«О петлевых поправках к действию деформированной интегрируемой O(4) сигма-модели»

Руководитель НИРС: к. ф-м.н. М. Н. Алфимов
Студент: А. А. Видинеев

Цель работы

- Исследовать нелинейную сигма-модель для случая трёхмерного пространства полей
- Понять, как меняется бета-функция при замене схемы перенормировки
- Найти первую квантовую поправку к метрике деформированной O(4)-модели

Мотивация

- Нелинейные сигма модели применяются в различных областях физики конденсированного состояния, в частности, при описании квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3, спиновых цепочек.
- В непертурбативной теории поля для описания топологических солитонов (например, модель Скирма).
- В теории струн.

Сигма-модель

$$S[\mathbf{X}] = \frac{1}{4\pi}\int G_{ij}(\mathbf{X})\partial_a X^i \partial_a X^j d^n\mathbf{x}$$

Общее выражение для действия сигма-модели

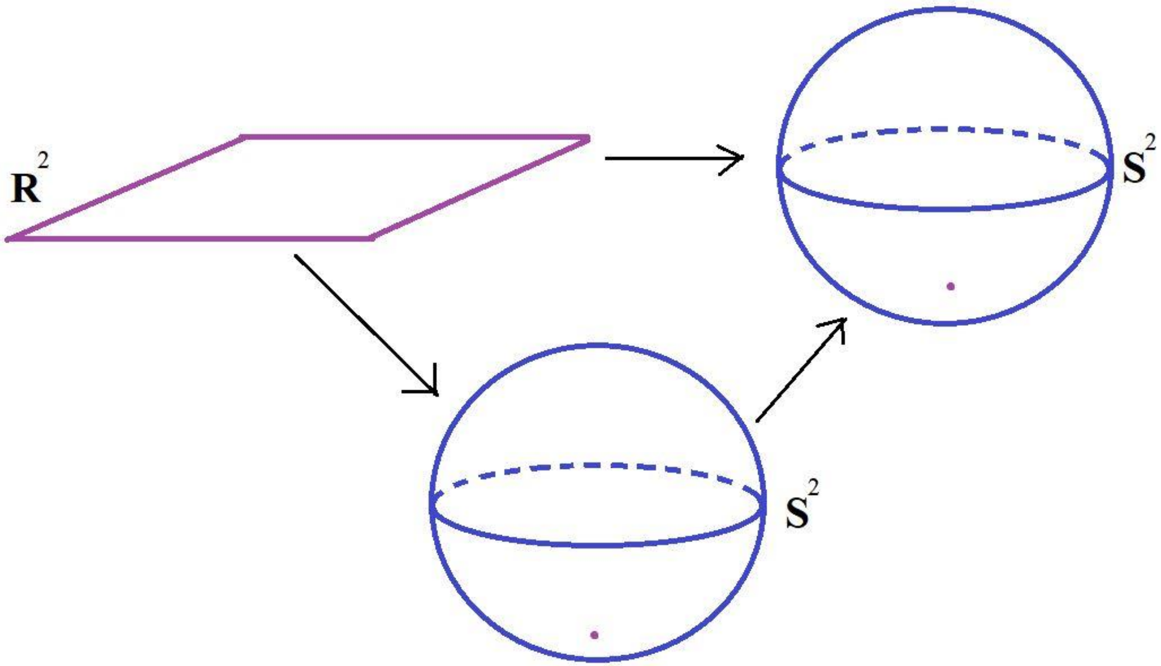
$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G)$$

Уравнение ренормгруппы (РГ) связывает ренормгруппу и поток Риччи

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + \ldots$$

β-функция раскладывается в ряд по степеням от постоянной Планка $\hbar$

Пример: O(3)-модель



Сигма-модель O(3) – это поле со значением на сфере, то есть функция на евклидовом пространстве со значениями в сфере. Евклидово пространство можно замкнуть в сферу, тогда получается отображение из сферы в сферу. Но такие отображения топологически классифицируются. В результате получаются поля с ненулевыми топологическими числами – солитоны. Примером является скирмион.

Бета-функция

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij}$$

$$\beta_{ij}^{(2)}(G) = \frac{1}{2} R_{iklm} R_j{}^{klm}$$

$$\beta_{ij}^{(3)}(G) = \frac{1}{8} \nabla_k R_{ilmn} \nabla^k R_j{}^{lmn} - \frac{1}{16} \nabla_i R_{klmn} \nabla_j R^{klmn} - \frac{1}{2} R_{imnk} R_{jpq}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8} R_{iklj} R^{kmnp} R^l{}_{mnp}$$

В MS-схеме перенормировки (схема минимального вычитания) известны выражения для первых слагаемых бета-функции

В трёхмерном случае эти выражения можно переписать при помощи тензора Риччи

Тензорные структуры

- Метрике G_{ij} приписывается размерная характеристика $\hbar^{-1}$. Тогда метрика с верхними индексами будет иметь размерность $\hbar$, ковариантная производная ∇_i и тензор Риччи имеют нулевую размерность $\hbar^0$. Скалярная кривизна будет иметь размерность 1.
- β - функция представляет из себя ряд, L-ый член которого - линейная комбинация тензоров размерности $\hbar^{L-1}$.
- Все такие тензоры записываются в алфавите в {G, R, ∇}.
- Наблюдение. Пусть имеется тензор, состоящий из N_R букв R и N_∇ букв ∇. Тогда его размерная характеристика равна $N_R + \frac{N_\nabla}{2} - 1.$

Смена схемы перенормировки

$$G^{(0)}_{ij} = c_1 R_{ij} + c_2 R G_{ij}$$

$$G^{(1)}_{ij} = (c_3 R^2 + c_4 R_{kl} R^{kl} + c_5 \nabla^2 R + c_6 \nabla^k \nabla^l R_{kl}) G_{ij} + c_7 R_{ij} R$$
$$+ c_8 \nabla^2 R_{ij} + c_9 R_{il} R_j{}^l + c_{10} \nabla_i \nabla_j R + c_{11} \nabla_i \nabla^k R_{jk} + c_{12} \nabla^k \nabla_i R_{jk}$$

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + \sum_{k=0} G^{(k)}_{ij}$$

$$\dot{\widetilde{G}}_{ij} = -\widetilde{\beta}_{ij}(\widetilde{G}_{mn})$$

$$\widetilde{\beta}^{(1)}_{ij} = R_{ij}$$

$$\widetilde{\beta}^{(2)}_{ij} = -R_i{}^k R_{jk} + (1 + c_2) G_{ij} R_{kl} R^{kl} + (1 - c_2) R_{ij} R - \frac{1}{2} G_{ij} R^2$$
$$- \frac{1}{2} c_2 \nabla_j \nabla_i R + \frac{1}{2} c_2 G_{ij} \nabla_k \nabla^k R - c_2 G_{ij} R^{kl}{}_{;k;l}$$

Смена схемы перенормировки приводит к смене метрики в пространстве полей

В новой схеме можно вычислить первые члены бета-функции

Уравнение ренормгруппы

Гипотетическая метрика, удовлетворяющая уравнению ренормгруппы

$$ds^2 = (h - 1 - \kappa^2)\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \left(\frac{1-\kappa^2 r^2}{1-r^2} - \frac{2\kappa^2}{h}\right)^{-1} d{\phi_1}^2 + r^2 d{\phi_2}^2\right)$$

$$ds^2 = h\left[\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} d{\phi_1}^2 + r^2 d{\phi_2}^2\right]$$

Часть метрики, пропорциональная h, должна удовлетворять однопетлевому РГ-уравнению.

Уравнение ренормгруппы

$$R_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j\Psi = -\dot{G}_{ij}$$

Уравнение ренормгруппы с ненулевым векторным полем. Ψ – потенциал векторного поля

$$\Psi = \frac{1}{2}\log(1 - \kappa^2 r^2)$$

Потенциал касательного векторного поля на сфере, удовлетворяющий уравнению ренормгруппы

$$\dot{h} = -2 + 2\kappa^2$$

$$\dot{\kappa} = \frac{-2\kappa + 2\kappa^3}{h}$$

Выражения для производных параметров деформации сферы по времени. Они возникают при дифференцировании метрики

Двухпетлевое уравнение

$$\beta_{ij} = R_{ij} - R_i{}^k R_{jk} + (1+c_2) G_{ij} R_{kl} R^{kl} + (1-c_2) R_{ij} R - \frac{1}{2} G_{ij} R^2 - \frac{1}{2} c_2 \nabla_j \nabla_i R + \frac{1}{2} c_2 G_{ij} \nabla_k \nabla^k R - c_2 G_{ij} R^{kl}{}_{;k;l}$$

β-функция

$$\dot{h} = -2(1-\kappa^2)\left(1 + \frac{1+\kappa^2}{h}\right)$$

$$\dot{\kappa} = -2\frac{\kappa}{h}(1-\kappa^2)\left(1 + \frac{1+\kappa^2}{h}\right)$$

$$\left(-\frac{2\kappa^2 r}{1-\kappa^2 r^2} + vh, 0, 0\right)$$

Выражения для производных параметров на сфере и для векторного поля должны совпадать с выражениями на предыдущем слайде в нулевом порядке по h.

Vh – поправка к векторному поля.

Поправки к $\dot{h}$ и к $\dot{\kappa}$ выбирались по аналогии двумерной моделью.

Выводы

- Перечислили всевозможные тензорные структуры небольшой размерности.
- Поняли, как меняется бета-функция при замене схемы перенормировки для сигма-модели с трёхмерным пространством полей.
- Нашли векторное поле, удовлетворяющее однопетлевому уравнению ренормгруппы в O(4)-модели.
- Частично проверили уравнение ренормгруппы в двухпетлевом приближении.

Спасибо за внимание!