\frac{dN_e}{dE_e}(E_e, t) = \frac{\epsilon N_p P_{\text{th}}}{4\pi L^2 \langle \epsilon \rangle} \sum_i \alpha_i(t) \rho_e^{(i)}(E_e). \quad (1.13)$$

Здесь введен спектр позитронов $\rho_e^{(i)}(E_e)$, порождаемый кумулятивным спектром антинейтрино продуктов деления i -ого изотопа "в момент рождения":

$$\rho_e^{(i)}(E_e) = \int_{E_\nu \min}^{E_\nu \max} \rho_\nu^{(i)}(E_\nu) \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_e}(E_e, E_\nu) dE_\nu [\text{см}^2 \text{ МэВ}^{-1} \text{ дел}^{-1}]. \quad (1.14)$$

Интегрирование (1.13) по наблюдаемым энергиям позитрона позволяет получить интегральную скорость счета антинейтринных событий в единицу времени:

$$\begin{aligned} N_e(t) &= \frac{\epsilon N_p P_{\text{th}}}{4\pi L^2 \langle \epsilon \rangle} \sum_i \alpha_i \int_{E_e \min}^{E_e \max} \rho_e^{(i)}(E_e) dE_e = \frac{\epsilon N_p P_{\text{th}}}{4\pi L^2 \langle \epsilon \rangle} \sum_i \alpha_i \sigma^{(i)} \\ &= \frac{\epsilon N_p P_{\text{th}}}{4\pi L^2 \langle \epsilon \rangle} \langle \sigma \rangle [\text{с}^{-1}]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Величины $\sigma^{(i)}$ и их среднее значение $\langle \sigma \rangle$ с размерностью $[\text{см}^2 \text{ дел}^{-1}]$ называются сечениями ОБР, взвешенными по спектрам реакторных антинейтрино продуктов деления i -ых изотопов (выходы ОБР на деление i -ого изотопа). По своему построению они характеризуют интенсивность взаимодействия реакторных антинейтрино и являются универсальными величинами, позволяющими сравнивать результаты различных реакторных экспериментов.

2. МЕТОД КОНВЕРСИИ

2.1. СООТВЕТСТВИЕ КОНВЕРСИОННОГО И РЕАЛЬНОГО СПЕКТРОВ РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО

Перед началом описания алгоритма конверсии, перечислим факторы, ограничивающие точность описания реального спектра антинейтрино от ядерного реактора.

Во-первых, продукты деления ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu являются основными, но не единственными источниками реакторных антинейтрино. Существуют и другие процессы, приводящие к излучению антинейтрино, такие как, например, захват нейтронов в материалах активной зоны реактора. Описание этих процессов, которые далее не рассматриваются, можно найти в [45]. Их вклад в интенсивность составляет не более 3–3.5 % и важен только в области до 3–3.5 МэВ.

Во-вторых, время облучения мишеней изотопов урана и плутония в экспериментах ILL составляло около одних суток, в то время как на энергетических реакторах типа ВВЭР облучение топлива происходит в течение примерно 4 лет. В результате измеренный в ILL спектр является неравновесным и не в полной мере воспроизводит вклад долгоживущих продуктов деления. Учет бета-переходов с временами жизни более суток увеличивает выход бета-электронов на величину до 5% в области энергий до 3 МэВ [45].

Наконец, энергетические спектры нейтронов при облучении мишеней в исследовательском и энергетическом реакторах, вообще говоря, различны. В случае энергетических реакторов в деления изотопов урана и плутония дают вклад надтепловые нейтроны, которые могут изменить выходы продуктов деления. Однако согласно оценке [49], различие в энергии нейтронов приводит к изменению выхода антинейтрино менее чем на 1% на одно деление и не существенно влияет их спектры.

Таким образом, конвертированный спектр антинейтрино не может в полной мере описать спектр антинейтрино от ядерного реактора, особенно в области до 3–3.5 МэВ, где требуется введение вклада дополнительных источников нейтринного излучения (см. [45]).

2.2. АЛГОРИТМ КОНВЕРСИИ КИ

Пусть имеется экспериментально измеренный кумулятивный бета-спектр $\rho_\beta = \left\{ \rho_\beta^{(i)} \pm \Delta\rho_\beta^{(i)} \right\}_{i=1}^N$, содержащий N точек. Выберем пробное число точек \tilde{s} , начиная с последнего значения: $S_{\tilde{s}}^N = \left\{ \rho_\beta^{(N-\tilde{s})}, \rho_\beta^{(N-\tilde{s}-1)}, \dots, \rho_\beta^{(N)} \right\}$, и аппроксимируем их функцией $a\rho_\beta(T_\beta, Q)$ с такими параметрами a и Q , что значение функционала

$$R = R(a, Q) = \sum_{i=N-\tilde{s}}^N \left(\rho_\beta^{(i)} - a \rho_\beta(T^{(i)}, Q) \right)^2 \quad (2.1)$$

минимально. Из этого условия находятся значения $\{\tilde{a}_N, \tilde{Q}_N\}$, соответствующие срезу $S_{\tilde{s}}^N$, т.е.

$$\{\tilde{a}_N, \tilde{Q}_N\} = \operatorname{argmin} [R(a, Q)] . \quad (2.2)$$

После этого строится функция $\tilde{a}_N \rho_\beta(T_\beta, \tilde{Q}_N)$, которая до некоторого значения ρ_β^{N-s} целиком лежит в полосе погрешностей исходного кумулятивного бета-спектра. Значение

$$s = \min \left\{ \tilde{s} : \left(\rho_\beta^{(N-\tilde{s})} - \tilde{a}_N \rho_\beta(T_\beta^{(N-\tilde{s})}, \tilde{Q}_N) \right) \geq \Delta\rho_\beta^{(N-\tilde{s})} \right\} \quad (2.3)$$

определяет истинное число точек s в первом срезе. Для набора $S_s^N = \left\{ \rho_\beta^{(N-s)}, \rho_\beta^{(N-s-1)}, \dots, \rho_\beta^{(N)} \right\}$ описанная выше процедура аппроксимации повторяется, находятся истинные значения a_N и Q_N . Полученный подгоночный спектр вычитается из исходного кумулятивного:

$$\rho_\beta^{(i)} \equiv \rho_\beta^{(i)} - a_N \rho_\beta(T_\beta^{(i)}, Q_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

где "≡" означает операцию присваивания.

Алгоритм, описанный выше, итерационно повторяется до тех пор, пока весь экспериментальный спектр ρ_β не будет описан, в результате чего получается набор значений $\{a_i, Q_i\}_{i=1}^M$ (M — число срезов), с помощью которого строится кумулятивный спектр антинейтрино, соответствующий исходному ρ_β :

$$\rho_\nu(E_\nu) = \sum_{i=1}^M a_i \rho_\nu(E_\nu, Q_i) \quad (2.5)$$

Фактически, при таком алгоритме конверсии по экспериментальным данным группы ILL достаточно от 10 до 15 одиночных синтетических спектров в зависимости от изотопа. Из-за относительно небольшого числа подгоночных переходов на конвертированном спектре антинейтрино проявляются пилообразные скачки, связанные с учетом функции Ферми. Устранение этих скачков в рамках процедуры конверсии КИ проводится в 2 этапа.

На первом этапе к исходному набору синтетических бета-спектров, описывающих кумулятивный спектр, добавляются дополнительные, с заведомо меньшими весами. Параметры дополнительных бета-спектров определяются в процессе описания кумулятивного бета-спектра целиком с использованием как первичного, фиксированного набора, так и дополнительного. Отметим, что существующие модели конверсии предпочитают равномерное распределение одиночных спектров по энергетическому диапазону (около 5 одиночных спектров описывают отрезок энергии шириной 250 кэВ), в то время как реализация КИ распределяет спектры неравномерно - учитывается, что в мягкую область энергий реальных кумулятивных спектров вносят вклад большее число одиночных бета-ветвей, чем в жесткую.

На втором этапе проводится усреднение полученного антинейтринного спектра по бинам с шириной $h = 250$ кэВ [33]. В работе [50] было предложено дополнительно регуляризовать решение путем аппроксимации спектра функцией

$$y(E) = \exp \left(\sum_{j=1}^6 a_j E^{j-1} \right). \quad (2.6)$$

Форма бета-спектр и спектра антинейтрино зависят от трёх основных параметров — нормировочного коэффициента a , энергии конечной точки Q и заряда дочернего ядра Z (зависимостью от массового числа A мы пренебрегаем, она не вносит никакого значимого вклада [35]). Первые два из них, как показано выше, определяются в процессе аппроксимации. Технически, заряд Z тоже можно варьировать, однако это увеличит число степеней свободы в предложенной процедуре, делая её ещё более "нефизичной". Другой вариант — взять некоторое фиксированное значение (к примеру, для ^{235}U положить $Z = 92/2 + 1 = 47$).

Данные варианты обсуждались в работе [33], в ней же проанализировано оптимальное решение, которое было использовано при расчете спектров антинейтрино группой К. Шрекенбаха [27; 28]. Предлагалось ввести эффективный заряд $\langle Z \rangle$, который определяется с использованием ядерных баз данных как [33]:

$$\langle Z \rangle(E_0) = \frac{\sum_{Z,A} Y(Z, A) \sum_f \text{BR}_f(E_{0,f}) Z}{\sum_{Z,A} Y(Z, A) \sum_f \text{BR}_f(E_{0,f})} \quad (2.7)$$

где $Y(Z, A)$ — кумулятивный выход деления. Традиционно эту зависимость принято представлять в виде полинома второй степени [27; 28; 33; 35]:

$$\langle Z \rangle(E_0) = Z(E_0) = a_0 + a_1 E_0 + a_2 E_0^2 \quad (2.8)$$

Или же, в терминах энергии реакции Q :

$$\langle Z \rangle(Q) = c_0 + c_1 Q + c_2 Q^2 \quad (2.9)$$

Мы будем использовать наборы коэффициентов c_i для аппроксимации $\langle Z \rangle(Q)$, полученные в работе [35] для ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu и представленные в таблице 1. Отметим, что в определении [35] Z является зарядом родительского ядра.

Таблица 1. Коэффициенты параметризации $\langle Z \rangle(Q)$ для выражения (2.9).

ИЗОТОП	c_0	c_1	c_2
^{235}U	$48.992_{-0.164}^{+0}$	$-0.399_{-0}^{+0.161}$	$-0.084_{-0.044}^{+0}$
^{239}Pu	$49.650_{-0.214}^{+0}$	$-0.447_{-0}^{+0.036}$	$-0.089_{-0.016}^{+0}$
^{241}Pu	$49.906_{-0.178}^{+0}$	$-0.510_{-0}^{+0.160}$	$-0.044_{-0.052}^{+0}$

2.3. СПЕКТРЫ БЕТА–РАСПАДА

Как и в пионерских работах группы К. Шрекенбаха [26–29], процедура конверсии основывалась на подгонке измеренного бета–спектра несколькими виртуальными бета–переходами разрешенного типа, каждый из которых можно описать ”наивным” выражением вида

$$\rho_{\beta}^0(T_{\beta}) = k p_{\beta} E_{\beta} (Q - T_{\beta})^2 F(Z, E_{\beta}) , \quad (2.10)$$

где k — нормировочный множитель, p_{β} , T_{β} и E_{β} — импульс, кинетическая и полная энергии электрона, Q — энергия реакции, Z — заряд дочернего ядра.

Для уточнения формы спектра, в (2.10) были введены следующие поправочные множители: $L(Z, E_{\beta})$ и $C(Z - 1, E_{\beta}, Q)$ — поправки на конечный радиус ядра и слабого взаимодействия, $S(Z, E_{\beta})$ — поправка на экранирование, $G_{\beta}(E_{\beta}, Q)$ — радиационная поправка, $(1 + \delta_{\text{WM}})$ — поправка, учитывающая вклад слабого магнетизма. Таким образом, для описания подгоночных спектров нами было использовано следующее выражение:

$$\rho_{\beta}(T_{\beta}) = \rho_{\beta}^0(T_{\beta}) \times L(Z, E_{\beta}) C(Z - 1, E_{\beta}, Q) S(Z, E_{\beta}) G_{\beta}(E_{\beta}, Q) (1 + \delta_{\text{WM}}) . \quad (2.11)$$

Спектр антинейтрино $\rho_{\nu}(E_{\nu})$ получается заменами $T_{\beta} \rightarrow Q - T_{\beta}$ и $G_{\beta} \rightarrow H_{\nu}$, где H_{ν} — радиационная поправка для спектра антинейтрино.

Обсудим каждую из предложенных поправок, её происхождение и вклад в форму одиночного спектра.

2.3.1. ФУНКЦИЯ ФЕРМИ

Функция Ферми $F(Z, E)$ описывает кулоновское взаимодействие точечного дочернего ядра с β -электроном. Формально она определяется как [51]

$$F(Z, E_\beta) = \frac{|\Psi_{\text{Coulomb}}|^2}{|\Psi_{\text{free}}|^2}, \quad (2.12)$$

где Ψ_{free} — свободное решение уравнения Дирака, Ψ_{Coulomb} — решение уравнения Дирака с кулоновским потенциалом. Явный вид функции Ферми описывается следующим уравнением [51]:

$$F(Z, E) = 2(\gamma + 1)(2p_\beta R)^{(2\gamma-1)} e^{(\pi\alpha Z E_\beta/p_\beta)} \cdot \frac{|\Gamma(\gamma + i\alpha Z E_\beta/p_\beta)|^2}{|\Gamma(2\gamma + 1)|^2}, \quad (2.13)$$

где $p_\beta = \sqrt{E_\beta^2 - m_\beta^2}$, — модуль 3-импульса электрона, $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$, α — постоянная тонкой структуры, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $R = R(A)$ — радиус ядра, для вычисления которого была использована формула Элтона [52]:

$$R(A) = 1.121A^{1/3} + 2.426A^{-1/3} - 6.614/A \text{ фм}. \quad (2.14)$$

На рисунке 2.1 представлен график функции Ферми (2.13) для $Z = 46$.

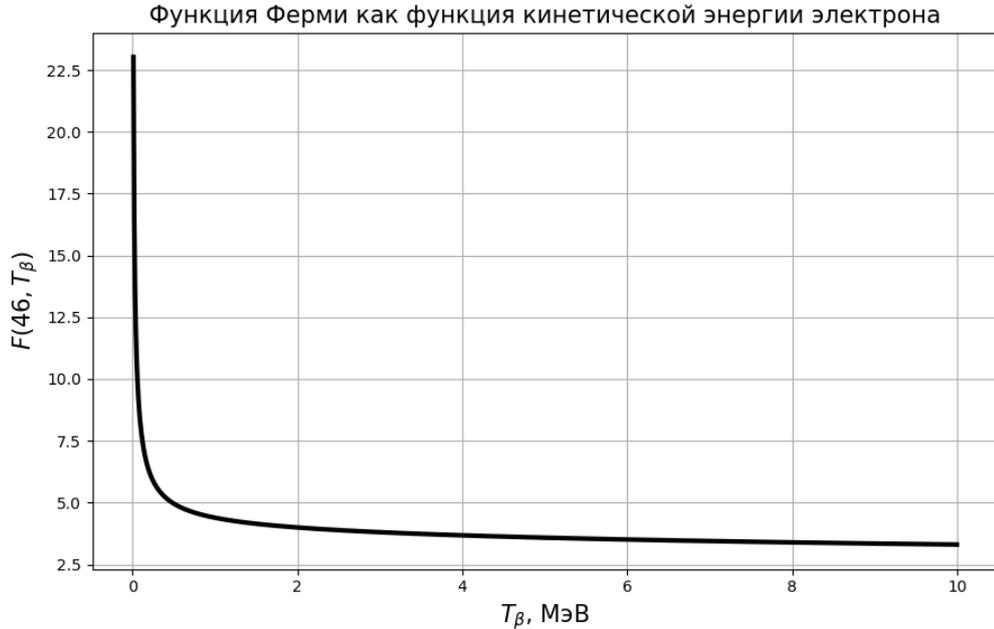


Рисунок 2.1 — Функция Ферми как функция кинетической энергии электрона

На следующих рисунках представлены нормированные спектры электронов и антинейтрино, иллюстрирующие вклад функции Ферми.

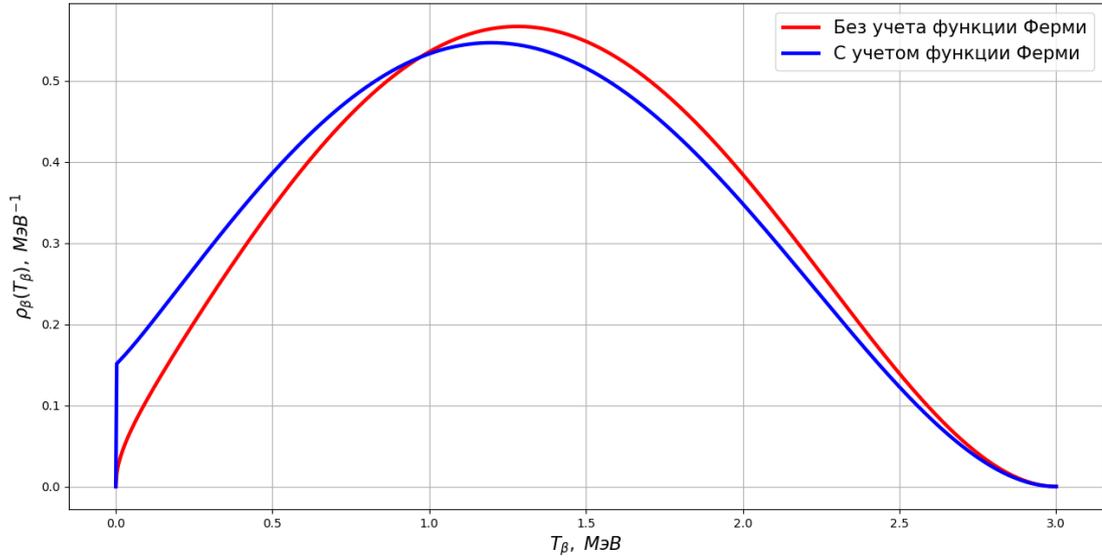


Рисунок 2.2 — Спектр электронов бета-распада в зависимости от кинетической энергии электрона T_β , $Z = 46$, $Q = 3$ МэВ.

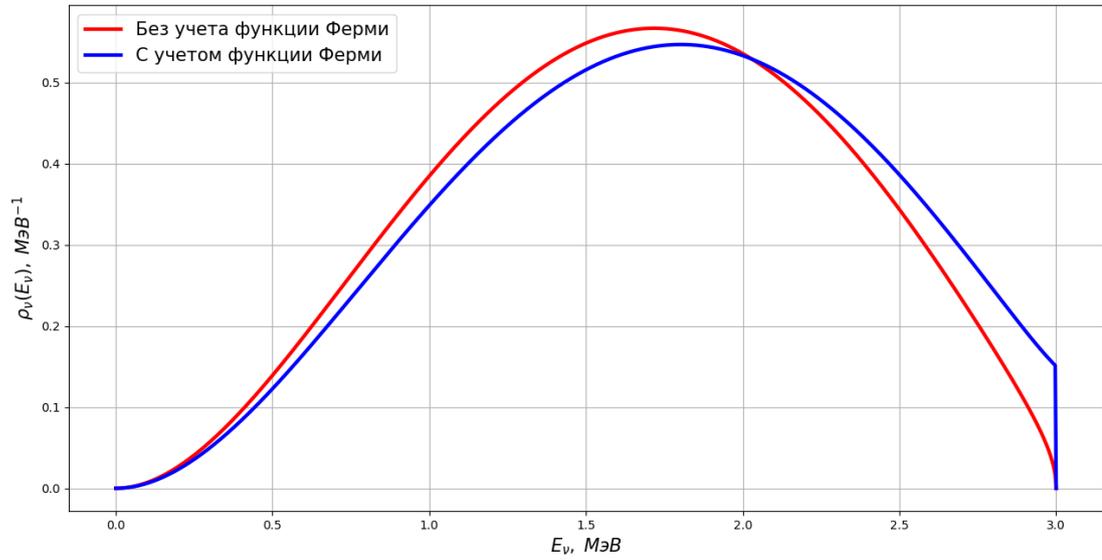


Рисунок 2.3 — Спектр антинейтрино бета-распада в зависимости от энергии антинейтрино E_ν , $Z = 46$, $Q = 3$ МэВ.

В случае метода конверсии важную роль играет не нормировка спектра (она находится путем подгонки), а его форма. По этой причине поступим следующим образом: пусть Δ — какая-либо поправка к одиночному бета-спектру (или спектру антинейтрино). Определим вклад поправки Δ в форму

бета-спектра как

$$\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{k} p_{\beta} E_{\beta} (E_0 - E_{\beta})^2 \cdot \Delta}{k p_{\beta} E_{\beta} (E_0 - E_{\beta})^2} = \frac{\tilde{k}}{k} \cdot \Delta, \quad (2.15)$$

где \tilde{k} — нормировка ρ_{β} с учетом поправки Δ , а k — нормировка ρ_{β} без учета поправки. Со спектрами антинейтрино поступим аналогично. Заметим, что даже если Δ не зависит от энергии реакции Q , то $\tilde{\Delta}$ в свою очередь уже является функцией Q (эта зависимость неявно заложена в нормировочных коэффициентах \tilde{k} и k). В дальнейшем мы, обсуждая вклад какой-либо поправки в форму спектра, по умолчанию будем подразумевать именно нормированную поправку, согласно выражению (2.15).

Рассмотрим $\tilde{F}(Z, E)$ — вклад в форму одиночного спектра от функции Ферми для $Q = 3$ МэВ и $Q = 6$ МэВ:

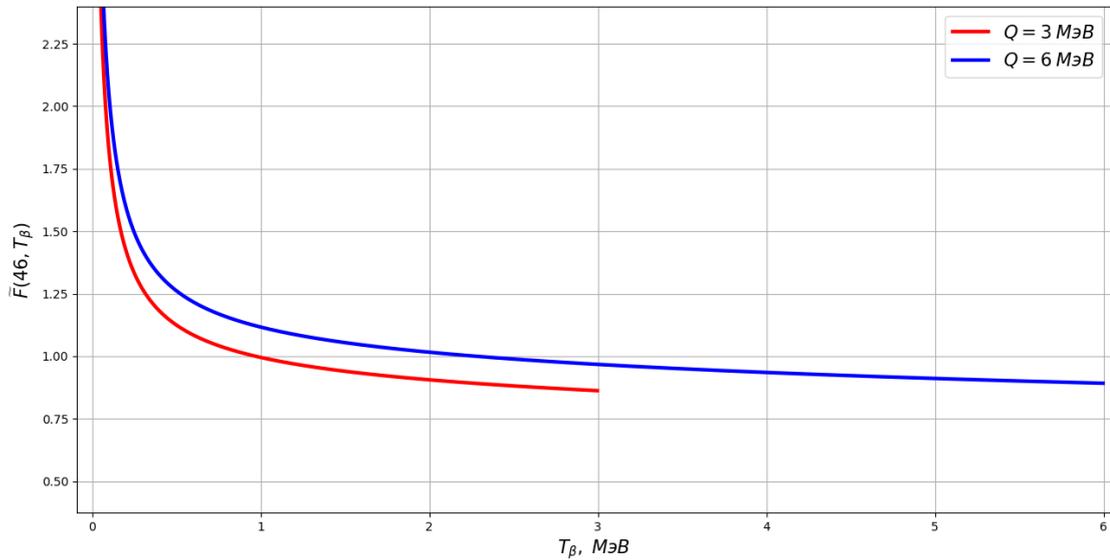


Рисунок 2.4 — Вклад функции Ферми в форму одиночного бета-спектра, $Z = 46$.

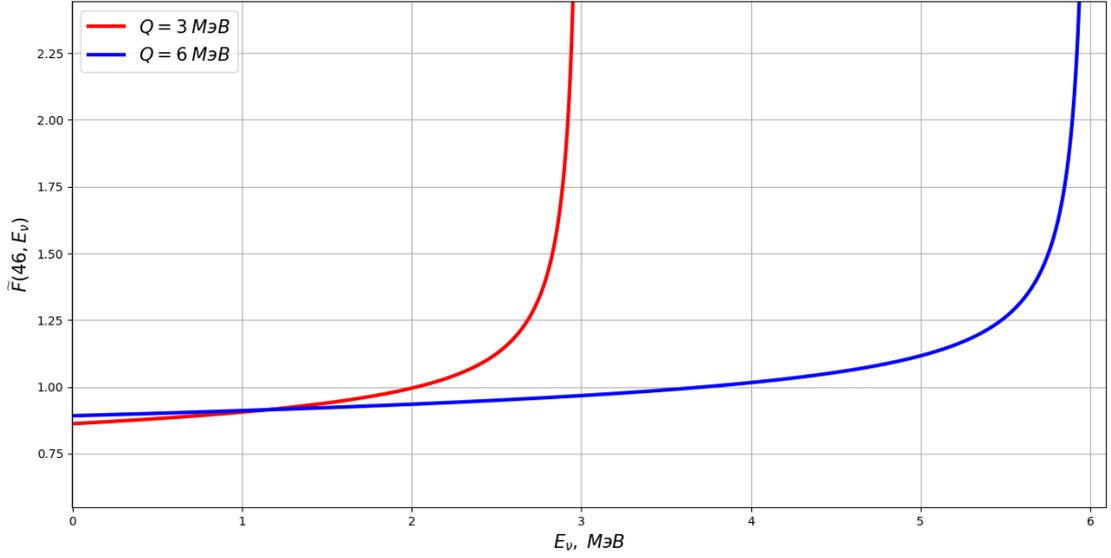


Рисунок 2.5 — Вклад функции Ферми в форму одиночного спектра антинейтрино, $Z = 46$.

2.3.2. ПОПРАВКИ НА КОНЕЧНЫЙ РАЗМЕР ЯДРА

При рассмотрении вместо точечного ядра ядра конечного размера, решить уравнение Дирака и получить выражение для уточненной функции Ферми $F(Z, E)$ аналитически не представляется возможным. По этой причине в литературе используют различные приближения, связанные с распределениями электрического заряда ρ_{Cl} в ядре. Так, например, ядро можно представить в виде равномерно заряженного шара, радиус которого R подгоняется таким образом, чтобы получить правильное значение $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ дочернего ядра [53].

Численное решение уравнения Дирака в такой модели для стабильных ядер было получено [54], а затем расширено [51] для всех изотопов. Для перехода от точечного ядра к ядру конечного размера достаточно умножить функцию Ферми $F_0(Z, E)$ на выражение $L_0(Z, E)$, которое в модели [51] имеет вид:

$$L_0^{\text{Wil.}}(Z, E) = 1 + \frac{13(\alpha Z)^2}{60} - ER\alpha Z \frac{(41 - 26\gamma)}{15(2\gamma - 1)} - \alpha Z R \gamma \frac{17 - 2\gamma}{30E(2\gamma - 1)} + a_{-1} \frac{R}{E} + \sum_{n=0}^5 a_n (ER)^n + 0.41(R - 0.0164)(\alpha Z)^{4.5}, \quad (2.16)$$

$$a_n = \sum_{j=1}^6 b_{j,n} (\alpha Z)^j$$

где $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$, значения коэффициентов $b_{j,n}$ представлены в таблице A1.

Рисунок 2.6 иллюстрирует вклад поправки конечного размера $L_0^{\text{Wil.}}$ в форму спектров.

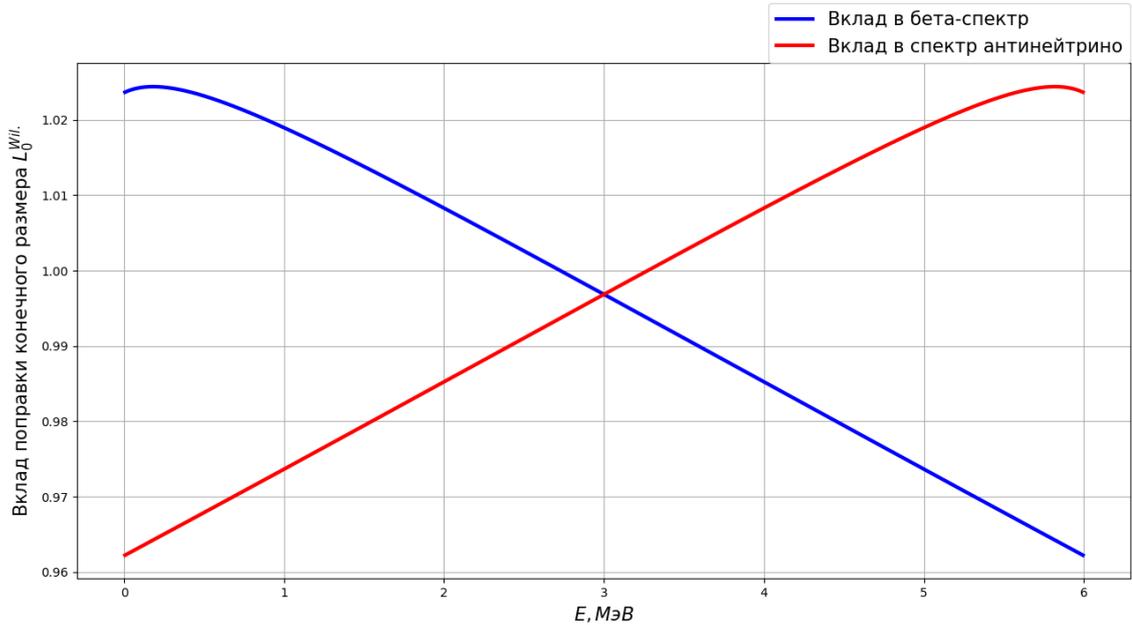


Рисунок 2.6 — Вклад поправки конечного размера $L_0^{\text{Wil.}}$ в форму спектров, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

Из рисунка 2.6 видно, что изменение формы достигает порядка 2 – 4% при $Q = 6$ МэВ (при $Q \approx 1 - 2$ МэВ вклад будет порядка 1 – 2%).

Помимо представленной выше модели, существует несколько других подходов. Так, в работе [22] рассматриваются более простые поправки вида:

$$L_0^{\text{Vog.}}(Z, E) = 1 - \frac{10}{9}Z\alpha RE, \quad (2.17)$$

$$L_0^{\text{Hayes}}(Z, E) = 1 - \frac{8}{5}Z\alpha RE \left(1 + \frac{9}{28} \frac{m_e^2}{E^2} \right). \quad (2.18)$$

Заметим, что выражения (2.16 - 2.18) представляются разложениями по малым величинам ($\alpha Z \approx 0.34$ (при $Z \approx 46$) и $(ER) \approx 0.24$ (при $E \approx 8$ МэВ и $R \approx 6$ фм), причем (2.17) и (2.18) даны до первого порядка по (αZER) . Исходя из этого, выражение (2.16) представляется более точным, поэтому в модели конверсии КИ используется именно оно, т.е. $L_0 = L_0^{\text{Wil.}}$.

Описанная выше функция L_0 связана с конечным размером дочернего ядра при рассмотрении электромагнитного взаимодействия и является дополнением к функции Ферми. Помимо неё существует поправка на конечный размер родительского ядра, связанная уже с неточностью слабого взаимодействия (а именно — с конечными длинами волн лептонов и распределением нуклонов внутри ядра) [51]. Её явный вид зависит от разрешенности и типа перехода. В случае разрешенных переходов гамов-теллеровского типа она описывается следующим уравнением [51; 53]:

$$C(Z, E, E_0) = 1 + C_0 + C_1 \cdot E + C_2 \cdot E^2, \quad (2.19)$$

где

$$C_0 = -\frac{233}{630}(\alpha Z)^2 - \frac{(E_0 R)^2}{5} + \frac{2}{35}E_0 R \alpha Z,$$

$$C_1 = -\frac{21}{35}R \alpha Z + \frac{4}{9}E_0 R^2,$$

$$C_2 = -\frac{4}{9}R^2$$

На рисунке 2.7 показан вклад поправки $C(Z, E, E_0)$ в форму одиночных спектров, а на рисунке 2.8 — результирующий вклад обеих поправок конечного размера.

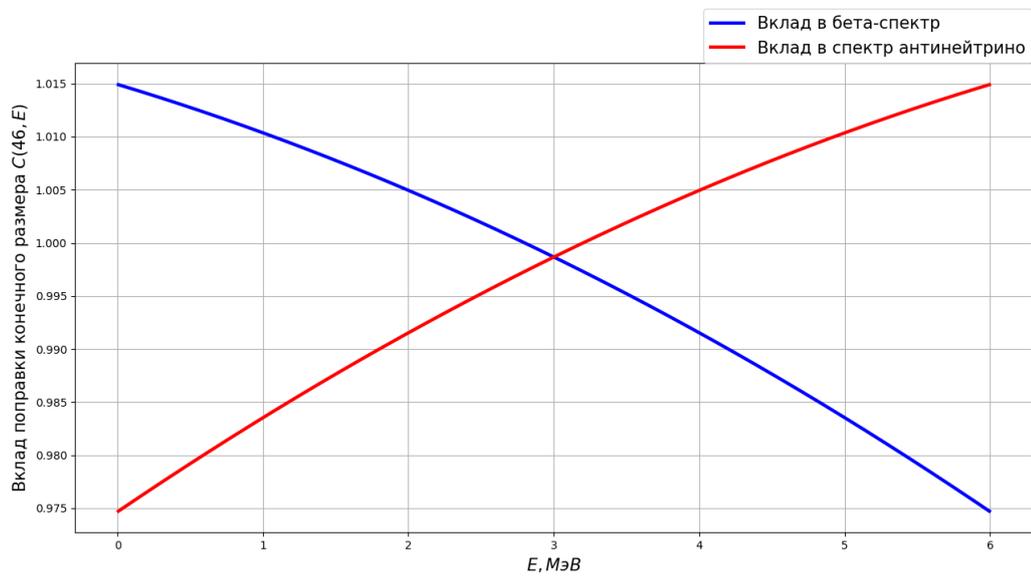


Рисунок 2.7 — Вклад поправки конечного размера $C(Z, E, E_0)$, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

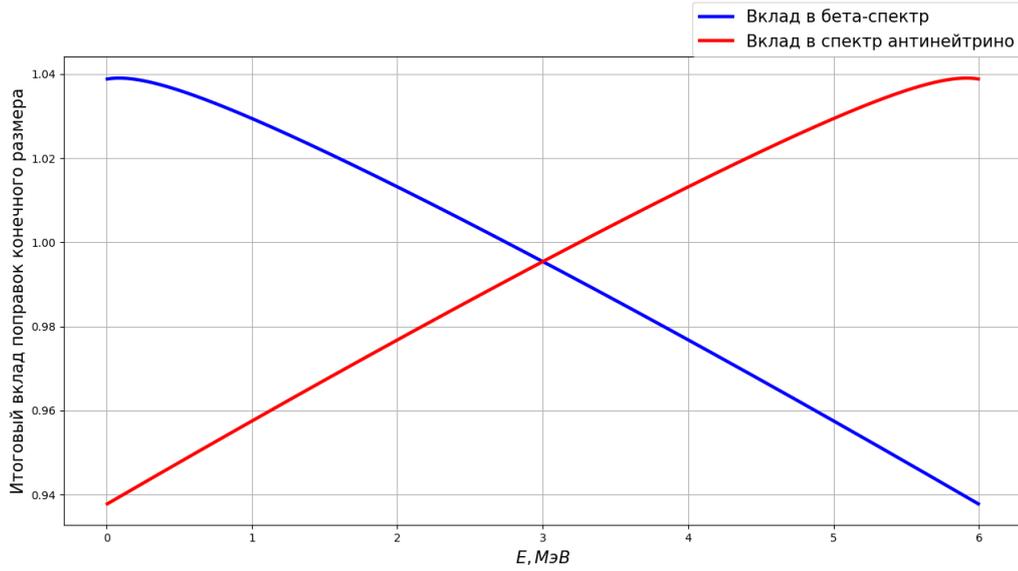


Рисунок 2.8 — Итоговый вклад поправок конечного размера, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

Из рисунков видно, что вклад $C(Z, E, E_0)$ меняет форму на $\approx 1.5–2.5\%$. Итоговый же вклад эффектов конечного размера может достигать до 6% .

2.3.3. ЭКРАНИРОВАНИЕ

Выбор поправки на экранирование S также неоднозначен ввиду существования различных моделей потенциала экранирования. Тем не менее, анализ, представленный в работе [53], показывает, что основные модели экранирования согласуются друг с другом в пределах процента. По этой причине мы используем простое выражение $S(Z, E_\beta)$, полученное в работе Behrens, Buhring [55] и наиболее широко применяемое в литературе:

$$S(Z, E) = \begin{cases} \frac{\bar{E}}{E} \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{(2\gamma-1)} e^{\pi(\bar{y}-y)} \frac{|\Gamma(\gamma+i\bar{y})|^2}{|\Gamma(\gamma+iy)|^2}, & \text{если } \bar{E} > m_e \\ 1, & \text{если } \bar{E} < m_e \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\bar{E} = E - V_0, \quad \bar{p} = \sqrt{\bar{E}^2 - m_e^2}, \quad y = \frac{\alpha Z E}{p}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha Z \bar{E}}{\bar{p}},$$

V_0 — потенциал экранирования:

$$V_0 = \alpha^2 (Z - 1)^{4/3} N(Z - 1), \quad (2.21)$$

$N(Z)$ — линейная интерполяция значений, представленных в таблице A2.

На рисунке 2.9 представлен вклад в форму одиночных спектров от поправки экранирования.

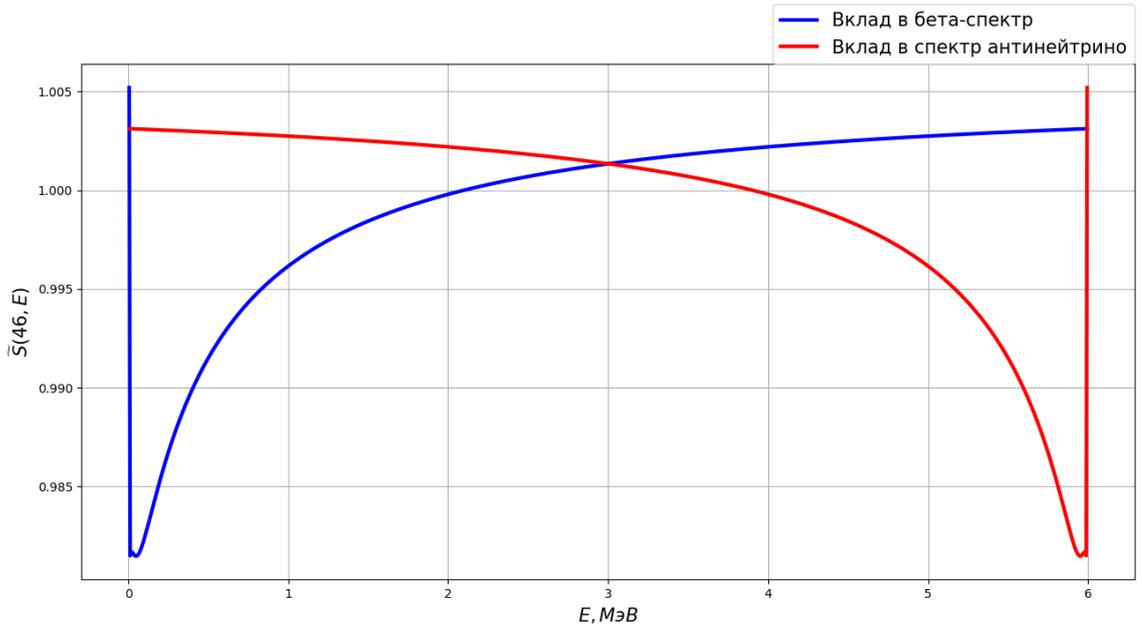


Рисунок 2.9 — Вклад поправки на экранирование в форму одиночного спектра, $Z = 46$, $Q = 6$ МэВ.

Как видно из рисунка 2.9, изменение формы спектра за счет экранирования может достигать до 2.5% при $Q \approx 6$ МэВ (при $Q \approx 2$ МэВ получим изменение формы на 1%, а при $Q \approx 8$ МэВ форма спектра изменится примерно на 2%).

2.3.4. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

Радиационные поправки учитывают испускание виртуальных и реальных фотонов при взаимодействии заряженных частиц, участвующих в реакции бета-распада.

Поправки первого порядка по α были вычислены в работах [56; 57] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_\beta(E_\beta, E_0) &= 1 + \alpha / (2\pi) \cdot g_\beta(E_\beta, E_0), \\ H_\nu(\hat{E}, E_0) &= 1 + \alpha / (2\pi) \cdot h_\nu(\hat{E}, E_0), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} g_\beta &= 3 \ln \left(\frac{m_N}{m_e} \right) - \frac{3}{4} + 4 \left(\frac{\tanh^{-1} \beta}{\beta} - 1 \right) \left[\frac{E_0 - E_\beta}{3E_\beta} - \frac{3}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\frac{2(E_0 - E_\beta)}{m_e} \right) \right] + \frac{4}{\beta} L \left(\frac{2\beta}{1 + \beta} \right) + \frac{1}{\beta} \tanh^{-1} \beta \times \\ &\quad \times \left[2(1 + \beta^2) + \frac{(E_0 - E_\beta)^2}{6E_\beta^2} - 4 \tanh^{-1} \beta \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$h_\nu = 3 \ln \left(\frac{m_N}{m_e} \right) + \frac{23}{4} + \frac{8}{\hat{\beta}} L \left(\frac{2\hat{\beta}}{1+\hat{\beta}} \right) + 8 \left(\frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} - 1 \right) \times \\ \times \ln \left(\frac{2\hat{E}\hat{\beta}}{m_e} \right) + 4 \frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} \left(\frac{7+3\hat{\beta}^2}{8} - 2 \tanh^{-1} \hat{\beta} \right). \quad (2.24)$$

Здесь m_N — масса нуклона, $\beta = p_\beta/E_\beta$, $\hat{E} = E_0 - E_\nu$, $\hat{\beta} = \hat{p}/\hat{E}$. Функция $L(x)$, фигурирующая в (2.23) — (2.24), есть функция Спенса, определяемая как

$$L(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \quad (2.25)$$

На рисунке 2.10 показан вклад радиационных поправок в бета-спектр и спектр антинейтрино.

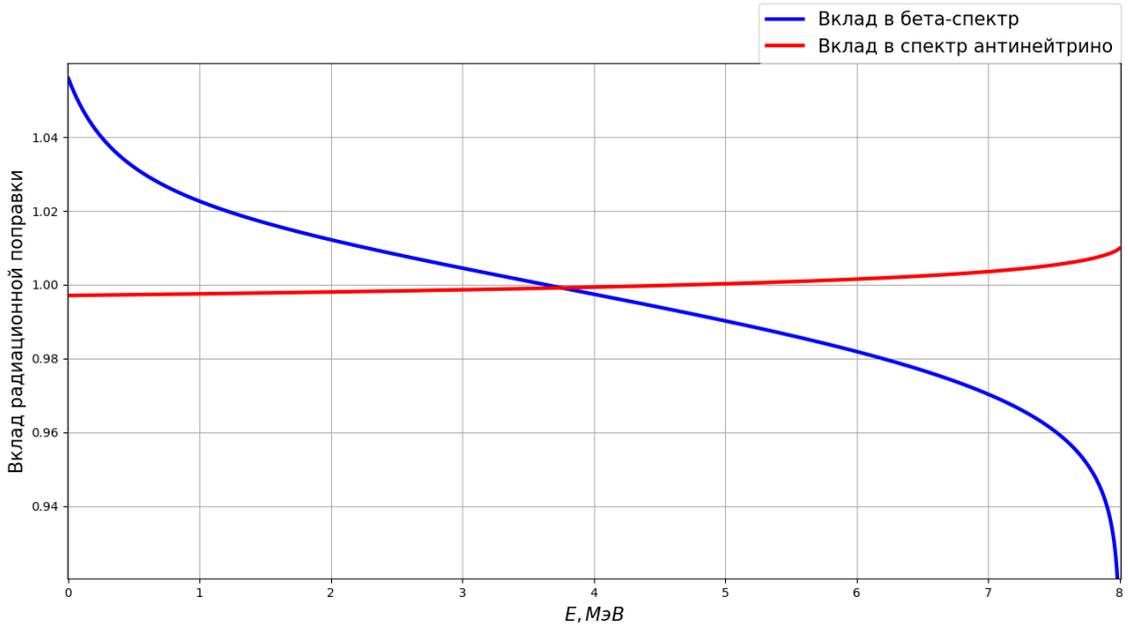


Рисунок 2.10 — Вклад радиационных поправок в форму одиночного спектра, $Q = 8$ МэВ.

В случае бета-спектра изменение формы составляет порядка 6%, в случае спектра антинейтрино порядка 0.5%.

Отметим, что для h_ν в первом порядке по α существует несколько более точная, но не аналитическая модель [58] — в среднем, вклады [57] и [58] отличаются друг от друга на 5%, чем можно пренебречь с учетом малости самой поправки h_ν , характерный вклад которой в форму спектра составляет порядка 1% и проявляется только в жесткой области, что иллюстрирует рисунок 2.10.

2.3.5. СЛАБЫЙ МАГНЕТИЗМ

Слабый магнетизм вызван вкладом дополнительного фактора, кроме g_a и g_v в слабое взаимодействие, что эффективно приводит к взаимодействию магнитного момента ядра и β -электрона. В случае разрешенных переходов гамма-теллеровского типа поправка имеет вид [59]:

$$\delta_{\text{WM}} = \frac{4}{3} E_\beta \left[\frac{\mu_\nu + \frac{J_f \vec{\Lambda} J_i}{J_f \vec{\Sigma} J_i}}{2m_N g_A} \right] \left(2 - \frac{m_e^2}{E_\beta^2} - \frac{E_0}{E_\beta} \right), \quad (2.26)$$

где m_N — масса нуклона, g_A — аксиальный формфактор (при низких энергиях его можно считать постоянной величиной), μ_ν — магнитный момент нуклона, $\vec{\Sigma} = \sum_i \tau_i \vec{\sigma}_i$ — оператор спина, $\vec{\Lambda} = \sum_i \tau_i \vec{l}_i$ — оператор углового момента. Здесь $\vec{l}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$ — орбитальный момент i -ого нуклона, $\vec{\sigma}_i = 2\vec{S}_i$, \vec{S}_i — спин i -ого нуклона.

Строго говоря, отношение матричных элементов $\frac{J_f \vec{\Lambda} J_i}{J_f \vec{\Sigma} J_i}$ необходимо рассчитывать для каждого перехода индивидуально, однако часто в литературе для простоты его полагают равным $-1/2$. Данное приближение было подробно рассмотрено в работе [59], там же было показано, что оно вносит менее 1% неопределенности в кумулятивные спектры антинейтрино.

Таким образом, окончательно поправка слабого магнетизма имеет вид:

$$\delta_{\text{WM}} \approx \frac{4}{3} E_\beta \frac{\mu_\nu - 1/2}{g_A m_N} \left(1 - \frac{m_e^2}{2E_\beta^2} - \frac{E_0}{2E_\beta} \right) \approx 0.5\% E_\beta \quad (2.27)$$

На рисунке 2.11 показан вклад поправки слабого магнетизма $1 + \delta_{\text{WM}}$. Из рисунка видно, что слабый магнетизм меняет форму одиночного спектра примерно на 2 - 2.5% при высоких значениях Q (при низких $Q \approx 1 - 2$ МэВ вклад будет порядка 1%).

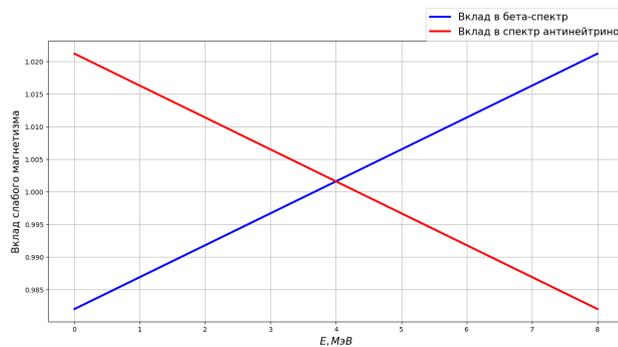


Рисунок 2.11 — Вклад поправки слабого магнетизма к форме одиночного спектра, $Q = 8$ МэВ.

Подытожив вышеизложенное, приведем в сводной таблице 2.1 характерные вклады от каждой поправки и проиллюстрируем их на рисунке 2.12.

Таблица 2.1 — Поправки к виртуальным бета-спектрам, используемые в данной работе.

Поправка	Физический эффект, учитываемый поправкой	Вклад в форму спектров, %	Ссылка
$L(Z, E_\beta)$	Влияние размера дочернего ядра, изменяющего вид кулоновского поля.	≈ 2	[51]
$C(Z, E_\beta, Q)$	Учет размеров и ядерной структуры родительского ядра, пространственных вариаций лептонных волновых функций.	≈ 2.5	[51]
$S(Z, E_\beta)$	Экранирование заряда дочернего ядра электронами атома.	≈ 2.5	[55]
$G_\beta(E_\beta, Q)$	Влияние на бета-спектр виртуальных/реальных фотонов вследствие электростатического взаимодействия дочернего ядра с улетающим электроном.	≈ 6	[56]
$H_\nu(E_\nu, Q)$	Косвенное влияние электростатического поля дочернего ядра на спектр антинейтрино через обмен виртуальными фотонами и учет тормозного излучения.	≈ 1	[57]
$1 + \delta_{WM}$	Поправка на слабый магнетизм, учитывающая эффективное взаимодействие бета-электрона с магнитным моментом ядра.	≈ 2.5	[59]

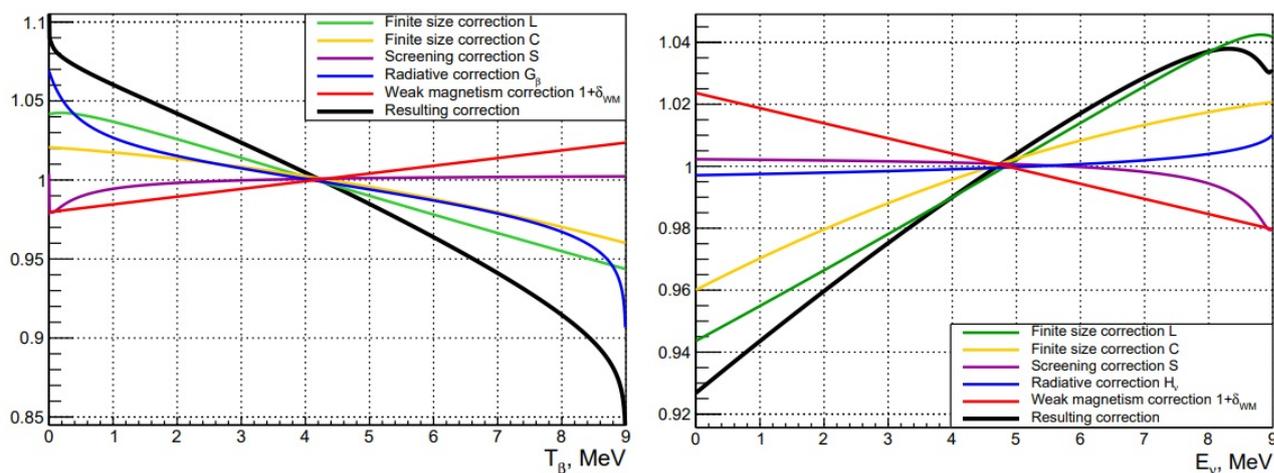


Рисунок 2.12 — Вклад поправок в форму спектров для $Z = 46$ и $Q = 9$ МэВ

3. РЕЗУЛЬТАТЫ КОНВЕРСИИ

3.1. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ И СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МОДЕЛЯМИ

В процедуре конверсии были использованы скорректированные, согласно данным работы [60], кумулятивные бета-спектры продуктов деления ^{235}U и ^{238}U . Спектр антинейтрино $\rho_{\text{KI}}^{235}(E_\nu)$ был получен непосредственной конверсией скорректированного бета-спектра, после чего был рассчитан спектр антинейтрино $\rho_{\text{KI}}^{238}(E_\nu)$. Полученные кумулятивные спектры антинейтрино продуктов деления изотопов урана представлены в приложении.

Обсудим ошибки результирующих спектров антинейтрино. Основная погрешность значений связана с переносом ошибок исходного бета-спектра на конвертированный спектр антинейтрино, включающих статистическую погрешность и погрешность нормировки. Погрешности нормировки δ_{norm} бета-спектров напрямую переносились на спектры антинейтрино, они даны в работах [32; 61] и для ^{235}U составляют от 1.7% до 1.9%.

Для оценки статистической погрешности был использован метод многократного повторения процедуры конверсии с варьированием значений бета-спектров в пределах их погрешностей, распределённых по нормальному закону. Полученный таким образом усреднённый спектр $\langle\rho_\nu\rangle$ антинейтрино брался как итоговый, а среднеквадратичный разброс значений $\Delta\rho_\nu$ отождествлялся с ошибкой процедуры конверсии δ_{stat} , порожденной статистической погрешностью исходных данных. На рисунке 3.1 в качестве примера приведены полученные описанным выше способом распределения значений спектра антинейтрино ^{235}U для промежуточных энергий антинейтрино 2 МэВ, 4 МэВ, 6 МэВ и 8 МэВ, средние значения распределений и среднеквадратичные отклонения.

Помимо погрешностей δ_{stat} и δ_{norm} , порождаемых ошибками исходных данных, заметный вклад в погрешность процедуры преобразования оказывают разброс δ_{WM} значений величины слабого магнетизма и ошибки $\delta_{\langle Z \rangle}$ эффективного заряда ядра $\langle Z \rangle(Q)$. Их вклад был рассчитан в работе [35] и составил по совокупности от сотых долей процента до 5% для разных энергий. Итоговая погрешность конвертированного спектра антинейтрино при заданной энергии оценивается как $\delta\rho_\nu = \sqrt{\delta_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{norm}}^2 + \delta_{\text{WM}}^2 + \delta_{\langle Z \rangle}^2}$.

На рисунке 3.2 представлено сравнение спектров антинейтрино продуктов деления ^{235}U и ^{238}U , полученных согласно процедуре НМ [34; 35] (для ^{238}U мы дополнительно приводим сравнение со спектром TUM [32]) с теми же спектрами, полученным по процедуре КИ. Видно, что конвертированные спектры

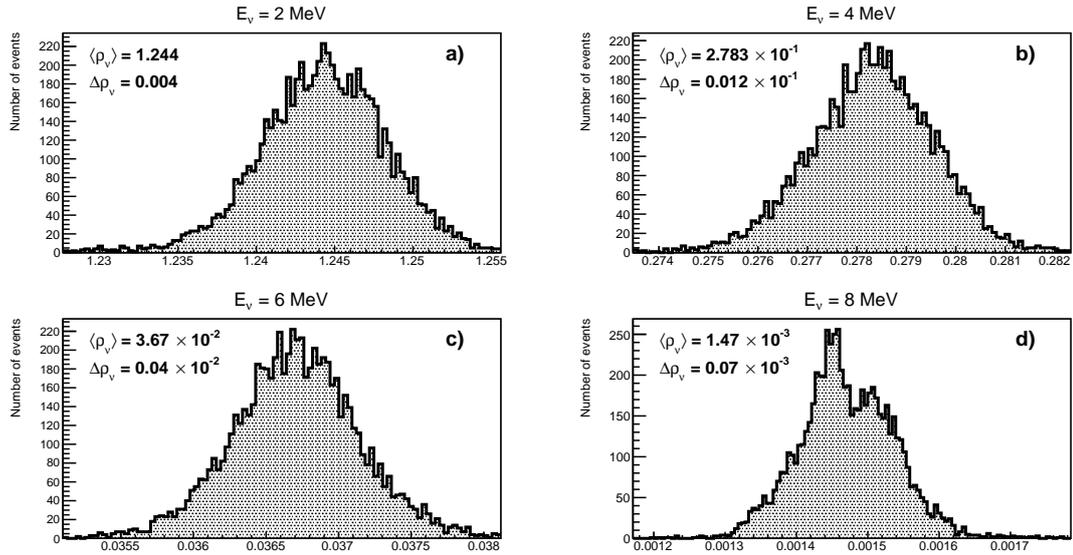


Рисунок 3.1 — распределения значений $\rho_{\nu}^{235}(E_{\nu})$ в единицах $\text{МэВ}^{-1} \text{дел}^{-1}$ для энергий антинейтрино 2 МэВ (а), 4 МэВ (б), 6 МэВ (с), 8 МэВ (д), полученные многократной конверсией за 10000 итераций.

антинейтрино продуктов деления изотопов урана показывают существенную разницу, связанную, в основном, с переоценкой исходных кумулятивных бета-спектров.

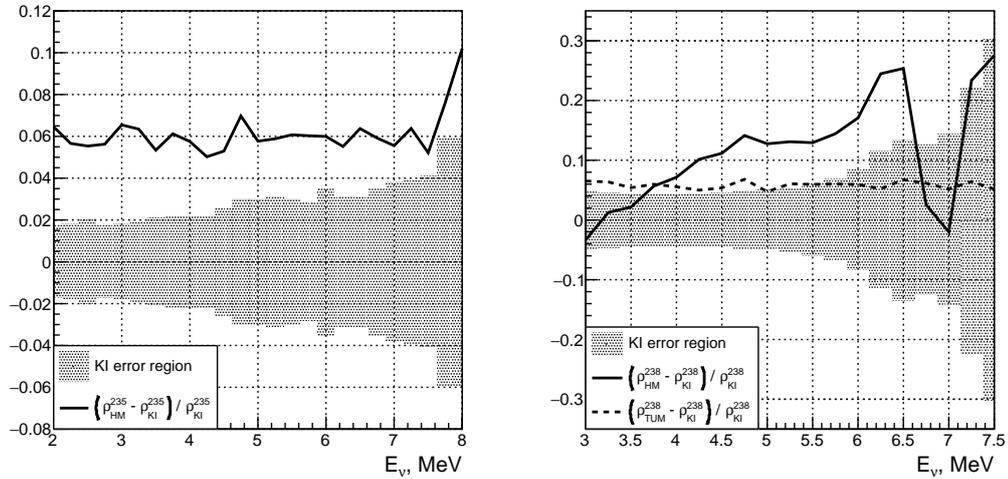


Рисунок 3.2 — Сравнение спектров антинейтрино для ^{235}U и ^{238}U согласно моделям КИ, НМ[34; 35] и TUM [32].

Аналогичным образом была проведена конверсия кумулятивных бета-спектров продуктов деления изотопов плутония, взятых из работы [61], результаты приведены в приложении. Сравнение спектров антинейтрино моделей КИ и НМ для ^{239}Pu и ^{241}Pu , представленное на рисунке 3.3, показывает согласие двух моделей в пределах погрешностей при использовании одинаковых исходных бета-спектров.

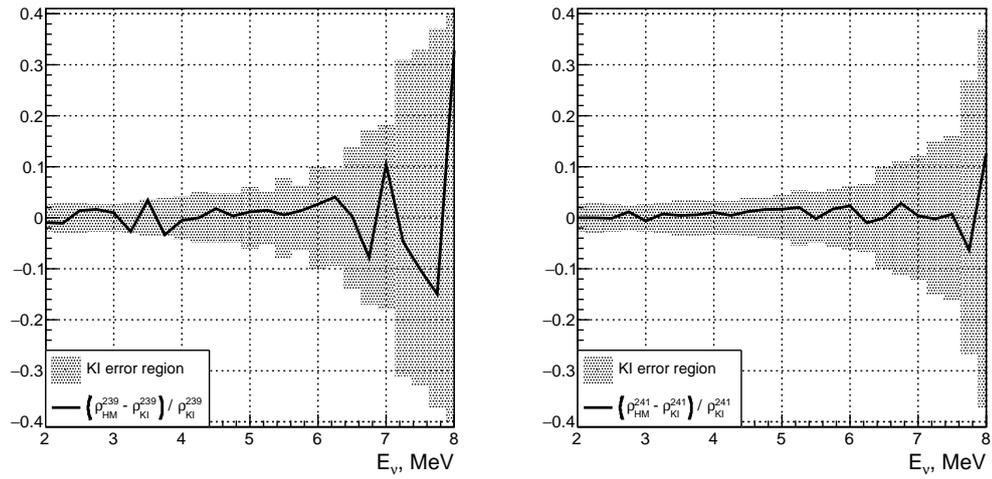


Рисунок 3.3 — Сравнение спектров антинейтрино для ^{239}Pu и ^{241}Pu согласно моделям КИ и НМ[35].

Таким образом, модель КИ в целом предсказывает более мягкий спектр реакторных антинейтрино, чем модель НМ.

3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОШЕНИЙ ВЫХОДОВ ОБР

3.2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ К ПОПРАВКАМ ПОДГОНОЧНЫХ СПЕКТРОВ

Для анализа устойчивости отношения выходов ОБР основных изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu была проведена конверсия спектров группы ILL со всевозможными комбинациями поправок к одиночному бета-спектру в модели КИ, для каждой из которых были рассчитаны соответствующие выходы ОБР.

Запись $\sigma(\Delta)$ означает, что данный выход ОБР был рассчитан по кумулятивному спектру реакторных антинейтрино, полученному конверсией данных ILL с учетом поправки Δ . Так, $\Delta = 1$ соответствует конверсии без поправок (отметим, что функция Ферми в этом контексте поправкой не является и учитывается всегда). Аналогично, $\Delta = A$ соответствует включению всех поправок модели КИ, а запись $A - \Delta$ — что учтены все поправки, за исключением Δ . Полученные результаты представлены в таблицах 3.1–3.3 для трех основных изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu .

Таблица 3.1 — Выходы ОБР ^{235}U в единицах $10^{-43} \text{ см}^2 \text{ дел}^{-1}$ для различных наборов поправок, используемых при реконструкции кумулятивного спектра антинейтрино, и их относительные отклонения.

Поправка Δ	$\sigma(\Delta)$	$\frac{\sigma(A)-\sigma(\Delta)}{\sigma(A)}$	$\frac{\sigma(\Delta)-\sigma(1)}{\sigma(\Delta)}$	$\frac{\sigma(A)-\sigma(A-\Delta)}{\sigma(A)}$
1	6.05	3.33%	—	—
(LC)	6.29	-0.30%	3.63%	3.64%
S	6.02	3.79%	-0.47%	-0.45%
G_β	6.13	2.12%	1.24%	1.36%
δ_{WM}	5.99	4.24%	-0.95%	-1.06%
(LC) S	6.25	0.15%	3.19%	3.18%
(LC) G_β	6.36	-1.67%	4.92%	4.85%
(LC) δ_{WM}	6.21	0.76%	2.60%	2.58%
S G_β	6.10	2.58%	0.78%	0.76%
S δ_{WM}	5.96	4.85%	-1.59%	-1.67%
$G_\beta \delta_{\text{WM}}$	6.06	3.18%	0.16%	0.15%
(LC) S G_β	6.33	-1.06%	4.35%	4.24%
(LC) S δ_{WM}	6.17	1.36%	2.00%	2.12%
(LC) $G_\beta \delta_{\text{WM}}$	6.29	-0.45%	3.77%	3.79%
G_β S δ_{WM}	6.03	3.64%	-0.31%	-0.30%
A	6.26	—	3.33%	—

Таблица 3.2 — Выходы ОБР ^{239}Pu в единицах $10^{-43} \text{ см}^2 \text{ дел}^{-1}$ для различных поправок и их комбинаций и их относительные отклонения.

Поправка Δ	$\sigma(\Delta)$	$\frac{\sigma(A)-\sigma(\Delta)}{\sigma(A)}$	$\frac{\sigma(\Delta)-\sigma(1)}{\sigma(\Delta)}$	$\frac{\sigma(A)-\sigma(A-\Delta)}{\sigma(A)}$
1	4.19	3.23%	—	—
(LC)	4.34	-0.23%	3.46%	3.70%
S	4.17	3.70%	-0.48%	-0.46%
G_β	4.24	2.10%	1.18%	1.39%
δ_{WM}	4.15	4.16%	-0.96%	-0.92%
(LC) S	4.32	0.23%	3.00%	3.00%
(LC) G_β	4.41	-1.85%	4.99%	4.85%
(LC) δ_{WM}	4.30	0.69%	2.56%	2.77%
S G_β	4.21	2.77%	0.48%	0.69%
S δ_{WM}	4.12	4.85%	-1.70%	-1.85%
$G_\beta \delta_{\text{WM}}$	4.20	3.00%	0.24%	0.23%
(LC) S G_β	4.37	-0.92%	4.12%	4.16%
(LC) S δ_{WM}	4.27	1.39%	1.87%	2.10%
(LC) $G_\beta \delta_{\text{WM}}$	4.35	-0.46%	3.68%	3.70%
G_β S δ_{WM}	4.17	3.70%	-0.48%	-0.23%
A	4.33	—	3.23%	—

Таблица 3.3 — Выходы ОБР ^{241}Pu в единицах $10^{-43} \text{ см}^2 \text{ дел}^{-1}$ для различных поправок и их комбинаций и их относительные отклонения.

Поправка Δ	$\sigma(\Delta)$	$\frac{\sigma(A)-\sigma(\Delta)}{\sigma(A)}$	$\frac{\sigma(\Delta)-\sigma(1)}{\sigma(\Delta)}$	$\frac{\sigma(A)-\sigma(A-\Delta)}{\sigma(A)}$
1	5.82	3.16%	—	—
(LC)	6.04	-0.50%	3.64%	3.66%
S	5.78	3.83%	-0.70%	-0.67%
G_β	5.88	2.16%	1.02%	1.16%
δ_{WM}	5.75	4.34%	-1.22%	-1.16%
(LC) S	6.00	0.17%	3.00%	3.16%
(LC) G_β	6.11	-1.67%	4.75%	4.83%
(LC) δ_{WM}	5.97	0.67%	2.52%	2.66%
$S G_\beta$	5.85	2.66%	0.51%	0.67%
$S \delta_{\text{WM}}$	5.72	4.83%	-1.75%	-1.67%
$G_\beta \delta_{\text{WM}}$	5.82	3.16%	0%	0.17%
(LC) $S G_\beta$	6.08	-1.16%	4.28%	4.34%
(LC) $S \delta_{\text{WM}}$	5.94	1.16%	2.02%	2.16%
(LC) $G_\beta \delta_{\text{WM}}$	6.05	-0.67%	3.80%	3.83%
$G_\beta S \delta_{\text{WM}}$	5.79	3.66%	-0.52%	-0.50%
A	6.01	—	3.16%	—

Введем в рассмотрение функционал

$$h(\Delta) = \frac{\sigma(\Delta) - \sigma(1)}{\sigma(\Delta)} = \frac{\sigma(A) - \sigma(A - \Delta)}{\sigma(A)}. \quad (3.1)$$

Второе равенство в данном выражении выполняется с хорошей точностью согласно расчетам, представленным в таблицах 3.1–3.3. Основными свойствами функционала $h(\Delta)$ является его аддитивность по поправкам, то есть выполнение равенства

$$h(\Delta_1 \Delta_2) = h(\Delta_1) + h(\Delta_2), \quad (3.2)$$

и независимость от выбранного изотопа. Обращаем внимание, что оба представленных свойства выполняются с точностью долей процента. С этой же точностью выполняется следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta_1 \Delta_2) &= \sigma(\Delta_1) \times [1 + h(\Delta_2)] = \sigma(\Delta_2) \times [1 + h(\Delta_1)] = \\ &= \sigma(1) \times [1 + h(\Delta_1 \Delta_2)] = \sigma(1) \times [1 + h(\Delta_1) + h(\Delta_2)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда немедленно следует устойчивость отношения выходов ОБР:

$$\frac{\sigma^X(\Delta_1 \Delta_2)}{\sigma^Y(\Delta_1 \Delta_2)} = \frac{\sigma^X(\Delta_1)}{\sigma^Y(\Delta_1)} \times \frac{1 + h(\Delta_2)}{1 + h(\Delta_2)} = \frac{\sigma^X(\Delta_2)}{\sigma^Y(\Delta_2)} \times \frac{1 + h(\Delta_1)}{1 + h(\Delta_1)} = \frac{\sigma^X(1)}{\sigma^Y(1)}, \quad (3.4)$$

Данный вывод подтвержден расчетами, представленными в таблице 3.4 и проиллюстрированными на рисунке 3.4.

Таблица 3.4 — Выходы ОБР основных изотопов в единицах 10^{-43} см² дел⁻¹ для различных поправок и их комбинаций и их относительные отклонения.

Поправка Δ	σ^{235}	σ^{239}	σ^{241}	$\sigma^{235}/\sigma^{239}$	$\sigma^{235}/\sigma^{241}$
1	6.05	4.19	5.82	1.444	1.040
(LC)	6.29	4.34	6.04	1.445	1.041
S	6.02	4.17	5.78	1.443	1.042
G_β	6.13	4.24	5.88	1.446	1.043
δ_{WM}	5.99	4.15	5.75	1.443	1.042
(LC) S	6.25	4.32	6.00	1.447	1.042
(LC) G_β	6.36	4.41	6.11	1.442	1.041
(LC) δ_{WM}	6.21	4.30	5.97	1.444	1.040
S G_β	6.10	4.21	5.85	1.449	1.043
S δ_{WM}	5.96	4.12	5.72	1.447	1.042
G_β δ_{WM}	6.06	4.20	5.82	1.443	1.041
(LC) S G_β	6.33	4.37	6.08	1.449	1.041
(LC) S δ_{WM}	6.17	4.27	5.94	1.445	1.040
(LC) G_β δ_{WM}	6.29	4.35	6.05	1.446	1.040
G_β S δ_{WM}	6.03	4.17	5.79	1.446	1.041
A	6.26	4.33	6.01	1.446	1.042

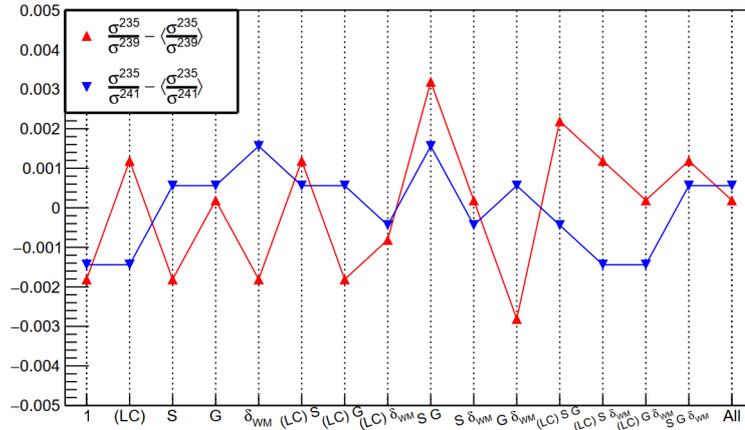


Рисунок 3.4 — Отклонения отношений выходов ОБР от их среднего значения для разных наборов поправок

Среднее значение величин $\langle \sigma^{235}/\sigma^{239} \rangle = 1.44$, $\langle \sigma^{235}/\sigma^{241} \rangle = 1.04$, а относительный разброс для обоих случаев составляет 0.2%. Отметим, что погрешности этих величин составляют 3% \gg 0.2%. Таким образом, отношение выходов ОБР является устойчивой величиной относительно вариаций в процедуре конверсии, связанных с учетом дополнительных поправок, которые, как было показано, вносят вклад независимо друг от друга.

3.2.2. УСТОЙЧИВОСТЬ К ВКЛАДУ ЗАПРЕЩЕННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Для анализа вклада запрещенных переходов в конвертированные спектры антинейтрино и выходы ОБР форма используемых синтетических подгоночных спектров модели КИ (2.11) была модернизирована следующим образом:

$$\rho_\beta(T_\beta) = \rho_\beta^0(T_\beta) \times \sum_j \alpha_j(Q) C_j(T_\beta, Q) (1 + \delta_{\text{WM}}^{(j)}). \quad (3.5)$$

Здесь индекс j нумерует тип запрещенного перехода (в настоящей работе мы рассматриваем гамов–теллеровские переходы первой степени запрета, которые вносят до 30% вклада в реальный реакторный спектр), C_j — фактор формы, $\delta_{\text{WM}}^{(i)}$ — поправка, учитывающая слабый магнетизм для данного запрещенного перехода, $\alpha_j(Q)$ — доля запрещенных переходов j -ого типа на данном энергетическом интервале. В таблице 3.5 представлены используемые аналитические выражения для факторов формы $C_j(T_\beta, Q)$ и поправок на слабый магнетизм, данные в [36; 38; 62]. Входящие в факторы формы $C_j(E_\beta, E_\nu)$ величины \tilde{F} называются Ферми-подобными функциями, их явный вид можно найти, например, в работе [62].

Таблица 3.5 — Факторы формы и поправки на слабый магнетизм для однократно запрещенных гамов–теллеровских переходов.

ΔJ^π	Фактор формы $C(E_\beta, E_\nu)$	Слабый магнетизм δ_{WM}
0^-	$E_\nu^2 + p_\beta^2 \tilde{F}_{p_{1/2}} + 2p_\beta E_\nu \tilde{F}_{sp_{1/2}}$	0
1^-	$E_\nu^2 + \frac{2}{3} p_\beta^2 \tilde{F}_{p_{1/2}} + \frac{1}{3} p_\beta^2 \tilde{F}_{p_{3/2}} - \frac{4}{3} p_\beta E_\nu \tilde{F}_{sp_{1/2}}$	$\frac{\mu_\nu - 1/2}{m_N g_A} \times \frac{(E_\beta v_\beta^2 - E_\nu)(p_\beta^2 + E_\nu^2) + 2v_\beta^2 E_\beta E_\nu (E_\nu - E_e)/3}{p_\beta^2 + E_\nu^2 - 4v_\beta^2 E_\nu E_\beta/3}$
2^-	$E_\nu^2 + p_\beta^2 \tilde{F}_{p_{1/2}}$	$\frac{3}{5} \frac{\mu_\nu - 1/2}{m_N g_A} \times \frac{(E_\beta v_\beta^2 - E_\nu)(p_\beta^2 + E_\nu^2) + 2v_\beta^2 E_\beta E_\nu (E_\nu - E_e)/3}{p_\beta^2 + E_\nu^2}$

В работе [38] было предложено определять доли $\alpha_j(Q)$ с использованием ядерных баз данных (ЯБД) и для каждого типа запрета выбирать индивидуальную параметризацию эффективного заряда $\langle Z \rangle(Q)$. Этот подход осложняется неполнотой ЯБД (в частности, основные неопределенности вызваны переходами GT 0^- и GT 1^-).

В настоящей работе для анализа устойчивости отношений спектров антинейтрино и выходов ОБР мы используем более общий подход: на каждом энергетическом отрезке веса $\alpha_j(Q)$ разыгрываются случайным образом (допускаются заведомо нереалистичные варианты, в частности, когда весь спектр описывается запрещенными переходами). С использованием полученных таким образом долей запрета и уравнения (3.5) производится аппроксимация данных ILL [61] и реконструкция спектров антинейтрино для изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu .

На рисунке 3.5 представлена выборка отношений кумулятивных спектров антинейтрино из 500 итераций описанной процедуры. Рисунок 3.6 иллюстрирует распределения значений отношений соответствующих выходов обратного бета-распада.

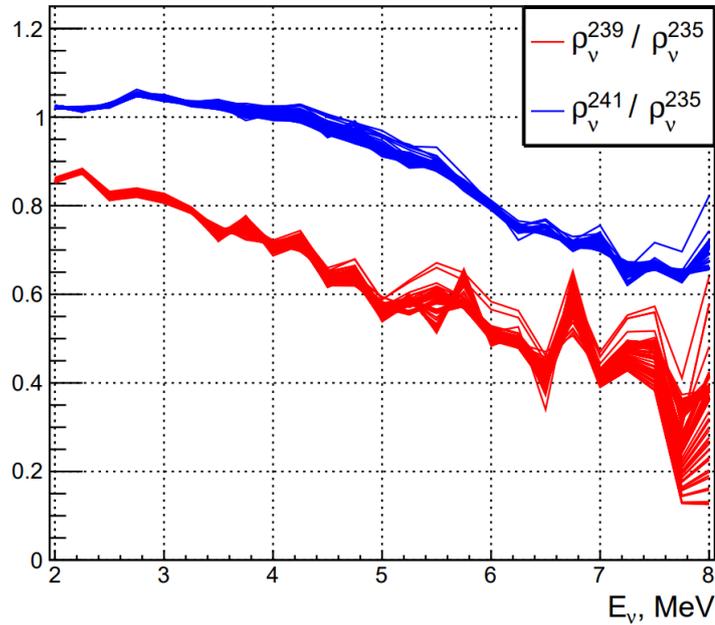


Рисунок 3.5 — Отношения кумулятивных спектров антинейтрино продуктов деления ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu для различных случайных долей запрещенных переходов $\alpha_j(Q)$. Представлена выборка из 500 итераций.

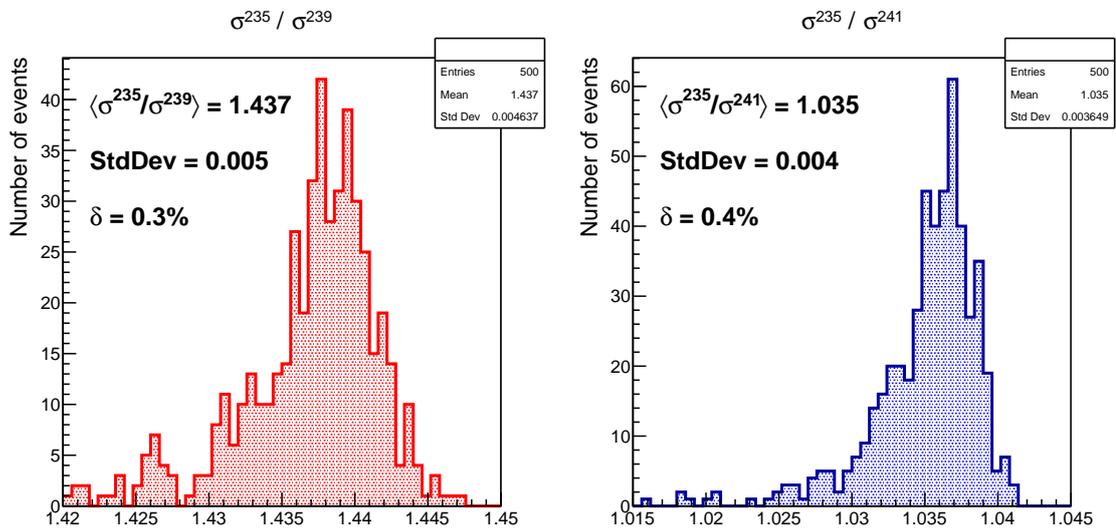


Рисунок 3.6 — Отношения выходов ОБР изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu для различных случайных долей запрещенных переходов $\alpha_j(Q)$. Представлена выборка из 500 итераций.

Полученный результат свидетельствует о том, что отношения выходов ОБР устойчиво к наличию в подгоночных спектрах долей запрещенных переходов — разброс значений $\sigma^{235}/\sigma^{239}$ и $\sigma^{235}/\sigma^{241}$ составляет доли процента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена модель конверсии для расчета кумулятивных спектров антинейтрино продуктов деления тяжелых изотопов, на основе которой было разработано программное обеспечение для реализации описанной процедуры. Созданное ПО было зарегистрировано в качестве РИД в рамках внутренней НИР НИЦ КИ "Наука и практика нейтринных исследований на АЭС".

В работе впервые описан и реализован метод многократной конверсии, с использованием которого, в частности, был проведен анализ неопределенностей метода конверсии и расчет погрешностей; показано, что процедура преобразования с хорошей точностью (доли %) аддитивна по поправкам к форме бета-спектров, показана устойчивость отношения выходов ОБР $\sigma^{235}/\sigma^{239}$, в том числе к запрещенным переходам.

С использованием экспериментальных данных группы КИ, кумулятивных бета-спектров группы ILL и представленной в данной работе процедуры конверсии были реконструированы спектры реакторных антинейтрино для изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu . Полученные результаты согласуются с данными реакторных экспериментов и решают проблему реакторной антинейтринной аномалии. Тем не менее, следует отметить, что ряд вопросов об используемых допущениях при реализации процедуры реконструкции требует дальнейшего анализа и является объектом исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Reines F., Cowan C. L.* Detection of the free neutrino // *Phys. Rev.* — 1953. — Vol. 92. — P. 830–831. — DOI: [10.1103/PhysRev.92.830](https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.830).
2. Constraints on θ_{13} from A Three-Flavor Oscillation Analysis of Reactor Antineutrinos at KamLAND / A. Gando [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 83. — P. 052002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.83.052002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.052002).
3. Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay / F. P. An [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 171803. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.108.171803](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.171803).
4. Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment / J. K. Ahn [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 191802. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.108.191802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.191802).
5. Sterile Neutrino Search at the NEOS Experiment / Y. J. Ko [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 118, no. 12. — P. 121802. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.121802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.121802).
6. *Schoppmann S.* Status of Anomalies and Sterile Neutrino Searches at Nuclear Reactors // *Universe.* — 2021. — Vol. 7, no. 10. — P. 360. — DOI: [10.3390/universe7100360](https://doi.org/10.3390/universe7100360).
7. *Danilov M.* Review of sterile neutrino searches at very short-baseline reactor experiments. — 2022. — arXiv: [2203.03042](https://arxiv.org/abs/2203.03042) [[hep-ex](https://arxiv.org/abs/2203.03042)].
8. The Reactor Antineutrino Anomaly / G. Mention [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 83. — P. 073006. — DOI: [10.1103/PhysRevD.83.073006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.073006).
9. Search for Neutrino Oscillations at a Fission Reactor / H. Kwon [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 1981. — Vol. 24. — P. 1097–1111. — DOI: [10.1103/PhysRevD.24.1097](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.24.1097).
10. Improved Measurement of the Reactor Antineutrino Flux and Spectrum at Daya Bay / F. P. An [et al.] // *Chin. Phys. C.* — 2017. — Vol. 41, no. 1. — P. 013002. — DOI: [10.1088/1674-1137/41/1/013002](https://doi.org/10.1088/1674-1137/41/1/013002).
11. Possible origins and implications of the shoulder in reactor neutrino spectra / A. C. Hayes [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2015. — Vol. 92, no. 3. — P. 033015. — DOI: [10.1103/PhysRevD.92.033015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.033015).

12. *Huber P.* NEOS Data and the Origin of the 5 MeV Bump in the Reactor Antineutrino Spectrum // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Vol. 118, no. 4. — P. 042502. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.042502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.042502).
13. *Mikaelian L. A.* Neutrino laboratory in the atomic plant // in Proceedings of the International Conference "Neutrino 77". — 1978. — Vol. 2. — P. 383–385.
14. *Borovoi A. A., Mikaelyan L. A.* Possibilities of the practical use of neutrinos // *Soviet Atomic Energy.* — 1978. — Vol. 44. — P. 589–592. — DOI: [10.1007/BF01117861](https://doi.org/10.1007/BF01117861).
15. Neutrino method remote measurement of reactor power and power output / Y. V. Klimov [et al.] // *Atomic Energy.* — 1994. — Vol. 76. — P. 123–127. — DOI: [10.1007/BF02414355](https://doi.org/10.1007/BF02414355).
16. First ground-level laboratory test of the two-phase xenon emission detector RED-100 / D. Y. Akimov [et al.] // *JINST.* — 2020. — Vol. 15, no. 02. — P02020. — DOI: [10.1088/1748-0221/15/02/P02020](https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/02/P02020).
17. iDREAM: Industrial Detector of REactor Antineutrinos for Monitoring at Kalinin nuclear power plant / A. Abramov [et al.]. — 2021. — arXiv: [2112.09372](https://arxiv.org/abs/2112.09372) [[physics.ins-det](https://arxiv.org/abs/2112.09372)].
18. *Danilov M., Skrobova N.* New results from the DANSS experiment // *PoS.* — 2022. — Vol. EPS-HEP2021. — P. 241. — DOI: [10.22323/1.398.0241](https://doi.org/10.22323/1.398.0241).
19. *Christensen E., Huber P., Jaffke P.* Antineutrino reactor safeguards - a case study. — 2013. — arXiv: [1312.1959](https://arxiv.org/abs/1312.1959) [[physics.ins-det](https://arxiv.org/abs/1312.1959)].
20. Neutrino detectors as tools for nuclear security / A. Bernstein [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* — 2020. — Vol. 92. — P. 011003. — DOI: [10.1103/RevModPhys.92.011003](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.92.011003).
21. Neutrino Physics with JUNO / F. An [et al.] // *J. Phys. G.* — 2016. — Vol. 43, no. 3. — P. 030401. — DOI: [10.1088/0954-3899/43/3/030401](https://doi.org/10.1088/0954-3899/43/3/030401).
22. *Hayes A. C., Vogel P.* Reactor Neutrino Spectra // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* — 2016. — Vol. 66. — P. 219–244. — DOI: [10.1146/annurev-nucl-102115-044826](https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102115-044826).
23. Updated Summation Model: An Improved Agreement with the Daya Bay Antineutrino Fluxes / M. Estienne [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Vol. 123, no. 2. — P. 022502. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.022502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.022502).
24. The essential decay of pandemonium: A demonstration of errors in complex beta-decay schemes / J. Hardy [et al.] // *Physics Letters B.* — 1977. — Vol. 71, no. 2. — P. 307–310. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90223-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90223-4).

25. *Mougeot X.* Reliability of usual assumptions in the calculation of β and ν spectra // Phys. Rev. C. — 2015. — Vol. 91, no. 5. — P. 055504. — DOI: [10.1103/PhysRevC.91.055504](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.91.055504). — [Erratum: Phys.Rev.C 92, 059902 (2015)].
26. Absolute measurement of the beta spectrum from ^{235}U fission as a basis for reactor antineutrino experiments / K. Schreckenbach [et al.] // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 99. — P. 251–256. — DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)91120-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)91120-5).
27. *Von Feilitzsch F., Hahn A. A., Schreckenbach K.* Experimental beta-spectra from ^{239}Pu and ^{235}U thermal neutron fission products and their correlated antineutrino spectra // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 118. — P. 162–166. — DOI: [10.1016/0370-2693\(82\)90622-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90622-0).
28. Determination of the antineutrino spectrum from ^{235}U thermal neutron fission products up to 9.5 MeV / K. Schreckenbach [et al.] // Phys. Lett. B. — 1985. — Vol. 160. — P. 325–330. — DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)91337-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)91337-1).
29. Anti-neutrino Spectra From ^{241}Pu and ^{239}Pu Thermal Neutron Fission Products / A. A. Hahn [et al.] // Phys. Lett. B. — 1989. — Vol. 218. — P. 365–368. — DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)91598-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)91598-0).
30. The double focusing iron-core electron-spectrometer “BILL” for high resolution (n, e) measurements at the high flux reactor in Grenoble / W. Mampe [et al.] // Nuclear Instruments and Methods. — 1978. — Vol. 154, no. 1. — P. 127–149. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-554X\(78\)90671-7](https://doi.org/10.1016/0029-554X(78)90671-7).
31. Reactor Anti-neutrino Spectra and Their Application to Anti-neutrino Induced Reactions. 2. / P. Vogel [et al.] // Phys. Rev. C. — 1981. — Vol. 24. — P. 1543–1553. — DOI: [10.1103/PhysRevC.24.1543](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.24.1543).
32. Experimental Determination of the Antineutrino Spectrum of the Fission Products of ^{238}U / N. Haag [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 112, no. 12. — P. 122501. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.112.122501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.122501).
33. *Vogel P.* Conversion of electron spectrum associated with fission into the antineutrino spectrum // Phys. Rev. C. — 2007. — Vol. 76. — P. 025504. — DOI: [10.1103/PhysRevC.76.025504](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.76.025504).
34. Improved Predictions of Reactor Antineutrino Spectra / T. A. Mueller [et al.] // Phys. Rev. C. — 2011. — Vol. 83. — P. 054615. — DOI: [10.1103/PhysRevC.83.054615](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.83.054615).
35. *Huber P.* On the determination of anti-neutrino spectra from nuclear reactors // Phys. Rev. C. — 2011. — Vol. 84. — P. 024617. — DOI: [10.1103/PhysRevC.84.024617](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.84.024617). — [Erratum: Phys.Rev.C 85, 029901 (2012)].

36. Systematic Uncertainties in the Analysis of the Reactor Neutrino Anomaly / A. C. Hayes [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 112. — P. 202501. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.112.202501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.202501).
37. First-forbidden transitions in the reactor anomaly / L. Hayen [et al.] // Phys. Rev. C. — 2019. — Vol. 100, no. 5. — P. 054323. — DOI: [10.1103/PhysRevC.100.054323](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.100.054323).
38. *Li Y.-.-F., Zhang D.* New Realization of the Conversion Calculation for Reactor Antineutrino Fluxes // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 100, no. 5. — P. 053005. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.053005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.053005).
39. *Копейкин В., Панин Ю., Сабельников А.* Измерение отношения кумулятивных спектров бета-частиц от продуктов деления ^{235}U и ^{239}Pu для решения задач физики реакторных антинейтрино // Ядерная физика. — 2021. — Т. 84. — С. 3–11. — DOI: [10.31857/S0044002721010128](https://doi.org/10.31857/S0044002721010128).
40. Evolution of the Reactor Antineutrino Flux and Spectrum at Daya Bay / F. P. An [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118, no. 25. — P. 251801. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.251801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.251801).
41. Extraction of the ^{235}U and ^{239}Pu Antineutrino Spectra at Daya Bay / D. Adey [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2019. — Vol. 123, no. 11. — P. 111801. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.111801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.111801).
42. Fuel-composition dependent reactor antineutrino yield at RENO / G. Bak [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2019. — Vol. 122, no. 23. — P. 232501. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.122.232501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.232501).
43. Accurate Measurement of the Electron Antineutrino Yield of ^{235}U Fissions from the STEREO Experiment with 119 Days of Reactor-On Data / H. Almazán [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Vol. 125, no. 20. — P. 201801. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.201801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.201801).
44. Reactor antineutrino anomaly in light of recent flux model refinements / C. Giunti [et al.] // Phys. Lett. B. — 2022. — Vol. 829. — P. 137054. — DOI: [10.1016/j.physletb.2022.137054](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137054).
45. *Копейкин В. И., Скорохватов М. Д.* Особенности протекания реакции обратного бета-распада на протоне в потоке антинейтрино ядерного реактора // Ядерная физика. — 2017. — Т. 80. — С. 142–150. — DOI: [10.7868/S0044002717020234](https://doi.org/10.7868/S0044002717020234).
46. *Kopeikin V. I.* Flux and spectrum of reactor antineutrinos // Phys. Atom. Nucl. — 2012. — Vol. 75. — P. 143–152. — DOI: [10.1134/S1063778812020123](https://doi.org/10.1134/S1063778812020123).
47. *Фаянс С.* Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ при низких энергиях // Ядерная физика. — 1985. — Т. 42. — С. 929–940.

48. *Strumia A., Vissani F.* Precise quasielastic neutrino/nucleon cross-section // Phys. Lett. B. — 2003. — Vol. 564. — P. 42–54. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(03\)00616-6](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(03)00616-6).
49. Impact of Fission Neutron Energies on Reactor Antineutrino Spectra / B. R. Littlejohn [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 97, № 7. — С. 073007. — DOI: [10.1103/PhysRevD.97.073007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.073007).
50. *Huber P., Schwetz T.* Precision spectroscopy with reactor anti-neutrinos // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 70. — P. 053011. — DOI: [10.1103/PhysRevD.70.053011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.053011).
51. *Wilkinson D. H.* Evaluation of Beta-Decay II. Finite mass and size effects // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1990. — Vol. 290, no. 2. — P. 509–515. — DOI: [10.1016/0168-9002\(90\)90570-V](https://doi.org/10.1016/0168-9002(90)90570-V).
52. *Elton L. R. B.* A semi-empirical formula for the nuclear radius // Phys. Atom. Nucl. — 1958. — Vol. 5. — P. 173–178.
53. High precision analytical description of the allowed β spectrum shape / L. Hayen [et al.] // Rev. Mod. Phys. — 2018. — Vol. 90, no. 1. — P. 015008. — DOI: [10.1103/RevModPhys.90.015008](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.015008).
54. *Behrens H., Jänecke J.* Numerical Tables for Beta-Decay and Electron Capture. Vol. 4 / ed. by H. Schopper. — Springer, 1969. — (Landolt-Boernstein - Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms). — DOI: [10.1007/b19939](https://doi.org/10.1007/b19939).
55. *Behrens H., Bühring W.* Electron radial wave functions and nuclear beta-decay. — Oxford : Clarendon press, 1982.
56. *Sirlin A.* General Properties of the Electromagnetic Corrections to the Beta Decay of a Physical Nucleon // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 164. — P. 1767–1775. — DOI: [10.1103/PhysRev.164.1767](https://doi.org/10.1103/PhysRev.164.1767).
57. *Sirlin A.* Radiative Correction to the $\bar{\nu}_e(\nu_e)$ Spectrum in β -Decay // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 84. — P. 014021. — DOI: [10.1103/PhysRevD.84.014021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.014021).
58. *Batkin I. S., Sundaresan M. K.* Effect of radiative corrections on the solar neutrino spectrum // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 52. — P. 5362–5365. — DOI: [10.1103/PhysRevD.52.5362](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5362).
59. *Wang X. B., Hayes A. C.* Weak magnetism correction to allowed β decay for reactor antineutrino spectra // Phys. Rev. C. — 2017. — Vol. 95, no. 6. — P. 064313. — DOI: [10.1103/PhysRevC.95.064313](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.95.064313).

60. *Kopeikin V., Skorokhvatov M., Titov O.* Reevaluating reactor antineutrino spectra with new measurements of the ratio between ^{235}U and ^{239}Pu β spectra // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Vol. 104, no. 7. — P. L071301. — DOI: [10.1103/PhysRevD.104.L071301](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.L071301).
61. Re-publication of the data from the BILL magnetic spectrometer: The cumulative β -spectra of the fission products of ^{235}U , ^{239}Pu and ^{241}Pu / N. Haag [et al.]. — 2014.
62. *Štefánik D., Dvornický R., Šimkovic F.* Reactor antineutrino spectra and forbidden beta decays // *AIP Conf. Proc.* / под ред. O. Civitarese, I. Stekl, J. Suhonen. — 2017. — T. 1894, № 1. — C. 020022. — DOI: [10.1063/1.5007647](https://doi.org/10.1063/1.5007647).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица А1. Коэффициенты параметризации поправки $L_0(Z, E)$ для электронов: воспроизведение таблицы 1 работы [51].

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_{-1}	0.115	-1.8123	8.2498	-11.223	-14.854	32.086
a_0	-0.00062	0.007165	0.01841	-0.53736	1.2691	-1.5467
a_1	0.02482	-0.5975	4.84199	-15.3374	23.9774	-12.6534
a_2	-0.14038	3.64953	-38.8143	172.137	-346.708	288.787
a_3	0.008152	-1.15664	49.9663	-273.711	657.629	-603.703
a_4	1.2145	-23.9931	149.972	-471.299	662.191	-305.68
a_5	-1.5632	33.4192	-255.133	938.53	-1641.28	1095.36

Таблица А2. Узлы сеточной функции $N(\tilde{Z})$ для параметризации поправки на экранирование: воспроизведение таблицы 4.7 работы [55].

\tilde{Z}	1	8	13	16	23	27	29	49	84	92
$N(\tilde{Z})$	1.000	1.420	1.484	1.497	1.52	1.544	1.561	1.637	1.838	1.907

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

КУМУЛЯТИВНЫЕ СПЕКТРЫ РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО МОДЕЛИ КИ

Кумулятивные спектры антинейтрино продуктов деления изотопов урана и плутония в единицах $\text{МэВ}^{-1} \text{ дел}^{-1}$. Ошибки даны на уровне достоверности 1σ (68%).

E_ν , МэВ	ρ_ν^{235}	ρ_ν^{238}	ρ_ν^{239}	ρ_ν^{241}
2.00	1.24 ± 0.02	1.53 ± 0.05	1.09 ± 0.03	1.26 ± 0.03
2.25	1.06 ± 0.02	1.35 ± 0.05	$(9.3 \pm 0.3) \times 10^{-1}$	1.08 ± 0.03
2.50	$(8.67 \pm 0.17) \times 10^{-1}$	1.18 ± 0.04	$(7.1 \pm 0.2) \times 10^{-1}$	$(9.0 \pm 0.2) \times 10^{-1}$
2.75	$(7.29 \pm 0.12) \times 10^{-1}$	1.04 ± 0.03	$(6.09 \pm 0.15) \times 10^{-1}$	$(7.68 \pm 0.18) \times 10^{-1}$
3.00	$(6.11 \pm 0.11) \times 10^{-1}$	$(9.0 \pm 0.4) \times 10^{-1}$	$(5.06 \pm 0.13) \times 10^{-1}$	$(6.45 \pm 0.17) \times 10^{-1}$
3.25	$(5.20 \pm 0.09) \times 10^{-1}$	$(7.5 \pm 0.3) \times 10^{-1}$	$(4.09 \pm 0.12) \times 10^{-1}$	$(5.32 \pm 0.15) \times 10^{-1}$
3.50	$(4.31 \pm 0.09) \times 10^{-1}$	$(6.3 \pm 0.3) \times 10^{-1}$	$(3.18 \pm 0.11) \times 10^{-1}$	$(4.37 \pm 0.15) \times 10^{-1}$
3.75	$(3.43 \pm 0.08) \times 10^{-1}$	$(5.1 \pm 0.2) \times 10^{-1}$	$(2.60 \pm 0.10) \times 10^{-1}$	$(3.44 \pm 0.12) \times 10^{-1}$
4.00	$(2.78 \pm 0.06) \times 10^{-1}$	$(4.2 \pm 0.2) \times 10^{-1}$	$(1.97 \pm 0.08) \times 10^{-1}$	$(2.79 \pm 0.09) \times 10^{-1}$
4.25	$(2.19 \pm 0.05) \times 10^{-1}$	$(3.33 \pm 0.14) \times 10^{-1}$	$(1.53 \pm 0.07) \times 10^{-1}$	$(2.19 \pm 0.07) \times 10^{-1}$
4.50	$(1.70 \pm 0.04) \times 10^{-1}$	$(2.64 \pm 0.12) \times 10^{-1}$	$(1.09 \pm 0.05) \times 10^{-1}$	$(1.64 \pm 0.06) \times 10^{-1}$
4.75	$(1.29 \pm 0.04) \times 10^{-1}$	$(2.03 \pm 0.10) \times 10^{-1}$	$(8.2 \pm 0.4) \times 10^{-2}$	$(1.23 \pm 0.05) \times 10^{-1}$
5.00	$(1.04 \pm 0.03) \times 10^{-1}$	$(1.62 \pm 0.08) \times 10^{-1}$	$(5.5 \pm 0.3) \times 10^{-2}$	$(9.6 \pm 0.4) \times 10^{-2}$
5.25	$(8.2 \pm 0.3) \times 10^{-2}$	$(1.26 \pm 0.07) \times 10^{-1}$	$(4.7 \pm 0.2) \times 10^{-2}$	$(7.3 \pm 0.4) \times 10^{-2}$
5.50	$(6.1 \pm 0.2) \times 10^{-2}$	$(9.7 \pm 0.6) \times 10^{-2}$	$(3.5 \pm 0.3) \times 10^{-2}$	$(5.5 \pm 0.3) \times 10^{-2}$
5.75	$(4.81 \pm 0.13) \times 10^{-2}$	$(7.3 \pm 0.5) \times 10^{-2}$	$(2.80 \pm 0.18) \times 10^{-2}$	$(4.0 \pm 0.2) \times 10^{-2}$
6.00	$(3.67 \pm 0.13) \times 10^{-2}$	$(5.3 \pm 0.4) \times 10^{-2}$	$(1.87 \pm 0.19) \times 10^{-2}$	$(2.89 \pm 0.18) \times 10^{-2}$
6.25	$(2.72 \pm 0.08) \times 10^{-2}$	$(3.8 \pm 0.4) \times 10^{-2}$	$(1.23 \pm 0.12) \times 10^{-2}$	$(2.00 \pm 0.13) \times 10^{-2}$
6.50	$(2.04 \pm 0.06) \times 10^{-2}$	$(2.9 \pm 0.4) \times 10^{-2}$	$(8.8 \pm 1.2) \times 10^{-3}$	$(1.44 \pm 0.14) \times 10^{-2}$
6.75	$(1.52 \pm 0.05) \times 10^{-2}$	$(2.6 \pm 0.3) \times 10^{-2}$	$(7.6 \pm 1.3) \times 10^{-3}$	$(1.06 \pm 0.12) \times 10^{-2}$
7.00	$(1.08 \pm 0.04) \times 10^{-2}$	$(2.0 \pm 0.3) \times 10^{-2}$	$(3.9 \pm 0.7) \times 10^{-3}$	$(7.27 \pm 0.9) \times 10^{-3}$
7.25	$(6.7 \pm 0.3) \times 10^{-3}$	$(1.1 \pm 0.2) \times 10^{-2}$	$(2.7 \pm 0.8) \times 10^{-3}$	$(4.2 \pm 0.6) \times 10^{-3}$
7.50	$(4.41 \pm 0.18) \times 10^{-3}$	$(7 \pm 2) \times 10^{-3}$	$(1.6 \pm 0.5) \times 10^{-3}$	$(2.5 \pm 0.4) \times 10^{-3}$
7.75	$(2.76 \pm 0.16) \times 10^{-3}$	$(4.6 \pm 1.4) \times 10^{-3}$	$(4.7 \pm 1.8) \times 10^{-4}$	$(1.4 \pm 0.4) \times 10^{-3}$
8.00	$(1.47 \pm 0.09) \times 10^{-3}$	$(2.9 \pm 0.9) \times 10^{-3}$	$(1.4 \pm 0.5) \times 10^{-4}$	$(7 \pm 3) \times 10^{-4}$