О ПЕТЛЕВЫХ ПОПРАВКАХ К ДЕЙСТВИЮ ДЕФОРМИРОВАННОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ O(4) СИГМА-МОДЕЛИ

А. А. Видинеев

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

28 июня 2022 г.

Научный руководитель: М. Н. Алфимов

Цель работы

- Исследовать нелинейную σ-модель для случая трёхмерного пространства полей;
- Понять, как меняется β-функция при замене схемы перенормировки;
- Найти первую квантовую поправку к метрике деформированной $O(4)$-модели.

Мотивация

- Нелинейные σ-модели применяются в различных областях физики конденсированного состояния, в частности, при описании квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3, спиновых цепочек. Эти вопросы могут быть изучены с использованием методов σ-модели, которые устанавливают методологическую связь между ними. Используя свойства нелинейных σ-моделей, можно получить свойства низкоэнергетического спектра спиновых цепочек. Дискретизация двумерной σ-модели соответствует спиновой цепочке. Например, дискретизацией $O(3)$-модели является обычная спиновая цепочка с группой $SU(2)$.
- В непертурбативной теории поля для описания топологических солитонов (например, модель Скирма);
- В теории струн.
- Изначально $O(3)$-модель была предложена как игрушечная версия квантовой хромодинамики. Эта модель обладает разными полезными для описания КХД характеристиками: асимптотическая свобода, динамическая генерация массы, инстантоны, скирмионы, интегрируемость.

σ-модель

- Общее выражение для действия σ-модели:

$$S[\mathbf{X}] = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_a X^i \partial_a X^j d^n \mathbf{x}.$$

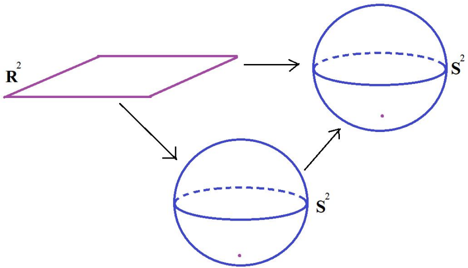
- Уравнение ренормгруппы (РГ) связывает ренормгруппу и поток Риччи

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G).$$

- β-функция и метрика G_{ij} раскладывается в ряд по степеням от постоянной Планка $\hbar$

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + \ldots$$

Пример: $O(3)$-модель



σ-модель $O(3)$ – это поле со значением на сфере, то есть функция на евклидовом пространстве со значениями в сфере. Евклидово пространство можно замкнуть в сферу, тогда получается отображение из сферы в сферу. Но такие отображения топологически классифицируются. В результате получаются поля с ненулевыми топологическими числами – солитоны. Примером является скирмион.

- В MS-схеме перенормировки (схема минимального вычитания) известны выражения для первых слагаемых β-функции:

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij},$$

$$\beta_{ij}^{(2)}(G) = \frac{1}{2} R_{iklm} R_j{}^{klm},$$

$$\beta_{ij}^{(3)}(G) = \frac{1}{8} \nabla_k R_{ilmn} \nabla^k R_j{}^{lmn} - \frac{1}{16} \nabla_i R_{klmn} \nabla_j R^{klmn} - \frac{1}{2} R_{imnk} R_{jpq}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8} R_{iklj} R^{kmnp} R^l{}_{mnp}.$$

- В трёхмерном случае эти выражения можно переписать при помощи тензора Риччи:

$$R_{ijkl} = G_{jl} R_{ik} - G_{jk} R_{il} - G_{il} R_{jk} + G_{ik} R_{jl} + \frac{1}{2} G_{il} G_{jk} R - \frac{1}{2} G_{ik} G_{jl} R.$$

β-функция

- Получаются такие выражения для первых членов β-функции:

$$\beta_{ij}^{(1)} = R_{ij},$$

$$\beta_{ij}^{(2)} = \left(R_{kl}R^{kl} - \frac{1}{2}R^2\right)G_{ij} + R_{ij}R - R_i{}^k R_{jk}.$$

$$\beta_{ij}^{(3)} = \left[\frac{3}{4}R_k{}^m R^{kl} R_{lm} - \frac{7}{8}R_{kl}R^{kl}R + \frac{1}{4}R^3 - \frac{1}{8}(\nabla_k R)(\nabla^k R) + \frac{1}{4}(\nabla_m R_{kl})(\nabla^m R^{kl})\right]G_{ij} +$$
$$+ \left(\frac{5}{2}R_{ij}R_{kl}R^{kl} - \frac{11}{8}R_{ij}R^2 + \frac{1}{4}(\nabla_k R_{ij})(\nabla^k R)\right) +$$
$$+ \left(-3R_i{}^k R_j{}^l R_{kl} + \frac{19}{8}R_i{}^k R_{jk} R - \frac{1}{4}(\nabla_l R_{jk})(\nabla^l R_i{}^k)\right) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{4}(\nabla_i R^{kl})(\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16}(\nabla_i R)(\nabla_j R)\right)$$

Тензорные структуры

- Метрике G_{ij} приписывается размерная характеристика $\hbar^{-1}$. Тогда метрика с верхними индексами будет иметь порядок 1, ковариантная производная ∇_i и тензор Риччи имеют нулевой порядок по $\hbar$. Скалярная кривизна будет иметь порядок 1.
- β-функция представляет из себя ряд, L-ый член которого - линейная комбинация тензоров порядка $L-1$.
- Все такие тензоры записываются в алфавите в G, R, ∇.
- Наблюдение. Пусть имеется тензор, состоящий из N_R букв R и N_∇ букв ∇. Тогда его порядок по $\hbar$ равна $N_R + \frac{N_\nabla}{2} - 1$.

Тензорные структуры

- Тензорные структуры порядка 0:

$$\tau_1 = \{R_{ij}, RG_{ij}\}.$$

- Тензорные структуры порядка 1:

$$\tau_2 = \{G_{ij}R^2, G_{ij}R_{kl}R^{kl}, G_{ij}\nabla^2 R, G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl};$$
$$R_{ij}R, \nabla^2 R_{ij}; R_{il}R_j{}^l; \nabla_i\nabla_j R; \nabla_i\nabla^k R_{jk}, \nabla^k\nabla_i R_{jk}\}.$$

- Число тензорных структур порядка 2 слишком велико.

Смена схемы перенормировки

- Смена схемы перенормировки приводит к смене метрики в пространстве полей

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} G_{ij}^{(k)}.$$

- РГ-уравнение в новой схеме позволяет найти β-функцию

$$\dot{\widetilde{G}}_{ij} = -\widetilde{\beta}_{ij}(\widetilde{G}_{mn}).$$

- Получаем следующие выражения:

$$\widetilde{\beta}_{ij}^{(1)} = R_{ij},$$

$$\widetilde{\beta}_{ij}^{(2)} = -R_i{}^k R_{jk} + (1 + c_2) G_{ij} R_{kl} R^{kl} + (1 - c_2) R_{ij} R - \frac{1}{2} G_{ij} R^2 - \frac{1}{2} c_2 \nabla_j \nabla_i R + \frac{1}{2} c_2 G_{ij} \nabla_k \nabla^k R - c_2 G_{ij} R^{kl}{}_{;k;l}.$$

Уравнение ренормгруппы

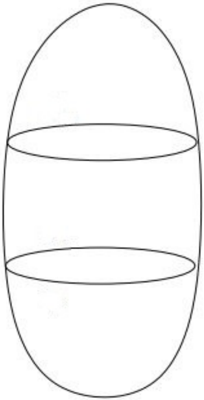
- Гипотетическая метрика, удовлетворяющая уравнению ренормгруппы

$$ds^2 = (h - 1 - \kappa^2)\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \left(\frac{1-\kappa^2 r^2}{1-r^2} - \frac{2\kappa^2}{h}\right)^{-1} d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right).$$

- Часть метрики, пропорциональная h, должна удовлетворять однопетлевому РГ-уравнению.
- Выпишем однопетлевую часть метрики

$$ds^2 = h\left[\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right].$$

Деформированная сфера



- Это метрика продольно деформированной сферы.
- При $\kappa = 0$ получается метрика обычной сферы с координатами Хопфа

$$ds^2 = (h{-}1)\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)} + (1-r^2)d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right).$$

- Координаты Хопфа:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1-r^2}\cos\phi_1 \\ x_2 &= \sqrt{1-r^2}\sin\phi_1 \\ x_3 &= r\cos\phi_2 \\ x_4 &= r\sin\phi_2. \end{aligned}$$

Уравнение ренормгруппы

- Уравнение ренормгруппы с ненулевым векторным полем. Ψ – потенциал векторного поля:

$$R_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j \Psi = -\dot{G}_{ij}.$$

- Потенциал касательного векторного поля на сфере, удовлетворяющий уравнению ренормгруппы:

$$\Psi = \frac{1}{2}\log(1 - \kappa^2 r^2).$$

- Выражения для производных параметров деформации сферы по времени. Они возникают при дифференцировании метрики:

$$\dot{h} = -2 + 2\kappa^2,$$
$$\dot{\kappa} = \kappa \hbar^{-1} \dot{h}.$$

Двухпетлевое уравнение

- Вид β-функции в произвольной схеме

$$\beta_{ij} = R_{ij} - R_i{}^k R_{jk} + (1+c_2) G_{ij} R_{kl} R^{kl} + (1-c_2) R_{ij} R - \frac{1}{2} G_{ij} R^2 - \frac{1}{2} c_2 \nabla_j \nabla_i R + \frac{1}{2} c_2 G_{ij} \nabla_k \nabla^k R - c_2 G_{ij} R^{kl}{}_{;k;l}.$$

- Выражения для производных параметров:

$$\dot{h} = -2(1-\kappa^2)\left(1 + \frac{1+\kappa^2}{h}\right),$$
$$\dot{\kappa} = -2\frac{\kappa}{h}(1-\kappa^2)\left(1 + \frac{1+\kappa^2}{h}\right).$$

- $\frac{v}{h}$ – поправка к векторному поля.

$$\left(-\frac{2\kappa^2 r}{1-\kappa^2 r^2} + \frac{v}{h}, 0, 0\right).$$

Новая метрика

- Рассмотри метрику, в которой от времени зависит только параметр κ

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right).$$

- Эта метрика удовлетворяет однопетлевому РГ-уравнению при следующих значениях векторного поля и $\dot{\kappa}$:

$$v = \left(-\frac{2\kappa^2 r}{1-\kappa^2 r^2}, 0, 0\right),$$

$$\dot{\kappa} = \hbar(\kappa^2 - 2).$$

- Заметим, что полученное векторное поле совпадает с потенциальным векторным полем $\Psi = \frac{1}{2}\log(1-\kappa^2 r^2)$.

Петлевые поправки

- Предполагалось, что возмущённая метрика имеет вид:

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{1-\frac{\hbar\kappa(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}dr^2 + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}d\phi_1{}^2 + r^2 d\phi_2{}^2\right).$$

- Оказалось, что в этом случае поправки к векторному полю, найденные из двух уравнений на ковариантную производную имеют неустранимую разницу.

Выводы

- Перечислили всевозможные тензорные структуры небольшой размерности;
- Поняли, как меняется β-функция при замене схемы перенормировки для σ-модели с трёхмерным пространством полей;
- Нашли векторное поле, удовлетворяющее однопетлевому уравнению ренормгруппы в $O(4)$-модели;
- Частично проверили уравнение ренормгруппы в двухпетлевом приближении.

Спасибо за внимание!