

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 514.83

**ОТЧЕТ**  
**ПО ПРЕДДИПЛОМНОЙ ПРАКТИКЕ ПО ТЕМЕ**  
**О петлевых поправках к действию деформированной**  
**интегрируемой  $O(4)$  сигма-модели**

Студент

\_\_\_\_\_ А. А. Видинеев

Научный руководитель,

доц., к.ф.-м.н., PhD.

\_\_\_\_\_ М. Н. Алфимов

Москва 2021

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Трёхмерная сигма-модель</b>	<b>5</b>
1.1 Основные определения . . . . .	5
1.2 Бета-функция в трёхмерном случае . . . . .	6
1.3 Возмущение метрики при смене схемы . . . . .	8
<b>2 Деформированная <math>O(3)</math> сигма-модель</b>	<b>10</b>
2.1 Однопетлевое RG-уравнение . . . . .	10
2.2 Двухпетлевое RG-уравнение . . . . .	11
<b>3 Деформированная <math>O(4)</math> сигма-модель</b>	<b>14</b>
3.1 Однопетлевое RG-уравнение . . . . .	14
3.2 Двухпетлевое RG-уравнение . . . . .	17
<b>4 Заключение</b>	<b>19</b>
Список используемой литературы . . . . .	19
<b>5 Приложение</b>	<b>21</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Сигма-модель - это теория поля, в которой поле принимает значение в некотором римановом многообразии. Это многообразие может быть произвольным, но чаще всего на нём вводится дополнительная структура, например, структура группы Ли или структура фактора группы Ли по некоторой подгруппе.

Исторически название происходит из статьи Гелл-Манна и Леви, которые представили линейную и нелинейную модель для описания частицы  $\sigma$  - бесспинового мезона, участвующего в бета-распаде вместе с пионами [1].

Примером сигма-модели является  $O(3)$  модель, в которой полевоe многообразие двумерно. В  $O(n)$  моделях полевоe пространство  $n$ -мерно. Модель  $O(n)$  представляет собой эффективную теорию поля, которая связана с нарушением симметрии классической модели Гейзенберга, определенной на квадратной решетке. [2]

В модели  $G/H$  полевоe пространство является фактором группы  $G$  по подгруппе  $H$ . При этом  $G/H$  не обязательно является группой, так как подгруппа  $H$  не обязана быть нормальной. Эти модели применяются в теориях суперсимметрии и супергравитации [3].

Примерами полевых пространств являются  $n$ -мерная сфера  $S^n = SO(n)/SO(n-1)$ , комплексное проективное пространство  $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/SU(n) \times U(1)$ , пространство анти-де Ситтера  $AdS_{d+1} = SO(d,2)/SO(d,1)$ , евклидово пространство анти-де Ситтера  $EAdS_{d+1} = SO(d+1,1)/SO(d+1)$  [4].

Нелинейные сигма-модели сегодня активно применяются в разных областях физики: в физике конденсированного состояния для описания квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3, ферромагнетиков и спиновых цепочек; в теории струн; в физике частиц и в непертурбативной теории поля для описания топологических солитонов.

Например,  $O(3)$ -модель - это отображение из двумерного евклидова пространства в двумерную сферу. Если на бесконечности поле равно нулю,

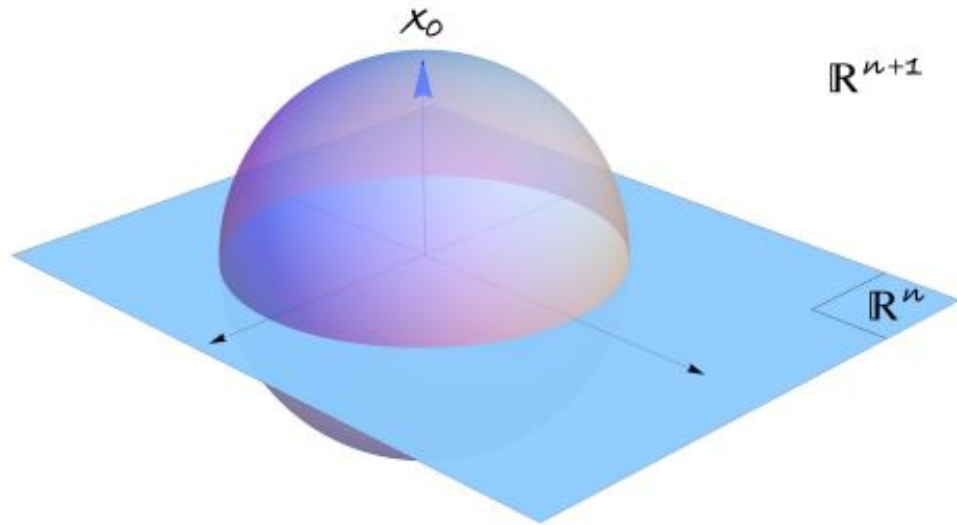


Рисунок 1 — Группа  $SO(n + 1)$  действует на сфере вращениями, подгруппа  $SO(n)$  оставляет неподвижной точку  $x_0$ . Это означает, что  $S^n = SO(n)/SO(n - 1)$

то это отображение пропускается через отображение из сферы (рис. 2). Тем самым, получается отображение из двумерной сферы в двумерную сферу. Такие отображения классифицируются по гомотопическому типу. Как известно,  $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}^2$ . Таким образом, поля  $O(3)$ -модели будут иметь целое топологическое число. Такие поля называются топологическими солитонами. В трёхмерном случае появляется топологическая частица, называемая скирмионом.

В данной работе рассматривается сигма-модель с трёхмерным полевым пространством и деформированная  $O(4)$  сигма-модель, в которой полевое пространство изморфно фактору  $SO(4)/SO(3)$ .

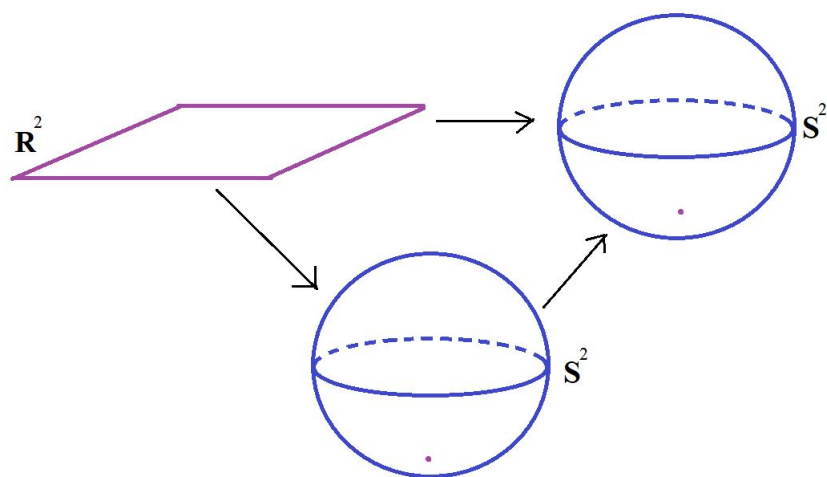


Рисунок 2 — Отображение из плоскости в сферу (поле) пропускается через отображение из сферы в сферу. Такие отображения можно топологически классифицировать

# 1. ТРЁХМЕРНАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ

## 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сигма-модель - это скалярная теория поля, в которой многокомпонентное скалярное поле является отображением пространства-времени на риманово многообразие некоторой размерности. Действие записывается следующим образом:

$$S[\mathbf{X}] = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_a X^i \partial_a X^j d^n \mathbf{x}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{X}$  - набор координат на многообразии, а  $G_{ij}(\mathbf{X})$  - метрический тензор.

Метрический тензор удовлетворяет уравнению ренормгруппы (РГ):

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G) \quad (1.2)$$

Это уравнение связывает ренормгруппу с величиной, которая называется потоком Риччи ( $\dot{G}$ ). Начало исследованию потока Риччи было положено Ричардом Гамильтоном в начале 1980-х. [5] Используя метод потока Риччи, Г. Перельман доказал гипотезу Тёрстона о геометризации. Частным случаем гипотезы Тёрстона была гипотеза Пуанкаре.

Бета-функция  $\beta(G)$  кодирует зависимость параметра связи от масштаба энергии данного физического процесса, описываемого квантовой теорией поля.

$\beta$ -функция раскладывается в ряд по степеням от постоянной Планка  $\hbar$ :

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + \dots \quad (1.3)$$

В MS-схеме перенормировки (схема минимального вычитания) известны выражения для первых слагаемых формулы (1.3) [6]:

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij}, \quad (1.4)$$

$$\beta_{ij}^{(2)}(G) = \frac{1}{2}R_{iklm}R_j^{klm}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(3)}(G) = & \frac{1}{8}\nabla_k R_{ilmn}\nabla^k R_j^{lmn} - \frac{1}{16}\nabla_i R_{klmn}\nabla_j R^{klmn} \\ & - \frac{1}{2}R_{imnk}R_{jpk}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8}R_{iklj}R^{kmnp}R^l{}_{mnp} \end{aligned} \quad (1.6)$$

## 1.2. БЕТА-ФУНКЦИЯ В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В случае, когда многообразие сигма-модели двумерное, тензор Римана выражается через скалярную кривизну и метрику:

$$R_{ijkl} = \frac{R}{2}(G_{ik}G_{jl} - G_{il}G_{jk}) \quad (1.7)$$

Тогда формулы (1.4) - (1.6) упрощаются [7]:

$$\beta_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}RG_{ij} \quad (1.8)$$

$$\beta_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4}R^2G_{ij} \quad (1.9)$$

$$\beta_{ij}^{(3)} = \left( \frac{5}{32}R^3 + \frac{1}{16}(\nabla R)^2 \right) G_{ij} - \frac{1}{16}\nabla_i R \nabla_j R \quad (1.10)$$

Для трёхмерного многообразия формулы также можно переписать:

$$\beta_{ij}^{(1)} = R_{ij} \quad (1.11)$$

$$\beta_{ij}^{(2)} = (R_{kl}R^{kl} - \frac{1}{2}R^2)G_{ij} + R_{ij}R - R_i{}^k R_{jk} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}^{(3)} = & \left[ \frac{3}{4} R_k^m R^{kl} R_{lm} - \frac{7}{8} R_{kl} R^{kl} R + \frac{1}{4} R^3 \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} (\nabla_k R) (\nabla^k R) + \frac{1}{4} (\nabla_m R_{kl}) (\nabla^m R^{kl}) \right] G_{ij} \\
& + \left( \frac{5}{2} R_{ij} R_{kl} R^{kl} - \frac{11}{8} R_{ij} R^2 + \frac{1}{4} (\nabla_k R_{ij}) (\nabla^k R) \right) \\
& + \left( -3 R_i^k R_j^l R_{kl} + \frac{19}{8} R_i^k R_{jk} R - \frac{1}{4} (\nabla_l R_{jk}) (\nabla^l R_i^k) \right) \\
& + \left( -\frac{1}{4} (\nabla_i R^{kl}) (\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16} (\nabla_i R) (\nabla_j R) \right)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Метрике  $G_{ij}$  приписывается размерная характеристика  $\hbar^{-1}$ . Тогда метрика с верхними индексами будет иметь размерность  $\hbar$ , ковариантная производная  $\nabla_i$  и тензор Риччи имеют нулевую размерность  $\hbar^0$ . Скалярная кривизна, являясь свёрткой метрики с верхними индексами и тензора Риччи с нижними, будет иметь размерность 1.

Из формул (1.8 - 1.13) видно, что в разложении  $\beta_{ij}^{(L)}$  участвуют тензоры с размерностью  $\hbar^{L-1}$ . То есть  $\beta$  - функция представляет из себя ряд,  $L$ -ый член которого - линейная комбинация тензоров размерности  $\hbar^{L-1}$ .

Все такие тензоры можно перечислить. Для этого заметим, что любой тензор можно представить в виде слова, записанного в алфавите из трёх букв  $\{G, R, \nabla\}$ , причём буквы снабжены индексами так, что после выполнения всех свёрток получается тензор с нижними индексами  $ij$ . Обратим внимание, что свёртка происходит между верхним и нижним индексом.

**Наблюдение.** Пусть имеется тензор, состоящий из  $N_R$  букв  $R$  и  $N_\nabla$  букв  $\nabla$ . Тогда его размерная характеристика равна  $N_R + \frac{N_\nabla}{2} - 1$ .

Достаточно доказать для случая, когда тензор не содержит скалярных  $R$  и  $\nabla^2$ . Пусть  $\mu$  - число нижних индексов в тензоре. Тогда имеется  $\mu - 2$  верхних индексов. Свёртка по двум индексам даёт одну степень  $\hbar$ . Таким образом, размерность тензора равна  $\mu - 2$ . Но  $2\mu - 4 = 2N_R + N_\nabla$ .

Теперь выпишем наборы  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  тензоров размерности 0 и 1. Число тензорных структур размерности 2 слишком велико, поэтому они перечислены в Приложении. Возможно, что некоторые из приведённых в Приложении тензорных структур являются линейно зависимыми или независимыми по модулю соотношений дифференциальной геометрии (тождества Бьян-



ки, диффеоморфизмы).

$$\tau_1 = \{R_{ij}, RG_{ij}\} \quad (1.14)$$

$$\tau_2 = \{G_{ij}R^2, G_{ij}R_{kl}R^{kl}, G_{ij}\nabla^2 R, G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl}; \\ R_{ij}R, \nabla^2 R_{ij}; R_{il}R_j^l; \nabla_i\nabla_j R; \nabla_i\nabla^k R_{jk}, \nabla^k\nabla_i R_{jk}\} \quad (1.15)$$

### 1.3. ВОЗМУЩЕНИЕ МЕТРИКИ ПРИ СМЕНЕ СХЕМЫ

Теперь надо выяснить, как изменяется  $\beta$ -функция при переопределении метрики. Изначально  $\beta$ -функция задаётся равенствами (1.11) - (1.13) и соответствует некоторой метрике  $C_{ij}$ . Пусть теперь метрика преобразуется произвольным образом по формуле

$$\tilde{G}_{ij} = G_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} G_{ij}^{(k)}, \quad (1.16)$$

где  $G_{ij}^{(k)}$  - произвольная линейная комбинация базисных тензорных структур с размерной характеристикой  $\hbar^k$ .

Из (1.14) и (1.15) получаем:

$$G_{ij}^{(0)} = c_1 R_{ij} + c_2 RG_{ij}, \quad (1.17)$$

$$G_{ij}^{(1)} = (c_3 R^2 + c_4 R_{kl}R^{kl} + c_5 \nabla^2 R + c_6 \nabla^k \nabla^l R_{kl})G_{ij} + c_7 R_{ij}R \\ + c_8 \nabla^2 R_{ij} + c_9 R_{il}R_j^l + c_{10} \nabla_i \nabla_j R + c_{11} \nabla_i \nabla^k R_{jk} + c_{12} \nabla^k \nabla_i R_{jk}. \quad (1.18)$$

Вид  $\beta$ -функции в изменённой метрике можно найти из RG-уравнения.

$$\dot{\tilde{G}}_{ij} = -\tilde{\beta}_{ij}(\tilde{G}_{mn}). \quad (1.19)$$

Получаем следующие выражения:

$$\tilde{\beta}_{ij}^{(1)} = R_{ij}, \quad (1.20)$$

То есть  $\beta^1$  инвариантна относительно смены схемы перенормировки.

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ij}^{(2)} = & -R_i^k R_{jk} + (1 + c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1 - c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 \\ & - \frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2G_{ij}\nabla_k\nabla^k R - c_2G_{ij}R^{kl}{}_{;k;l}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

## 2. ДЕФОРМИРОВАННАЯ O(3) СИГМА-МОДЕЛЬ

Метрика деформированной O(3) сигма модели задаётся формулой

$$ds^2 = (h - 1 + \kappa^2) \left( \frac{dr^2}{(1 - r^2)(1 + \kappa^2 r^2)} + \left( \frac{1 + \kappa^2 r^2}{1 - r^2} + \frac{2\kappa^2}{h} \right)^{-1} d\phi^2 \right). \quad (2.1)$$

Необходимо проверить, что эта метрика удовлетворяет уравнению ре-  
нормгруппы.

### 2.1. ОДНОПЕТЛЕВОЕ RG-УРАВНЕНИЕ

Разложим (2.1) в ряд по параметру  $\frac{1}{h}$ . В однопетлевом случае учиты-  
ваются только члены, пропорциональные  $h$ . То есть метрика имеет вид

$$ds^2 = h \left[ \frac{dr^2}{(1 - r^2)(1 + \kappa^2 r^2)} + \frac{1 - r^2}{1 + \kappa^2 r^2} d\phi^2 \right]. \quad (2.2)$$

Метрический тензор должен удовлетворять однопетлевому RG-уравнению:

$$\dot{G}_{ij} = \beta_{ij}^{(1)} = R_{ij}. \quad (2.3)$$

Производная метрики имеет следующий вид (от времени зависят толь-  
ко параметры  $h$  и  $\kappa$ )

$$\dot{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{h}(1 + \kappa^2 r^2) - 2hr^2 \kappa \dot{\kappa}}{(1 - r^2)(1 + \kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{h}(1 + \kappa^2 r^2)(1 - r^2) - 2hr^2 \kappa \dot{\kappa}(1 - r^2)}{(1 + \kappa^2 r^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Находим тензор Риччи:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{(1+\kappa^2)(-1+\kappa^2 r^2)}{(-1+r^2)(1+\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(1+\kappa^2)(-1+r^2)(-1+\kappa^2 r^2)}{(1+\kappa^2 r^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Подставляя найденные тензоры в RG-уравнение, получаем единственное уравнение:

$$\dot{h}(1 + \kappa^2 r^2) - 2h\kappa\dot{\kappa}r^2 = (1 + \kappa^2)(1 - \kappa^2 r^2). \quad (2.6)$$

Это уравнение обращается в верное тождество при

$$\dot{h} = 1 + \kappa^2, \quad (2.7)$$

$$\dot{\kappa} = \frac{\kappa + \kappa^3}{h}. \quad (2.8)$$

Таким образом, выполнена проверка для однопетлевого случая.

## 2.2. ДВУХПЕТЛЕВОЕ RG-УРАВНЕНИЕ

В двухпетлевом случае в метрике учитываются члены до порядка  $h^0$ . Метрический тензор тогда имеет вид

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-1+h+\kappa^2}{(1-r^2)(1+\kappa^2 r^2)} & 0 \\ 0 & \frac{-1+h+\kappa^2 - \frac{2\kappa^2(1-r^2)}{1+\kappa^2 r^2}}{1+\kappa^2 r^2} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Эта метрика удовлетворяет RG-уравнению вида

$$\dot{G}_{ij} = \beta_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad (2.10)$$

где  $v_i$  - ненулевое касательное векторное поле на сфере.

Бета-функция в данном случае не зависит от схемы и имеет вид

$$\beta_{ij} = \left( \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R^2 \right) G_{ij}. \quad (2.11)$$

Векторное поле задаётся формулой

$$v_i = \left( \frac{2\kappa^2(1 + \kappa^2)r}{h(1 + \kappa^2 r^2)^2}, 0 \right). \quad (2.12)$$

Ещё необходимо наложить условия на  $\dot{h}$  и  $\dot{\kappa}$ , которые возникают при нахождении производной метрики. Они равны следующим выражениям

$$\dot{h} = (1 + \kappa^2) \left( 1 + \frac{1 - \kappa^2}{h} \right), \quad (2.13)$$

$$\dot{\kappa} = \frac{\kappa}{h} \dot{h}. \quad (2.14)$$

Подставив в выражение для производной метрики значения  $\dot{h}$  и  $\dot{\kappa}$  и разложив полученные функции по степеням  $\frac{1}{h}$  с точностью до первого порядка, получим матрицу со следующими диагональными элементами:

$$\begin{aligned} \dot{G}_{11} &= \frac{(1 + \kappa^2)(-1 + \kappa^2 r^2)}{(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2 r^2)^2} - \frac{(1 + \kappa^2)^2}{(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2 r^2)h}; \\ \dot{G}_{22} &= \frac{(1 + \kappa^2)(-1 + r^2)(-1 + \kappa^4 r^4)}{(1 + \kappa^2)^3} - \\ &= \frac{(1 + \kappa^2)(-1 + r^2)(1 - 3\kappa^2 + 6\kappa^2 r^2 + 6\kappa^4 r^2 - 3\kappa^4 r^4 + \kappa^6 r^4)}{(1 + \kappa^2)^3 h}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для бета-функции получаются следующие диагональные элементы

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{(1 + \kappa^2)(-1 + \kappa^2 r^2)}{(-1 + r^2)(1 + \kappa^2 r^2)^2} - \\ &= \frac{(1 + \kappa^2)(1 - \kappa^2 + 6\kappa^2 r^2 + 6\kappa^4 r^2 - \kappa^4 r^4 + \kappa^6 r^4)}{(-1 + r^2)(1 + \kappa^2 r^2)^3 h} \\ \beta_{22} &= \frac{(1 + \kappa^2)(-1 + \kappa^2 r^2)(-1 + r^2)}{(1 + \kappa^2 r^2)^2} - \\ &= \frac{(1 + \kappa^2)(-1 + r^2)(1 - 3\kappa^2 + 8\kappa^2 r^2 + 8\kappa^4 r^2 - 3\kappa^4 r^4 + \kappa^6 r^4)}{(1 + \kappa^2 r^2)^3 h} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Наконец ковариантная производная касательного векторного поля (симметризованная по двум индексам) пропорциональна  $\frac{1}{h}$  и равна

$$\nabla_{(i} v_{j)} = \begin{pmatrix} -\frac{2(\kappa^2(1+\kappa^2)(1-2(1+\kappa^2)r^2+\kappa^2r^4))}{((-1+r^2)(1+\kappa^2r^2)^3)h} & 0 \\ 0 & \frac{2\kappa^2(1+\kappa^2)^2r^2(-1+r^2)}{(1+\kappa^2r^2)^3h} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение ренормгруппы, получаем верное тождество с точностью до членов порядка большего, чем  $\frac{1}{h}$ . Тем самым, исходная метрика удовлетворяет уравнению ренормгруппы с ненулевым векторным полем как в первом, так и во втором порядке.

## 3. ДЕФОРМИРОВАННАЯ O(4) СИГМА-МОДЕЛЬ

Какая метрика удовлетворяет уравнению ренормгруппы?

Имеется гипотеза, что искомая метрика даётся выражением похожим на метрику в двумерном случае (метрика сосиски). [8]:

$$ds^2 = (h - 1 - \kappa^2) \left( \frac{dr^2}{(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2)} + \left( \frac{1 - \kappa^2 r^2}{1 - r^2} - \frac{2\kappa^2}{h} \right)^{-1} d\phi_1^2 + r^2 d\phi_2^2 \right). \quad (3.1)$$

Разложим теперь это выражение по степеням  $\frac{1}{h}$ .

$$ds^2 = \frac{h dr^2}{(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2)} \left( 1 - \frac{1 + \kappa^2}{h} \right) + \frac{h(1 - r^2)}{1 - \kappa^2 r^2} \left( 1 - \frac{1 + \kappa^2}{h} + \frac{2\kappa^2}{h} \frac{1 - r^2}{1 + \kappa^2 r^2} + \dots \right) d\phi_1^2 + hr^2 \left( 1 - \frac{1 + \kappa^2}{h} \right) d\phi_2^2. \quad (3.2)$$

### 3.1. ОДНОПЕТЛЕВОЕ RG-УРАВНЕНИЕ

Члены, пропорциональные первой степени  $h$  должны удовлетворять однопетлевому уравнению ренормгруппы

$$\dot{G}_{ij} = -\beta_{ij}^{(1)} = -R_{ij}. \quad (3.3)$$

Выпишем эти члены:

$$ds^2 = h \left[ \frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} d\phi_1^2 + r^2 d\phi_2^2 \right]. \quad (3.4)$$

Производная метрики в однопетлевом приближении имеет следующий вид (от времени зависят только параметры  $h$  и  $\kappa$ )

$$\dot{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{h}(1-\kappa^2 r^2) + 2hr^2 \kappa \dot{\kappa}}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{h}(1-\kappa^2 r^2)(1-r^2) + 2hr^2 \kappa \dot{\kappa}(1-r^2)}{(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}r^2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Теперь можно найти выражение для тензора Риччи

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-2+2\kappa^2 r^2 - 2\kappa^4 r^2(-1+r^2)}{(-1+r^2)(-1+\kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(-1+\kappa^2)(-1+r^2)}{(-1+\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 - 2\kappa^2 r^4 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Скалярная кривизна равна

$$R = \frac{2(-3 + \kappa^2(1 + 3r^2) + \kappa^4(r^2 - 2r^4))}{h(-1 + \kappa^2 r^2)}. \quad (3.7)$$

Уравнение  $\dot{G}_{ij} = -R_{ij}$  тогда приводит, в частности, к равенству

$$\dot{h} = 2 - 2\kappa^2 r^2, \quad (3.8)$$

которое означает что равенство  $\dot{G}_{ij} = -R_{ij}$  нельзя удовлетворить простым наложением условий на размерные параметры  $h$  и  $\kappa$ . Это означает, что надо рассматривать более общее уравнение  $\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G)$  с ненулевым векторным полем  $V$ .

Это уравнение эквивалентно можно записать при помощи потенциала векторного поля:



$$R_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j \Psi = -\dot{G}_{ij}. \quad (3.9)$$

Таким образом, нужно найти функцию  $\Psi$ . Оказывается, что подходит следующая функция:

$$\Psi = \frac{1}{2} \log(1 - \kappa^2 r^2). \quad (3.10)$$

В этом случае имеем:

$$2\nabla_i \nabla_j \Psi = \begin{pmatrix} \frac{2\kappa^2(1-2r^2+\kappa^2 r^4)}{(-1+r^2)(-1+\kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\kappa^2(-1+\kappa^2)r^2(-1+r^2)}{(-1+\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa^2 r^2(-1+r^2) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$2\nabla_i \nabla_j \Psi + R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2(-1+\kappa^2)(1+\kappa^2 r^2)}{(-1+r^2)(-1+\kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(-1+\kappa^2)(-1+r^2)(1+\kappa^2 r^2)}{(-1+\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2(-1+\kappa^2)r^2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Приравнивая последнюю матрицу к  $-\dot{G}_{ij}$ , получаем следующие два уравнения

$$2(-1+\kappa^2)(1+\kappa^2 r^2) = \dot{h}(1-\kappa^2 r^2) + 2hr^2\kappa\dot{\kappa}, \quad (3.13)$$

$$2(-1+\kappa^2)r^2 = \dot{h}r^2. \quad (3.14)$$

Эти уравнения обращаются в верные тождества при

$$\dot{h} = -2 + 2\kappa^2, \quad (3.15)$$

$$\dot{\kappa} = \frac{-2\kappa + 2\kappa^3}{h}. \quad (3.16)$$

Таким образом, исходная метрика в первом порядке удовлетворяет уравнению ренорм-группы с ненулевым векторным полем.

## 3.2. ДВУХПЕТЛЕВОЕ RG-УРАВНЕНИЕ

Теперь надо выяснить, удовлетворяет ли метрика (3.1) двухпетлевому уравнению ренормгруппы.

В этом случае бета-функция в общем виде (в произвольной схеме перенормировки) зависит от единственной неопределённой константы  $c_2$  и имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \beta_{ij} = & R_{ij} - R_i^k R_{jk} + (1 + c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1 - c_2)R_{ij}R - \\ & \frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2G_{ij}\nabla_k\nabla^k R - c_2G_{ij}R^{kl}{}_{;k;l}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

$\dot{h}$  и  $\dot{\kappa}$ , возникающие при дифференцировании метрики по времени должны совпадать с выражениями (3.15) и (3.16) в нулевом порядке. По аналогии с (2.13) и (2.14) запишем их так:

$$\dot{h} = -2(1 - \kappa^2) \left( 1 + \frac{1 + \kappa^2}{h} \right), \quad (3.18)$$

$$\dot{\kappa} = -2\frac{\kappa}{h}(1 - \kappa^2) \left( 1 + \frac{1 + \kappa^2}{h} \right). \quad (3.19)$$

Векторное поле  $v$ , удовлетворяющее RG-уравнению ищем в виде  $\left(-\frac{2\kappa^2 r}{1-\kappa^2 r^2} + \frac{v}{h}, 0, 0\right)$ , где  $-\frac{2\kappa^2 r}{1-\kappa^2 r^2}$  - векторное поле, получающееся из потенциала (3.10), а  $\frac{v}{h}$  - некоторая добавка, пропорциональная  $\frac{1}{h}$ .

Из уравнения ренормгруппы следует, что ковариантная производная векторного поля равна сумме производной метрического тензора по времени и бета-функции. С другой стороны, 2-я и 3-я компоненты ковариантной производной должны выражаться через соответствующие символы Кристоффеля:

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{r(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2)}{-1 + r^2\kappa^2} - \frac{4(r(-1 + r^2)^2\kappa^2(-1 + \kappa^2))}{(-1 + r^2\kappa^2)h}, \quad (3.20)$$

$$\Gamma^1_{33} = -r(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2 r^2). \quad (3.21)$$

Тогда получаем два уравнения:

$$\dot{G}_{22} + \beta_{22} = \Gamma^1_{22} \left( -\frac{2\kappa^2 r}{1 - \kappa^2 r^2} + \frac{v}{h} \right), \quad (3.22)$$

$$\dot{G}_{33} + \beta_{33} = \Gamma^1_{33} \left( -\frac{2\kappa^2 r}{1 - \kappa^2 r^2} + \frac{v}{h} \right), \quad (3.23)$$

Решая первое уравнение находим значение  $\frac{v_1}{h}$ . Второе уравнение даёт другое значение  $\frac{v_2}{h}$ . Оказывается, что эти значения различны для любого  $c_2$ . Тем самым, приведённая метрика не удовлетворяет двухпетлевому уравнению ренорм-группы. При  $c_2 = 0$ , например, разность равна  $\frac{4\kappa^2 r}{h}$ .

Оказывается, что даже для более общего выбора выражений  $\dot{h}$  и  $\dot{\kappa}$ :

$$\dot{h} = -2(1 - \kappa^2) \left( 1 + \frac{a_1 + a_2 \kappa^2}{h} \right), \quad (3.24)$$

$$\dot{\kappa} = -2\frac{\kappa}{h}(1 - \kappa^2) \left( 1 + \frac{a_3 + a_4 \kappa^2}{h} \right), \quad (3.25)$$

где  $a_i$  - произвольные константы, разность для  $\frac{v}{h}$  будет ненулевой.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассматривали нелинейную сигма-модель с трёхмерным полевым пространством. Для этой модели были вычислены первые члены разложения  $\beta$ -функции в схеме минимального вычитания. Также были перечислены всевозможные тензорные структуры небольшой размерности. Их оказалось много больше, чем в двумерном случае. Это связано с тем, что в двумерном случае, в отличие от трёхмерного, тензор Риччи пропорционален скалярной кривизне. Возможно, что использование соотношений дифференциальной геометрии позволяет сократить число этих структур.

После было получено выражение для первых членов  $\beta$ -функции в изменённой схеме перенормировки. Смена схемы перенормировки приводит к изменению метрики полевого пространства на произвольную линейную комбинацию тензорных структур данной размерности.

В последнем разделе было показано, что метрика деформированной сферы (аналог двумерной "sausage metric") удовлетворяет уравнению ренормгруппы для трёхмерного полевого пространства с ненулевым векторным полем. Это векторное поле было найдено. Оказалось, что оно потенциально, то есть является ковариантной производной функции потенциала.

Однако, как показали вычисления, "метрика сосиски" не удовлетворяет двухпетловому уравнению ренормгруппы. Это означает, что выражение для метрики должно претерпеть некоторые изменения.

# ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gell-Mann, M.; Lévy, M. (1960), "The axial vector current in beta decay II  
Nuovo Cimento, Italian Physical Society, 16 (4): 705–726
- [2] Lindstrom, Ulf, Uses of Sigma Models, 2018/03/23
- [3] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, Supergravity. Cambridge Univ. Press,  
Cambridge, UK, 2012.
- [4] Konstantin Zarembo, Integrability in sigma-models, Integrability: From  
Statistical Systems to Gauge Theory, 2019.
- [5] B. Chow, D. Knopf The Ricci Flow: an introduction. Mathematical Surveys  
and Monographs 110, American Mathematical Society, Providence, RI,  
(2004).
- [6] D.H. Friedan, Nonlinear models in  $2 + q$  dimensions, Annals Phys. 163  
(1985) 318.
- [7] Mikhail Alfimov and Alexey Vad. Litvinov, On loop corrections to integrable  
2D sigma model backgrounds, Journal of High Energy Physics, 2022, (2022)
- [8] Ben Hoare, Nat Levine & Arkady A.Tseytlin, Integrable sigma models and  
2-loop RG flow, Journal of High Energy Physics volume 2019

## 5. ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\begin{aligned}
\tau_3 = \{ & G_{ij}R^3, G_{ij}RR_{kl}R^{kl}, G_{ij}R_{kl}R^k{}_pR^p{}_l, G_{ij}R\nabla^2R, G_{ij}(\nabla_lR)(\nabla^lR), \\
& G_{ij}R_{lm}\nabla^l\nabla^mR, G_{ij}(\nabla^lR_{lm})(\nabla^mR), G_{ij}R\nabla^l\nabla^mR_{lm}, G_{ij}(\nabla^lR)(\nabla^mR_{lm}), \\
& G_{ij}R^{lm}\nabla^2R_{lm}, G_{ij}(\nabla^pR^{lm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}R^{pm}\nabla^l\nabla_pR_{lm}, G_{ij}R^{pm}\nabla_p\nabla^lR_{lm}, \\
& G_{ij}\nabla_pR^{pm}\nabla^lR_{lm}, G_{ij}\nabla^lR^{pm}\nabla_pR_{lm}, G_{ij}\nabla^l\nabla^m\nabla_l\nabla_mR, G_{ij}\nabla_l\nabla^2\nabla^lR, \\
& G_{ij}\nabla^2\nabla^2R, G_{ij}\nabla^2\nabla^m\nabla^lR_{lm}, G_{ij}\nabla_p\nabla^m\nabla^p\nabla^lR_{lm}, G_{ij}\nabla^m\nabla^2\nabla^lR_{lm}, \\
& G_{ij}\nabla_p\nabla^m\nabla^l\nabla^pR_{lm}, G_{ij}\nabla^m\nabla_p\nabla^l\nabla^pR_{lm}, G_{ij}\nabla^m\nabla^l\nabla^2R_{lm} \\
& R_{ij}R^2, R_{ij}R_{lm}R^{lm}, R_{ij}\nabla^2R, (\nabla^kR_{ij})(\nabla_kR), R\nabla^2R_{ij}, (\nabla^kR)(\nabla_kR_{ij}), \\
& R_{ij}\nabla^k\nabla^lR_{kl}, (\nabla^kR_{ij})(\nabla^lR_{kl}), R_{kl}\nabla^k\nabla^lR_{ij}, (\nabla^kR_{kl})(\nabla^lR_{ij}), \\
& \nabla^l\nabla^m\nabla_l\nabla_mR_{ij}, \nabla^m\nabla^2\nabla_mR_{ij}, \nabla^2\nabla^2R_{ij} \\
& R_{ik}R_j{}^kR, R_{ik}\nabla^2R_j{}^k, \nabla^pR_{ik}\nabla_pR_j{}^k, (\nabla^2R_{ik})R_j{}^k, R_{ik}R_{jl}R^{kl}, R_{ik}\nabla^k\nabla^lR_{jl}, \\
& R_{ik}\nabla^l\nabla^kR_{jl}, \nabla^lR_{ik}\nabla^kR_{jl}, \nabla^kR_{ik}\nabla^lR_{jl}, (\nabla^l\nabla^kR_{ik})R_{jl}, (\nabla^k\nabla^lR_{ik})R_{jl} \\
& \nabla_i\nabla_jR^2, \nabla_iR\nabla_jR, R\nabla_i\nabla_jR, \nabla_i\nabla_jR_{kl}R^{kl}, \nabla_iR_{kl}\nabla_jR^{kl}, R_{kl}\nabla_i\nabla_jR^{kl}, \\
& \nabla_i\nabla_j\nabla^2R, \nabla_i\nabla^2\nabla_jR, \nabla^2\nabla_i\nabla_jR, \nabla_i\nabla_p\nabla_j\nabla^pR, \nabla_p\nabla_i\nabla^p\nabla_jR, \nabla_p\nabla_i\nabla_j\nabla^pR, \\
& \nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla^lR_{kl}, \nabla_i\nabla^k\nabla^l\nabla_jR_{kl}, \nabla^k\nabla^l\nabla_i\nabla_jR_{kl}, \nabla_i\nabla^k\nabla_j\nabla^lR_{kl}, \\
& \nabla^k\nabla_i\nabla^l\nabla_jR_{kl}, \nabla^k\nabla_i\nabla_j\nabla^lR_{kl} \\
& (\nabla_iR_{jk})(\nabla^kR), (\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla^k\nabla_iR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}), (\nabla^kR)(\nabla_iR_{jk}), \\
& (\nabla_i\nabla^kR)R_{jk}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}), (\nabla_i\nabla_pR_{jk})R^{kp}, (\nabla_p\nabla_iR_{jk})R^{kp}, \nabla_iR^{kp}(\nabla_pR_{jk}), \\
& (\nabla_i\nabla_pR^{kp})R_{jk}, (\nabla_p\nabla_iR^{kp})R_{jk}, (\nabla_pR^{kp})(\nabla_iR_{jk}), R^{kp}\nabla_i\nabla_pR_{jk}, R^{kp}\nabla_p\nabla_iR_{jk} \\
& \nabla^2\nabla_i\nabla_kR_{jk}, \nabla_i\nabla^2\nabla_kR_{jk}, \nabla_i\nabla_k\nabla^2R_{jk}, \nabla_i\nabla_p\nabla_k\nabla^pR_{jk}, \nabla_p\nabla_i\nabla^p\nabla_kR_{jk}, \\
& \nabla_p\nabla_i\nabla_k\nabla^pR_{jk}, \nabla^2\nabla_k\nabla_iR_{jk}, \nabla_k\nabla^2\nabla_iR_{jk}, \nabla_k\nabla_i\nabla^2R_{jk}, \nabla_k\nabla_p\nabla_i\nabla^pR_{jk}, \\
& \nabla_p\nabla_k\nabla^p\nabla_iR_{jk}, \nabla_p\nabla_k\nabla_i\nabla^pR_{jk} \\
& R_{ik}(\nabla_j\nabla_kR), R_{ik}(\nabla_k\nabla_jR), (\nabla_kR_{ik})(\nabla_jR), \\
& R_{ik}\nabla_j\nabla_lR^{kl}, R_{ik}\nabla_l\nabla_jR^{kl}, (\nabla_lR_{ik})(\nabla_jR^{kl}) \}
\end{aligned} \tag{5.1}$$