

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

УДК 539.1.05

ОТЧЕТ
ПО ПРЕДДИПЛОМНОЙ ПРАКТИКЕ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
КЛАСТЕРА ПЧД СО ЗВЕЗДАМИ**

Студент _____ С. О. Пугачев

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., доцент _____ К. М. Белоцкий

Москва 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Теорема Кёнига	4
2 Динамическое трение	6
3 Импульсное приближение	11
4 Изменение энергии кластера	18
5 Заключение	20

ВВЕДЕНИЕ

Первичные черные дыры (ПЧД) привлекают большое внимание современных исследователей. Их рассматривают в качестве кандидатов в скрытую массу. Но наложено много ограничений на их плотность в разных диапазонах масс [1]. Однако, существуют модели, где ПЧД рождаются в виде скоплений (кластеров). В этом случае, данные ограничения должны быть пересмотрены [2]. В данной работе рассматривается рассеяние кластера на звездах внутри их скопления. Данный эффект приводит к ограничениям на плотность одиночных ПЧД. Здесь рассматриваются динамические эффекты присущие не к одиночным ПЧД, а к кластерам ПЧД.

Приливные силы хорошо известны в астрономии. Постоянные или медленно меняющиеся приливные силы, такие как приливное поле Галактики в целом, действуя на звездные скопления, ограничивают размер системы, но не нарушают её равновесие и не изменяют её энергию. Однако быстро меняющиеся приливные силы их ещё называют приливными ударами, например, вызванные пролетом межзвездного облака, сообщают каждой звезде в скоплении небольшой "толчок" и посредством этого увеличивают кинетическую энергию звездного скопления [3].

Таким образом, приливные силы играют важную роль во многих областях астрофизики: слияние галактик [4; 5], образование звездных двойных систем путем приливного захвата двух тел [5; 6] и разрушение звездных скоплений и звездных двойных систем [7; 8], к которым могут быть ПЧД [9–11].

1. ТЕОРЕМА КЁНИГА

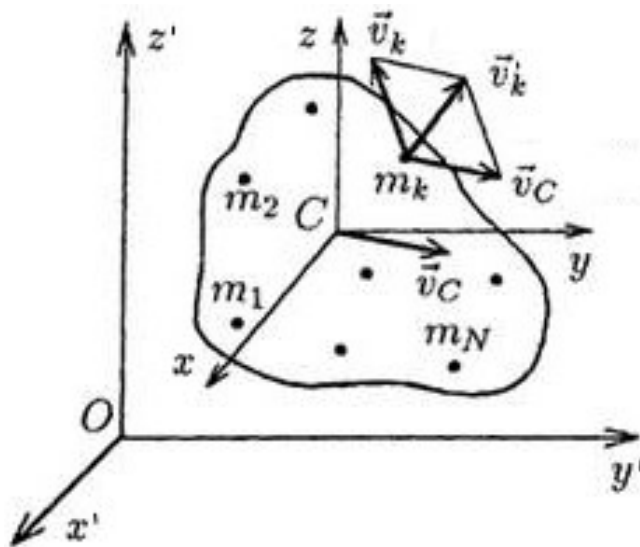
Кинетическая энергия E_k системы материальных точек в лабораторной системе отсчета (ЛСО) равна сумме кинетической энергии E_{cm} в ЛСО всей массы M системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии E_{in} той же системы в её относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчёта, начало координат которой совпадает с центром масс системы:

$$E_k = E_{cm} + E_{in} = \frac{MV^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (1.1)$$

где V — скорость центра масс, v_i — скорость материальной точки в системе отсчёта центра масс. Лучше всего доказать теорему Кёнига, так как придется её использовать. Воспользуемся законом сложения скоростей:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i \quad (1.2)$$

\mathbf{v}'_i — скорость материальной точки в ЛСО. Тогда кинетическая энергия



системы материальных точек может быть переписана:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i'^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\mathbf{v}_i + \mathbf{V})^2}{2} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_i m_i (\mathbf{v}_i \mathbf{V}) \\
 &+ \sum_i \frac{m_i V^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \mathbf{V} \sum_i m_i \mathbf{v}_i
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Если $\sum_i m_i \mathbf{v}_i = 0$, можно утверждать что центр масс в этой системе покоится, тогда получаем выражение (1.1).

Изменение кинетической энергии системы материальных точек будет выражаться следующим образом:

$$\Delta E_k = \Delta E_{cm} + \Delta E_{in} \tag{1.4}$$

Последняя запись очень удобна, если нас интересует изменение кинетической энергии системы, т.к. мы можем разделить эту задачу на две подзадачи, нам необходимо будет найти изменение энергии как единого целого в ЛСО и изменение энергии в системе начало координат которой совпадает с центром масс системы.

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ТРЕНИЕ

В этой главе мы будем находить изменение энергии центра масс. Для этого нам необходимо будет рассмотреть эффект "динамического трения" который впервые рассмотрел Чандрасекар [12]. Он рассмотрел движение тяжелой частицы M через бесконечную однородную среду из лёгких невзаимодействующих друг с другом и не сталкивающихся частиц. При этом движении массивная частица своим гравитационным полем изменяет траектории лёгких частиц, передавая им часть своего импульса:

$$M \frac{dV}{dt} = - \frac{4\pi G^2 M^2}{V^2} \ln \Lambda \rho(< V) \quad (2.1)$$

где V — это скорость тяжелого объекта, $\rho(< V)$ — плотность частиц со скоростями меньшими, чем V , а $\Lambda = p_{max}/p_{min}$. Величины p_{max} и p_{min} характеризуют максимальное и минимально взаимодействие лёгких частиц с тяжелой. Обычно $p_{max} \approx L$, где L — это размер системы, а $p_{min} \approx \max(GM/V^2, l)$, где l — размер объекта, а M — масса тяжелой частицы. Динамическое трение может быть качественно понято как появление "хвоста" повышенной плотности за массивным объектом. Этот хвост притягивает к себе движущийся объект и уменьшает его скорость.

В продолжении этой главы мы в качестве примера выведем формулу Чандрасекара, которое испытывает кластер ПЧД массой M_{cl} , двигаясь в однородном поле невзаимодействующих друг с другом звезд массой m_{star} . Здесь мы будем обозначать положение, скорость центра масс и массу кластера символами r_{cl}, v_{cl}, M_{cl} , а соответствующие параметры звезд $r_{star}, v_{star}, m_{star}$.

Наша цель — воспроизвести известную формулу Чандрасека, для этого рассмотрим задачу двух тел. Перейдем в систему отсчета, где звезда движется относительно кластера. Положение звезды относительно кластера $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{star} - \mathbf{r}_{cl}$, относительная скорость звезды равна $\mathbf{V} = \mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}$,

изменение положения \mathbf{r} определяется:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{r^2} \mathbf{r} \quad (2.2)$$

где $\mu = M_{cl} m_{star} / (M_{cl} + m_{star})$, $\kappa = G M_{cl} m_{star}$, Изменение относительной скорости равно

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta \mathbf{v}_{star} - \Delta \mathbf{v}_{cl} \quad (2.3)$$

Также воспользуемся законом сохранения импульса:

$$M_{cl} \Delta \mathbf{v}_{cl} + m_{star} \Delta \mathbf{v}_{star} = 0 \quad (2.4)$$

Из предыдущих двух уравнений получаем изменение скорости кластера:

$$\Delta \mathbf{v}_{cl} = -\frac{m_{star}}{M_{cl} + m_{star}} \Delta \mathbf{V} \quad (2.5)$$

Теперь разложим $\Delta \mathbf{V}$ на перпендикулярную и параллельную составляю-

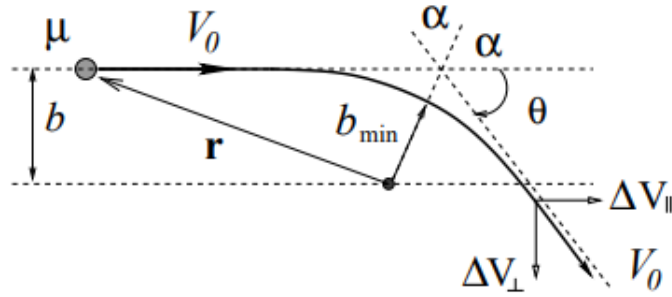


Рисунок 2.1 — Движение звезды относительно кластера ПЧД

щие:

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta \mathbf{V}_{\perp} + \Delta \mathbf{V}_{\parallel} \quad (2.6)$$

где $|\Delta \mathbf{V}_{\parallel}| = V_0 \cos \theta$, $|\Delta \mathbf{V}_{\perp}| = V_0 \sin \theta$, где θ — угол рассеивания и V_0 — скорость звезды на бесконечности. Из геометрии угол α с эксцентриситетом орбиты e соотношением:

$$\cos \alpha = \frac{1}{e}, \quad \cot \frac{\theta}{2} = \sqrt{e^2 - 1} \quad (2.7)$$

где $\theta + 2\alpha = \pi$. Эксцентриситет для гиперболической орбиты равен:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \quad (2.8)$$

где $E = \mu V_0^2/2$ – кинетическая энергия, $L = \mu bV_0$ – момент импульса:

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.9)$$

После некоторых преобразований получаем что:

$$|\Delta \mathbf{V}_\perp| = \frac{2bV_0^3}{G(M_{cl} + m_{star})} \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(m_{star} + M_{cl})^2} \right]^{-1} \quad (2.10)$$

$$|\Delta \mathbf{V}_\parallel| = 2V_0 \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(m_{star} + M_{cl})^2} \right]^{-1} \quad (2.11)$$

$$|\Delta \mathbf{v}_{cl\perp}| = \frac{2bV_0^3 m_{star}}{G(M_{cl} + m_{star})^2} \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M_{cl} + m_{star})^2} \right]^{-1} \quad (2.12)$$

$$|\Delta \mathbf{v}_{cl\parallel}| = \frac{2V_0 m_{star}}{M_{cl} + m_{star}} \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M_{cl} + m_{star})^2} \right]^{-1} \quad (2.13)$$

Двигаясь в однородном поле невзаимодействующих друг с другом звезд массой m_{star} все перпендикулярные отклонения кластера компенсируются симметрией. Однако добавляются параллельные изменения скорости, и кластер будет испытывать замедление. Также мы пренебрегаем единицей в последнем уравнении, т.к. будем рассматривать практически прямолинейные траектории. Расчет полной силы сопротивления заключается в следующем. Пусть $f(\mathbf{v}_{star})$ – числовая плотность звезд. Скорость, с

которой кластер сталкивается со звездами с прицельным параметром между b и $b + db$ и скоростями между \mathbf{v}_{star} и $\mathbf{v}_{star} + d\mathbf{v}_{star}$, равна:

$$2\pi b db V_0 f(\mathbf{v}_{star}) d^3\mathbf{v}_{star} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{cl}}{dt} = 2\pi V_0 f(\mathbf{v}_{star}) d^3\mathbf{v}_{star} \int_0^{R_s} |\Delta\mathbf{v}_{cl||} b db \quad (2.15)$$

Интегрирование по прицельному параметру, где R_s – размер скопления звезд:

$$\int_0^{R_s} |\Delta\mathbf{v}_{cl||} b db = \int_0^{R_s} \frac{2m_{star} V_0}{M_{cl} + m_{star}} \left[1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2 (M_{cl} + m_{star})^2} \right]^{-1} b db \quad (2.16)$$

Теперь требуется интегрирование уравнения по пространству скоростей звезд:

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = 4\pi G^2 m_{star} (M_{cl} + m_{star}) \ln \left(\frac{R_s V_0^2}{G(m_{star} + M_{cl})} \right) \int_0^\infty \frac{\mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}}{|\mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}|^3} f(\mathbf{v}_{star}) d^3\mathbf{v}_{star} \quad (2.17)$$

Теперь осталось наложить условие, что $v_{star} < v_{cl}$, получаем:

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = - \frac{4\pi G^2 m_{star} (M_{cl} + m_{star})}{v_{cl}^3} \ln \left(\frac{R_s v_{cl}^2}{G(m_{star} + M_{cl})} \right) \int_0^{v_{cl}} f(v_{star}) v_{star}^2 dv_{star} \mathbf{v}_{cl} \quad (2.18)$$

Интеграл зависящий от $f(v_{star})$ приближенно равный числовой плотности звезд n_{star} :

$$\frac{d\mathbf{v}_{cl}}{dt} = - \frac{4\pi G^2 m_{star} (M_{cl} + m_{star}) n_{star}}{v_{cl}^3} \ln \left(\frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \mathbf{v}_{cl} \quad (2.19)$$

Теперь домножим на M_{cl} и получим силу трения:

$$\mathbf{F}_{df} = M_{cl} \frac{d\mathbf{v}_{cl}}{dt} = - \frac{4\pi G^2 M_{cl} (M_{cl} + m_{star}) \rho_{star}}{v_{cl}^3} \ln \left(\frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \mathbf{v}_{cl} \quad (2.20)$$

где $\rho_{star} = m_{star} n_{star}$ — плотность звезд в скоплении. Теперь найдем скорость изменения энергии центра масс кластера ПЧД:

$$\frac{dE_{cm}}{dt} = (\mathbf{F}_{df} \mathbf{v}_{cl}) = - \frac{4\pi G^2 M_{cl} (M_{cl} + m_{star}) \rho_{star}}{v_{cl}} \ln \left(\frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \quad (2.21)$$

3. ИМПУЛЬСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Теперь необходимо определить изменение кинетической энергии кластера в системе, где центр масс покоится. Чтобы решить эту задачу аналитически, мы воспользуемся импульсным приближением, которое впервые использовалось Ферми в расчетах для квантового рассеяния [13]. В импульсном приближении, мы предполагаем что ПЧД в кластере статические объекты, у которых в ходе гравитационного взаимодействия с пролетающей звездой изменяются только скорости, а изменение энергии кластера будет выражаться:

$$\Delta E = \sum_i \frac{m_i \Delta v_i^2}{2} \quad (3.1)$$

В рамках этого приближения время встречи кластера со звездой намного меньше динамического времени, связанного с внутренней динамикой кластера. Естественно, это приближение носит ограничительный характер и не может быть применено к произвольным астрофизическим системам.

Кластер для нашей задачи представляет собой однородную сферу, заполненную одинаковыми по массе ПЧД. Невозмущенные траектории ПЧД в кластере являются эллипсами, все ПЧД имеют одинаковый период обращения по орбите:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \quad (3.2)$$

Продолжительность встречи кластера и звезды примерно равно времени, которое требуется чтобы пройти рядом внутри скопления звезд, учитывая размер скопления R_{cl} и скорость сближения v , продолжительность встречи будет равна:

$$\tau = \frac{R_{cl}}{v} \quad (3.3)$$

Условие применимости импульсного приближения:

$$T \gg \tau \quad (3.4)$$

Рассмотри взаимодействие кластера ПЧД с звездой. Предполагаем, что изначально они не связаны друг с другом и сближаются по гиперболической орбите с начальной относительной скоростью v и прицельным параметром b . Для достаточно быстрых сближений (больших v) отклонение звезд от их первоначальных орбит из-за гравитационного взаимодействия мало, и мы можем аппроксимировать орбиты прямой линией. Массы кластера и звезды обозначаются через M_{cl} и m_{star} . Центр масс кластера поме-

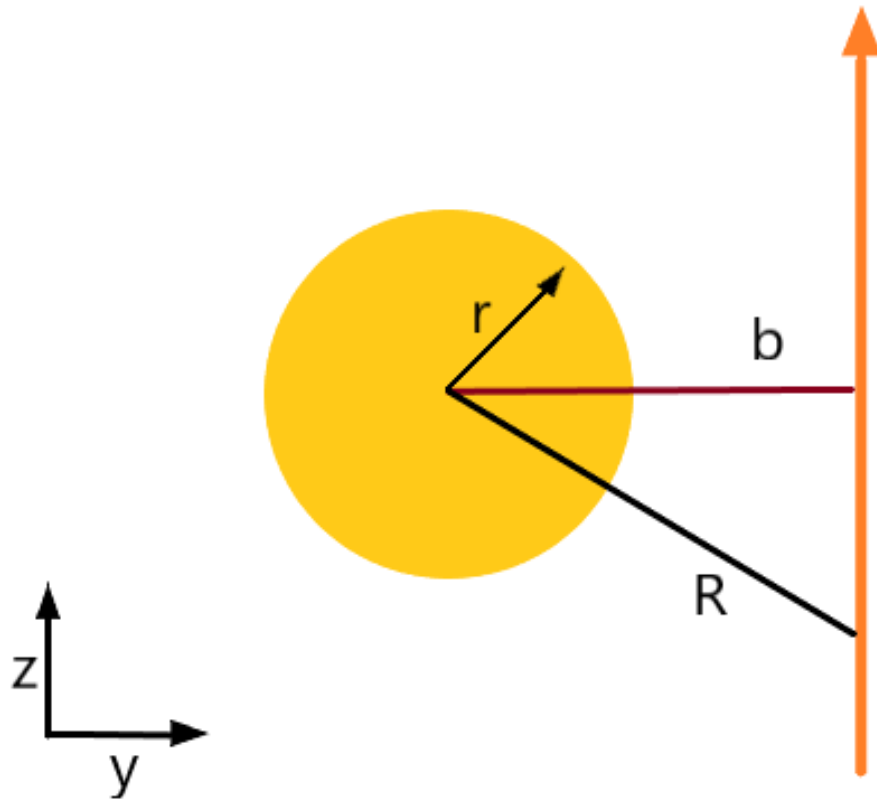


Рисунок 3.1 — На рисунке представлен кластера ПЧД и звезда движущаяся по прямой линии с постоянной скоростью v .

щаем в начало координат, как бы сказано выше центр масс покоится, скорость звезды в этой системе координат $v = |\mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}|$, где v_{star} - скорость звезды и v_{cl} - скорость центра масс кластера в ЛСО. Координаты ПЧД в кластере $\mathbf{r} = (x, y, z)$, координаты пролетающей звезды $\mathbf{R} = (0, b, vt)$,

$\mathbf{R} - \mathbf{r} = -x\mathbf{e}_x + (b - y)\mathbf{e}_y + (z - vt)\mathbf{e}_z$. Найдем изменение скорости ПЧД в кластере:

$$\Delta \mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a} dt = Gm_{star} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} dt = \frac{2Gm_{star}}{v} \frac{-x\mathbf{e}_x + (b - y)\mathbf{e}_y}{x^2 + (b - y)^2} \quad (3.5)$$

Полное изменение энергии кластера в результате встречи определяется выражением:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho_{pbh}(\mathbf{r}) (\Delta \mathbf{v})^2 \quad (3.6)$$

Для нашего случая плотность ПЧД в кластере $\rho_{pbh}(\mathbf{r}) = \rho_{pbh} = const$. В сферических координатах $x = r \cos \phi \sin \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$, тогда

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2 \left(\frac{Gm_{star}}{v} \right)^2 \rho_{pbh} \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2br \sin \phi \sin \theta} \\ &= 2 \left(\frac{Gm_{star}}{v} \right)^2 \rho_{pbh} \int_0^{R_{cl}} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{r^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2br \sin \phi \sin \theta} \\ &= 8\pi \left(\frac{Gm_{star}}{v} \right)^2 \rho_{pbh} \left[R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнение 3.7 включает кинетическую энергию полученную центром масс кластера. Нас интересует изменение кинетической энергии кластера относительно неподвижного центра масс, для этого необходимо вычесть изменение энергии центра масс. Из уравнения 3.5 найдем изменение скорости

центра масс:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{V} &= \frac{1}{M_{cl}} \int_0^{R_{cl}} \rho_{pbh} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \Delta \mathbf{v} d\phi \\
&= \frac{2Gm_{star}}{vM_{cl}} \rho_{pbh} \int_0^{R_{cl}} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{-r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + (b - r \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_y}{r^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2br \sin \phi \sin \theta} \\
&= \frac{2Gm_{star}}{vb} \mathbf{e}_y
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Теперь найдем изменение энергии центра масс:

$$\Delta E_{cm} = \frac{M_{cl} \Delta \mathbf{V}^2}{2} = \left(\frac{Gm_{star}}{v} \right)^2 \frac{2M_{cl}}{b^2} = 8\pi \left(\frac{Gm_{star}}{v} \right)^2 \frac{\rho_{pbh} R_{cl}^3}{3b^2} \tag{3.9}$$

Изменение кинетической энергии кластера относительно неподвижного центра масс:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{in} &= \Delta E - \Delta E_{cm} \\
&= 8\pi \left(\frac{Gm_{star}}{v} \right)^2 \rho_{pbh} \left[R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) - \frac{R_{cl}^3}{3b^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Изменение внутренней энергии кластера ПЧД представлено на рисунке [3.2](#).

Как можно заметить существует ограничение на прицельный параметр, он не может быть меньше размера кластера R_{cl} .

Теперь когда мы знаем какую внутреннюю энергию кластер получает от одной звезды, мы можем просуммировать по всем встречам со звездами, которые происходят с частотой $2\pi b db n_{star} v$ в единицу времени:

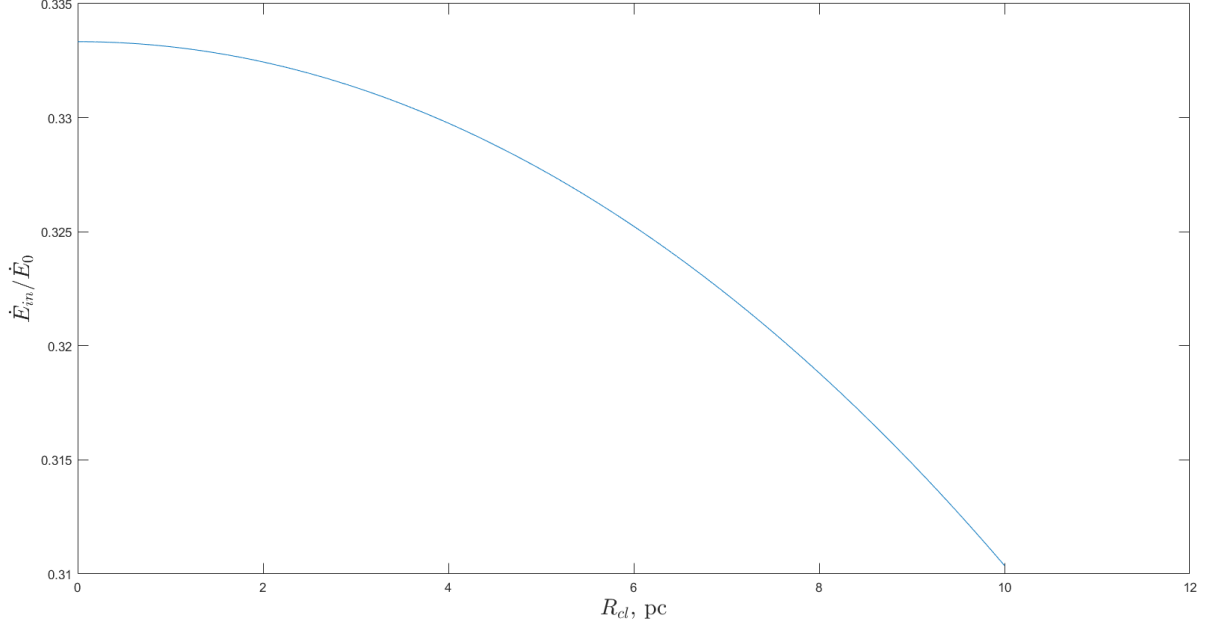


Рисунок 3.2 — Изменение внутренней энергии кластера ПЧД от прицельного параметра, где $E_0 = 8\pi \left(\frac{Gm_{star}}{v} \right)^2 \rho_{pbh} R_{cl}$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{in}}{dt} = & \frac{16\pi^2 G^2 m_{star}^2 n_{star} \rho_{pbh}}{v} \left[\int_{R_{cl}}^{R_s} R_{cl} b db - \int_{R_{cl}}^{R_s} \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) b db \right. \\ & \left. - \int_{R_{cl}}^{R_s} \frac{R_{cl} db}{3b} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

После интегрирования получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{in}}{dt} = & \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_{star} \rho_{pbh}}{3v} \left[R_{cl} (R_s^2 - R_{cl}^2) \right. \\ & \left. - (R_s^2 - R_{cl}^2)^{3/2} \arctan \left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) \right] \\ = & \frac{4\pi G^2 m_{star} \rho_{star} M_{cl}}{v} \left[\left(\frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right) - \left(\frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Построим график 4.2 изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера.

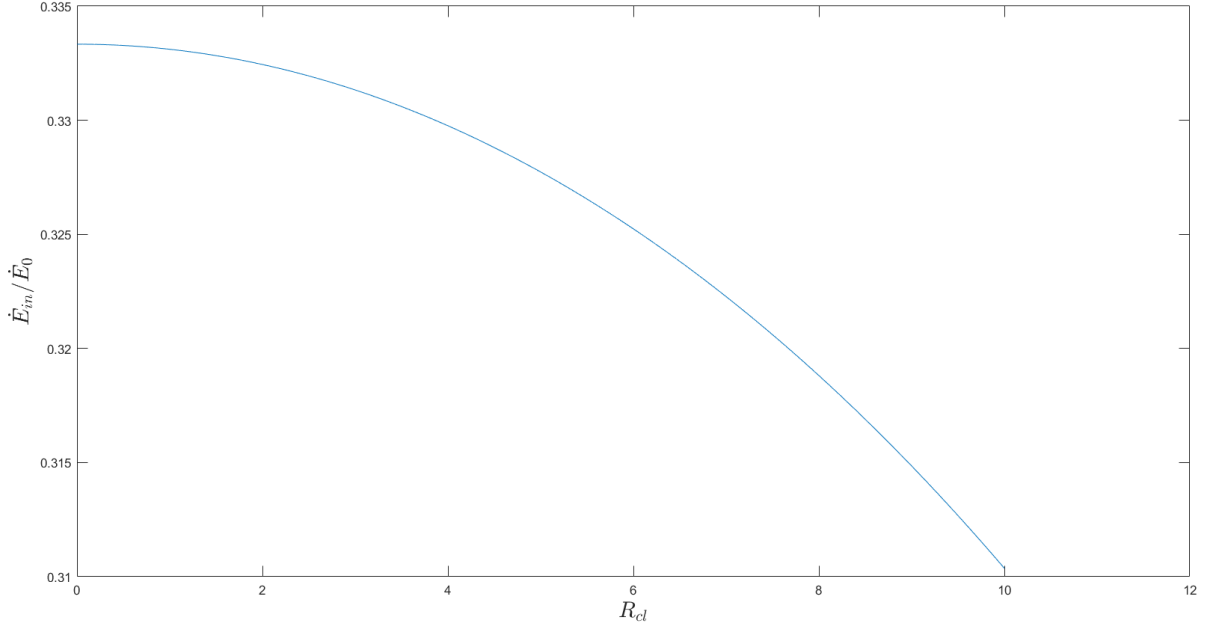


Рисунок 3.3 — Изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера, где $\dot{E}_0 = \frac{4\pi G^2 m_{star} \rho_{star} M_{cl}}{v}$

Теперь необходимо найти энергию, которую кластер получает при пролете звезд сквозь него. Для этого найдем энергию, которую теряет звезда при пролёте сквозь кластер в единицу времени. Для этого воспользуемся формулой Чандрасекара, которую мы вывели в прошлой главе:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi G^2 (m_{pbh} + m_{star}) m_{star} \rho_{pbh}}{v} \ln \left(\frac{R_{cl} v^2}{G(m_{star} + m_{pbh})} \right) \quad (3.13)$$

Просуммируем этот эффект от всех звезд, которые пролетают сквозь кластер:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{in}}{dt} &= \frac{dE}{dt} \frac{4\pi R_{cl}^3}{3} n_{star} \\ &= -\frac{4\pi G^2 (m_{star} + m_{pbh}) M_{cl} \rho_{star}}{v} \ln \left(\frac{R_{cl} v^2}{G(m_{star} + m_{pbh})} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Изменение внутренней энергии кластера учитывая, как пролет сквозь кла-

стер и не сквозь:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{in}}{dt} = \frac{4\pi G^2 M_{cl} \rho_{star}}{v} & \left[m_{star} \left(\frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 - \left(\frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) \right) \right. \\ & \left. + (m_{star} + m_{pbh}) \ln \left(\frac{R_{cl} v^2}{G(m_{pbh} + m_{star})} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Также построим график 4.2 изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера, но уже с учетом пролета сквозь кластер.

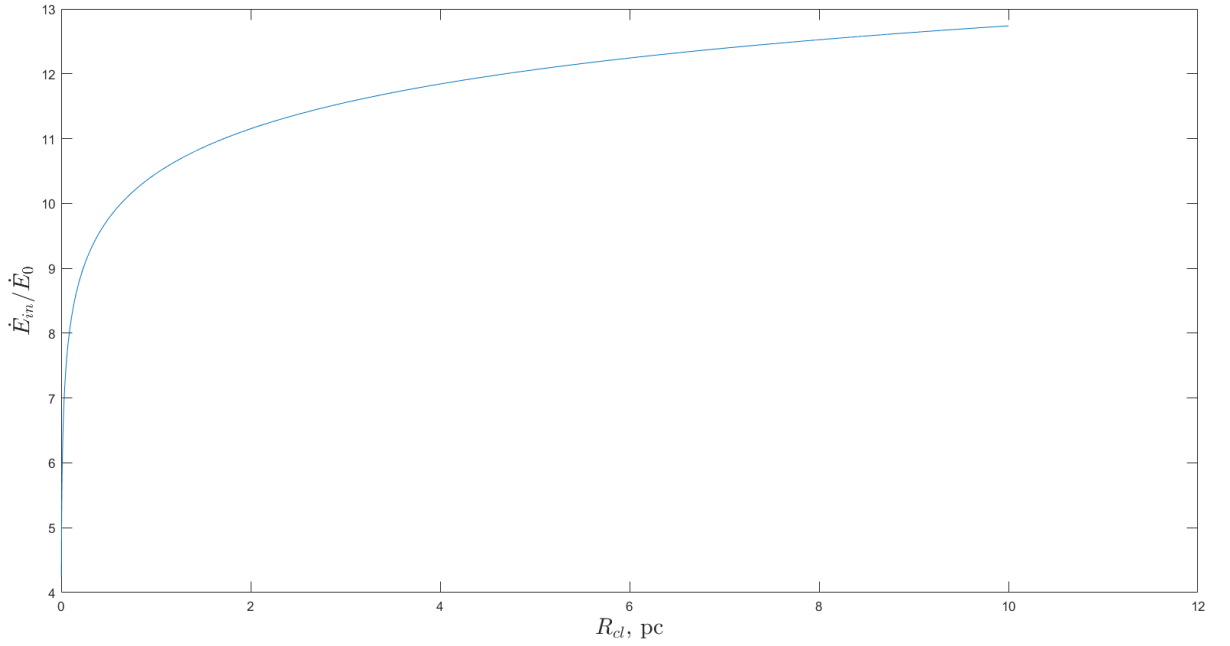


Рисунок 3.4 — Изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера, где $\dot{E}_0 = \frac{4\pi G^2 m_{star} \rho_{star} M_{cl}}{v}$

4. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ КЛАСТЕРА

Теперь посмотрим на изменение полной энергии кластера в единицу времени:

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{dE_{in}}{dt} + \frac{dE_{cm}}{dt} \\
 &= \frac{4\pi G^2 M_{cl} \rho_{star}}{v} \left[m_{star} \left(\frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 - \left(\frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (m_{star} + m_{pbh}) \ln \left(\frac{R_{cl} v^2}{G(m_{pbh} + m_{star})} \right) - (m_{star} + M_{cl}) \ln \left(\frac{R_s v^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Построим график 4.2 изменение полной энергии в единицу времени от размера кластера.

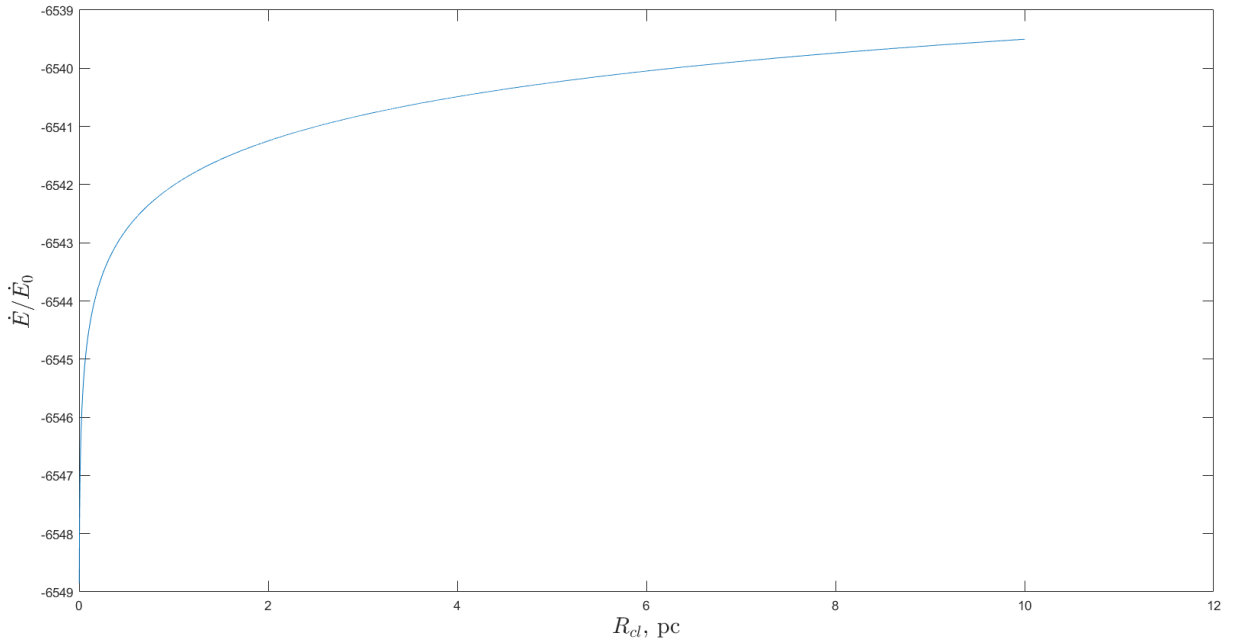


Рисунок 4.1 — Изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера, где $\dot{E}_0 = \frac{4\pi G^2 m_{star} \rho_{star} M_{cl}}{v}$

Теперь необходимо сравнить изменение энергии в единицу времени "рыхлого" кластера к точечному 4.2

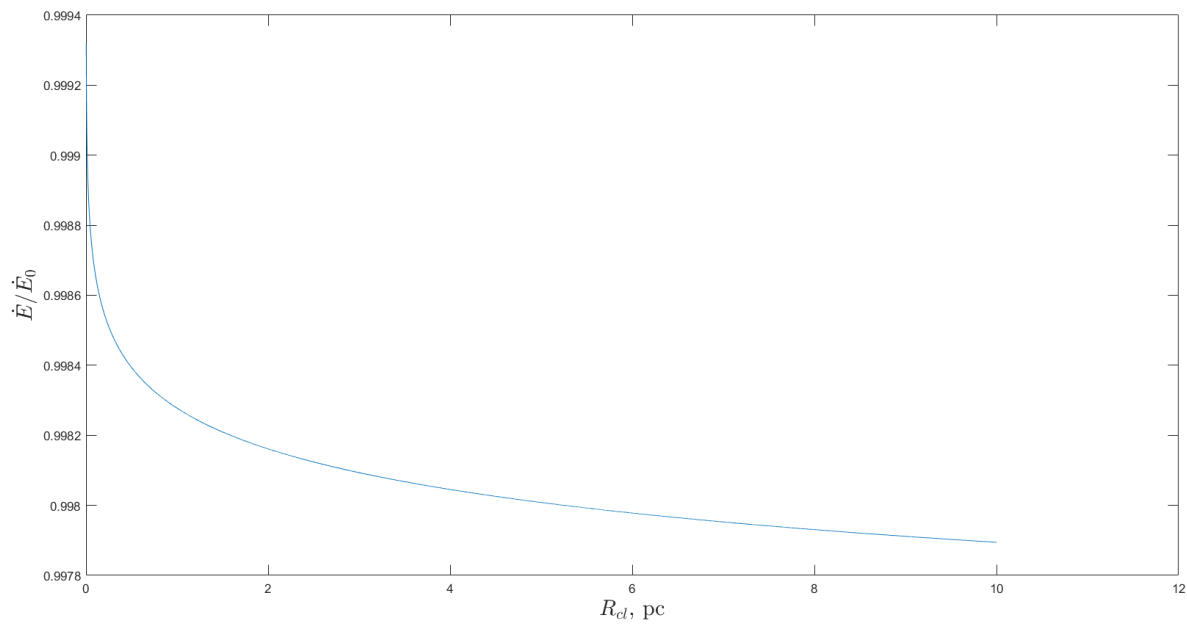


Рисунок 4.2 — Отношение изменения энергии "рыхлого" кластера к точечному

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучалось взаимодействие кластера ПЧД со звездами внутри шарового скопления. В ходе работы было получено выражение изменения энергии кластера в единицу времени. Отношение изменения энергии "рыхлого" кластера к точечному. Как можно заметить по графику эффектами связанными с приливными воздействиями можно пренебречь и считать кластер точечным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Constraints on primordial black holes / B. Carr [et al.] // Rept. Prog. Phys. — 2021. — Vol. 84, no. 11. — P. 116902. — arXiv: [2002.12778 \[astro-ph.CO\]](#).
2. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: [1807.06590 \[astro-ph.CO\]](#).
3. *King I. R.* An Introduction to Classical Stellar Dynamics // University of California, Berkeley. — 1994.
4. *Richstone D. O.* Collisions of Galaxies in Dense Clusters. I. Dynamics of Collisions of Two Galaxies //. — 1975. — Vol. 200. — P. 535–547.
5. *Lee H. M., Ostriker J. P.* Cross Sections for Tidal Capture Binary Formation and Stellar Merger //. — 1986. — Vol. 310. — P. 176.
6. *Press W. H., Teukolsky S. A.* On formation of close binaries by two-body tidal capture. //. — 1977. — Vol. 213. — P. 183–192.
7. *Heggie D. C.* Binary evolution in stellar dynamics. //. — 1975. — Vol. 173. — P. 729–787.
8. *Bahcall J. N., Hut P., Tremaine S.* Maximum mass of objects that constitute unseen disk material //. — 1985. — Vol. 290. — P. 15–20.
9. *Fuller G. M., Kusenko A., Takhistov V.* Primordial Black Holes and r -Process Nucleosynthesis // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 119, issue 6. — P. 061101.
10. *Weinberg M. D., Shapiro S. L., Wasserman I.* The Dynamical Fate of Wide Binaries in the Solar Neighborhood //. — 1987. — Vol. 312. — P. 367.
11. *Moore B.* An Upper Limit to the Mass of Black Holes in the Halo of the Galaxy //. — 1993. — Vol. 413. — P. L93. — arXiv: [astro-ph/9306004 \[astro-ph\]](#).

12. *Binney J., Tremaine S.* Galactic Dynamics: Second Edition // — 2008.
13. *Fermi E.* Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate // Ricerca scientifica. — 1936. — Vol. 7, no. 2. — P. 13–52.