

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

На правах рукописи

ПУГАЧЁВ СТАНИСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
КЛАСТЕРА ПЧД СО ЗВЕЗДАМИ**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»  
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,  
д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ К. М. Белоцкий

Москва 2022

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
КЛАСТЕРА ПЧД СО ЗВЕЗДАМИ**

Студент

\_\_\_\_\_ С. О. Пугачёв

Научный руководитель,

д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ К. М. Белоцкий

Рецензент,

д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Ю. Н. Ерошенко

Секретарь ГЭК,

к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,

д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

Рук. учеб. прог.,

д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Расчет эффекта взаимодействия кластера ПЧД со скоплением звезд</b>	<b>6</b>
Применение теоремы Кёнига . . . . .	6
Описание динамического трения . . . . .	7
Использование импульсного приближения . . . . .	12
Изменение энергии кластера . . . . .	19
<b>Заключение</b>	<b>23</b>
<b>Список литературы</b>	<b>24</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Первичные черные дыры (ПЧД) привлекают большое внимание современных исследователей. Возможность существования таких объектов была предсказана в [1], было предложено множество механизмов формирования ПЧД [2–4]. Прямые доказательства существования ПЧД пока что отсутствуют, но имеются наблюдательные данные, которые могут быть проинтерпретированы с помощью гипотезы рождения ПЧД.

К таким данным можно отнести регистрацию гравитационных волн с помощью гравитационно-волновых интерферометров LIGO/Virgo [5; 6], источником которых считается слияние двойных систем черных дыр. При этом идёт обсуждение, что эти события могут быть от ПЧД [7].

Также существует проблема происхождения сверхмассивных черных дыр в центрах галактических ядер [8], которыми объясняются квазары. Объяснить формирование таких массивных объектов на ранних стадиях эволюции Вселенной за счет аккреции окружающего вещества довольно сложно, поэтому предполагается, что они могли образоваться до звездной стадии. Первичное происхождение сверхмассивных черных дыр может быть также связано с происхождением галактик [9–12].

Интерес к ПЧД проявляется и в контексте одной из важнейших проблем современной физики — проблемы природы скрытой массы. Однако на плотность ПЧД во Вселенной наложены существенные ограничения [13]. Но, в моделях, где ПЧД рождаются в виде скоплений (кластеров) данные ограничения должны быть пересмотрены [14]. К таким ограничениям относятся «динамические ограничения». ПЧД в ходе движения внутри звездного скопления могут разрушить его, как это было рассмотрено на примере скопления в карликовой галактике Эридан [15]. Это связано с тем, что более легкие звезды будут рассеиваться на более тяжелых ПЧД, в ходе этого взаимодействия звезды будут получать энергию [16]

В данной работе рассматривается рассеяние кластера ПЧД<sup>1</sup> на звездах внутри покоящегося шарового звездного скопления. Учитываются соответствующие динамические эффекты, которые отличаются от случая

---

<sup>1</sup>Чтобы упростить изложение, слово «кластер» будет применяться к скоплению ПЧД, «скопление» - к скоплению звезд.

одиноким ПЧД.

К динамическим эффектам относятся приливные силы, которые хорошо известны в астрономии. Постоянные или медленно меняющиеся приливные силы, такие как приливное поле Галактики в целом, действующее на звездные скопления, ограничивают размер системы, но не нарушают её равновесие и не изменяют её энергию. Однако быстро меняющиеся приливные силы, их ещё называют приливными ударами, например, вызванные пролетом межзвездного облака, сообщают каждой звезде в скоплении небольшой «толчок» и посредством этого увеличивают кинетическую энергию всего звездного скопления [17].

Таким образом, приливные силы играют важную роль во многих областях астрофизики: слияние галактик [18; 19], образование звездных двойных систем путем приливного захвата двух тел [19; 20] и разрушение звездных скоплений и звездных двойных систем [21; 22], к которым могут быть причастны ПЧД [23–25].

# РАСЧЕТ ЭФФЕКТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КЛАСТЕРА ПЧД СО СКОПЛЕНИЕМ ЗВЕЗД

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КЁНИГА

Кинетическая энергия  $\mathcal{E}_k$  системы материальных точек в лабораторной системе отсчета (ЛСО) равна сумме кинетической энергии  $\varepsilon_{cm}$  в ЛСО всей массы  $M$  системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним представлено на рисунке (1), и кинетической энергии  $E_{in}$  той же системы в её относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчёта, начало координат которой совпадает с центром масс системы:

$$\mathcal{E}_k = \varepsilon_{cm} + E_{in} = \frac{MV^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (1)$$

где  $V$  — скорость центра масс,  $v_i$  — скорость материальной точки в системе отсчёта центра масс [26]. Лучше всего доказать теорему Кёнига, так как придется её использовать. Воспользуемся законом сложения скоростей:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i \quad (2)$$

$\mathbf{v}'_i$  — скорость материальной точки в ЛСО. Тогда кинетическая энергия системы материальных точек может быть переписана:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}'_i{}^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\mathbf{v}_i + \mathbf{V})^2}{2} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_i m_i (\mathbf{v}_i \mathbf{V}) \\ &+ \sum_i \frac{m_i V^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \mathbf{V} \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (3)$$

Если  $\sum_i m_i \mathbf{v}_i = 0$ , можно утверждать что центр масс в этой системе покоится, тогда получаем выражение (1).

Изменение кинетической энергии системы материальных точек будет

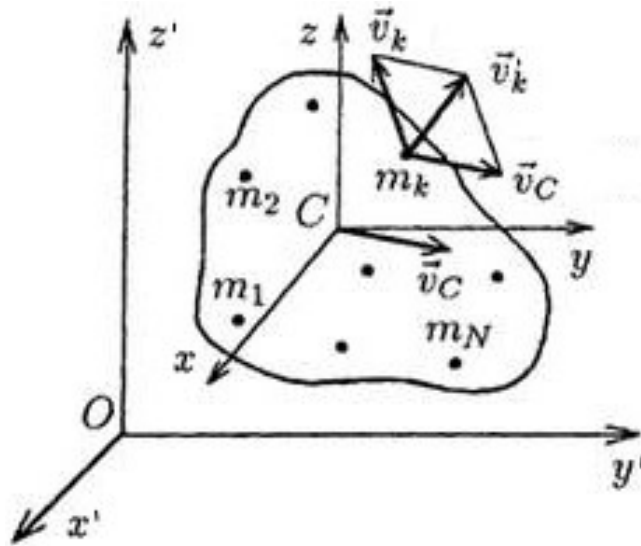


Рисунок 1 — Схема, иллюстрирующая переход от одной системы отсчета к другой

выражаться следующим образом:

$$\Delta \mathcal{E}_k = \Delta \varepsilon_{cm} + \Delta E_{in}. \quad (4)$$

Последняя запись очень удобна, если нас интересует изменение кинетической энергии системы, т.к. мы можем разделить эту задачу на две подзадачи, нам необходимо будет найти изменение энергии как единого целого в ЛСО и изменение энергии в системе начало координат которой совпадает с центром масс системы.

## ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТРЕНИЯ

Рассмотрим изменение энергии центра масс кластера в ЛСО. Для этого нам необходимо будет рассмотреть эффект «динамического трения», который впервые рассмотрел Чандрасекар [16; 27]. Он рассмотрел движение тяжелой частицы  $M$  через бесконечную однородную среду из лёгких невзаимодействующих друг с другом и не сталкивающихся частиц. При этом движении массивная частица своим гравитационным полем изменяет траектории лёгких частиц, передавая им часть своего импульса:

$$M \frac{dV}{dt} = - \frac{4\pi G^2 M^2}{V^2} \ln \Lambda \rho(< V) \quad (5)$$

где  $V$  — это скорость тяжелого объекта,  $\rho(< V)$  — плотность частиц со скоростями меньшими, чем  $V$ , а  $\Lambda = p_{max}/p_{min}$ . Величины  $p_{max}$  и  $p_{min}$  характеризуют максимальное и минимально взаимодействие лёгких частиц с тяжелой. Обычно  $p_{max} \approx L$ , где  $L$  — это размер системы, а  $p_{min} \approx \max(GM/V^2, l)$ , где  $l$  — размер объекта, а  $M$  — масса тяжелой частицы. Динамическое трение может быть качественно понято как появление «хвоста» повышенной плотности за массивным объектом [28]. Этот хвост притягивает к себе движущийся объект и уменьшает его скорость.

В продолжении этой главы мы в качестве примера выведем формулу Чандрасекара, которое испытывает кластер ПЧД массой  $M_{cl}$ , двигаясь в однородном поле невзаимодействующих друг с другом звезд массой  $m_{star}$ . Здесь мы будем обозначать положение, скорость центра масс и массу кластера символами  $r_{cl}, v_{cl}, M_{cl}$ , а соответствующие параметры звезд  $r_{star}, v_{star}, m_{star}$ .

Наша цель — воспроизвести известную формулу Чандрасекара, для этого рассмотрим задачу двух тел. Перейдем в систему отсчета, где звезда движется относительно кластера, движение звезды относительно точечного кластера ПЧД представлено на рисунке (2). Положение звезды относительно кластера  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{star} - \mathbf{r}_{cl}$ , относительная скорость звезды равна  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}$ , изменение положения  $\mathbf{r}$  определяется:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\kappa}{r^2} \mathbf{r} \quad (6)$$

где  $\mu = M_{cl}m_{star}/(M_{cl} + m_{star})$ ,  $\kappa = GM_{cl}m_{star}$ . Изменение относительной скорости равно:

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta \mathbf{v}_{star} - \Delta \mathbf{v}_{cl}. \quad (7)$$



Также воспользуемся законом сохранения импульса:

$$M_{cl}\Delta\mathbf{v}_{cl} + m_{star}\Delta\mathbf{v}_{star} = 0. \quad (8)$$

Из предыдущих двух уравнений получаем изменение скорости кластера:

$$\Delta\mathbf{v}_{cl} = -\frac{m_{star}}{M_{cl} + m_{star}}\Delta\mathbf{V}. \quad (9)$$

Теперь разложим  $\Delta\mathbf{V}$  на перпендикулярную и параллельную составляю-

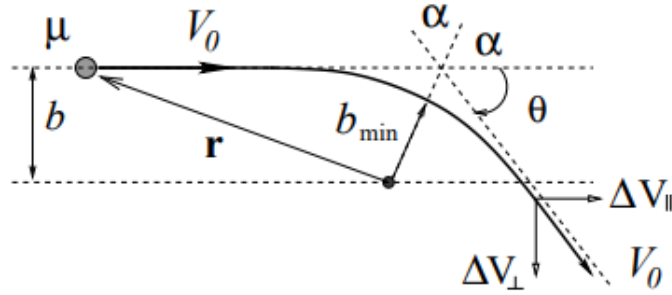


Рисунок 2 — Движение звезды относительно точечного кластера ПЧД

щие:

$$\Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{V}_{\perp} + \Delta\mathbf{V}_{\parallel} \quad (10)$$

где  $|\Delta\mathbf{V}_{\parallel}| = V_0 \cos \theta$ ,  $|\Delta\mathbf{V}_{\perp}| = V_0 \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол рассеивания и  $V_0$  — скорость звезды на бесконечности. Из геометрии угол  $\alpha$  связан с эксцентриситетом орбиты  $e$  соотношением [29]:

$$\cos \alpha = \frac{1}{e}, \quad \cot \frac{\theta}{2} = \sqrt{e^2 - 1} \quad (11)$$

где  $\theta + 2\alpha = \pi$ . Эксцентриситет для гиперболической орбиты равен [30]:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \quad (12)$$

где  $E = \mu V_0^2/2$  — кинетическая энергия,  $L = \mu b V_0$  — момент импульса:

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (13)$$

После некоторых преобразований получаем что:

$$|\Delta \mathbf{V}_\perp| = \frac{2bV_0^3}{G(M_{cl} + m_{star})} \left[ 1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(m_{star} + M_{cl})^2} \right]^{-1}, \quad (14)$$

$$|\Delta \mathbf{V}_\parallel| = 2V_0 \left[ 1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(m_{star} + M_{cl})^2} \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$|\Delta \mathbf{v}_{cl\perp}| = \frac{2bV_0^3 m_{star}}{G(M_{cl} + m_{star})^2} \left[ 1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M_{cl} + m_{star})^2} \right]^{-1}, \quad (16)$$

$$|\Delta \mathbf{v}_{cl\parallel}| = \frac{2V_0 m_{star}}{M_{cl} + m_{star}} \left[ 1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M_{cl} + m_{star})^2} \right]^{-1}. \quad (17)$$

Двигаясь в однородном поле невзаимодействующих друг с другом звезд массой  $m_{star}$  все перпендикулярные отклонения кластера компенсируются симметрией. Однако добавляются параллельные изменения скорости, и кластер будет испытывать замедление. Расчет полной силы сопротивления заключается в следующем. Пусть  $f(\mathbf{v}_{star})$  — числовая плотность звезд. Скорость, с которой кластер сталкивается со звездами с прицельным параметром между  $b$  и  $b + db$  и скоростями между  $\mathbf{v}_{star}$  и  $\mathbf{v}_{star} + d\mathbf{v}_{star}$ , равна:

$$2\pi b db V_0 f(\mathbf{v}_{star}) d^3\mathbf{v}_{star}, \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{cl}}{dt} = 2\pi \mathbf{V}_0 f(\mathbf{v}_{star}) d^3\mathbf{v}_{star} \int_0^{R_s} |\Delta\mathbf{v}_{cl}| b db. \quad (19)$$

Интегрирование по прицельному параметру, где  $R_s$  — размер шарового звездного скопления:

$$\begin{aligned} \int_0^{R_s} |\Delta\mathbf{v}_{cl}| b db &= \int_0^{R_s} \frac{2m_{star}V_0}{M_{cl} + m_{star}} \left[ 1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M_{cl} + m_{star})^2} \right]^{-1} b db = \\ &= \frac{2G^2m_{star}(M_{cl} + m_{star})}{V_0^3} \ln \left( \frac{R_sV_0^2}{G(m_{star} + M_{cl})} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь требуется интегрирование уравнения по пространству скоростей звезд:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} &= 4\pi G^2 m_{star} (M_{cl} + m_{star}) \ln \left( \frac{R_s V_0^2}{G(m_{star} + M_{cl})} \right) \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty \frac{\mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}}{|\mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}|^3} f(\mathbf{v}_{star}) d^3\mathbf{v}_{star}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь осталось наложить условие, что  $v_{star} < v_{cl}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} &= - \frac{4\pi G^2 m_{star} (M_{cl} + m_{star})}{v_{cl}^3} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{G(m_{star} + M_{cl})} \right) \cdot \\ &\cdot \int_0^{v_{cl}} f(v_{star}) d^3v_{star} \mathbf{v}_{cl}. \end{aligned} \quad (22)$$

Звезды имеют максвелловское распределение по скоростям:

$$f(v_{star}) = \frac{n_{star}}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-v_{star}^2/(2\sigma^2)} \quad (23)$$

где  $\sigma$  — дисперсия скоростей звезд внутри скопления звезд,  $n_{star}$  — числовая плотность звезд. Интеграл зависящий от  $f(v_{star})$  можно вычислить

аналитически:

$$\int_0^{v_{cl}} \frac{n_{star}}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-v_{star}^2/(2\sigma^2)} d^3v_{star} = n_{star} \left[ \text{Erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] \quad (24)$$

где  $X = v_{cl}/\sqrt{2}\sigma$ . Окончательная формула для динамического трения:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{cl}}{dt} = & - \frac{4\pi G^2 m_{star} (M_{cl} + m_{star}) n_{star}}{v_{cl}^3} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \cdot \\ & \cdot \left[ \text{Erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] \mathbf{v}_{cl}. \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь домножим на  $M_{cl}$  и получим силу трения:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{df} = M_{cl} \frac{d\mathbf{v}_{cl}}{dt} = & - \frac{4\pi G^2 M_{cl} (M_{cl} + m_{star}) \rho_s}{v_{cl}^3} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \cdot \\ & \cdot \left[ \text{Erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] \mathbf{v}_{cl}. \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\rho_s = m_{star} n_{star}$  — плотность звезд в скоплении. Теперь найдем скорость изменения энергии центра масс кластера ПЧД:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{cm}}{dt} = (\mathbf{F}_{df} \mathbf{v}_{cl}) = & - \frac{4\pi G^2 M_{cl} (M_{cl} + m_{star}) \rho_s}{v_{cl}} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \cdot \\ & \cdot \left[ \text{Erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Теперь необходимо определить изменение кинетической энергии кластера в системе, где центр масс зафиксирован в начале координат. Чтобы решить эту задачу аналитически, мы воспользуемся импульсным приближением, которое впервые использовалось Ферми в расчетах для квантового рассеяния [31]. В импульсном приближении, мы предполагаем что ПЧД в кластере статические объекты, у которых в ходе гравитационного взаимо-

действия с пролетающей звездой изменяются только скорости, а изменение энергии кластера будет выражаться [32]:

$$\Delta E = \sum_i \frac{m_i \Delta v_i^2}{2}. \quad (28)$$

В рамках этого приближения время встречи кластера со звездой намного меньше динамического времени, связанного с внутренней динамикой кластера. Естественно, это приближение носит ограничительный характер и не может быть применено к произвольным астрофизическим системам.

Кластер для нашей задачи представляет собой однородную сферу, заполненную одинаковыми по массе ПЧД. Невозмущенные траектории ПЧД в кластере являются эллипсами, все ПЧД имеют одинаковый период обращения по орбите [33]:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_{cl}}} \quad (29)$$

где  $\rho_{cl}$  — плотность ПЧД в кластере.

Продолжительность встречи кластера и звезды примерно равно времени, которое требуется чтобы пройти рядом внутри скопления звезд, учитывая размер скопления  $R_s$  и скорость сближения  $v$ , продолжительность встречи будет равна:

$$\tau = \frac{R_s}{v}. \quad (30)$$

Условие применимости импульсного приближения [27]:

$$T \gg \tau. \quad (31)$$

Рассмотрим взаимодействие кластера ПЧД с звездой. Предполагаем, что изначально они не связаны друг с другом и сближаются по гиперболической орбите с начальной относительной скоростью  $v$  и прицельным параметром  $b$ . Для достаточно быстрых сближений (больших  $v$ ) отклонение звезд от их первоначальных орбит из — за гравитационного взаимодействия мало, и мы можем аппроксимировать орбиты прямой линией. Массы

кластера и звезды обозначаются через  $M_{cl}$  и  $m_{star}$ . Центр масс кластера

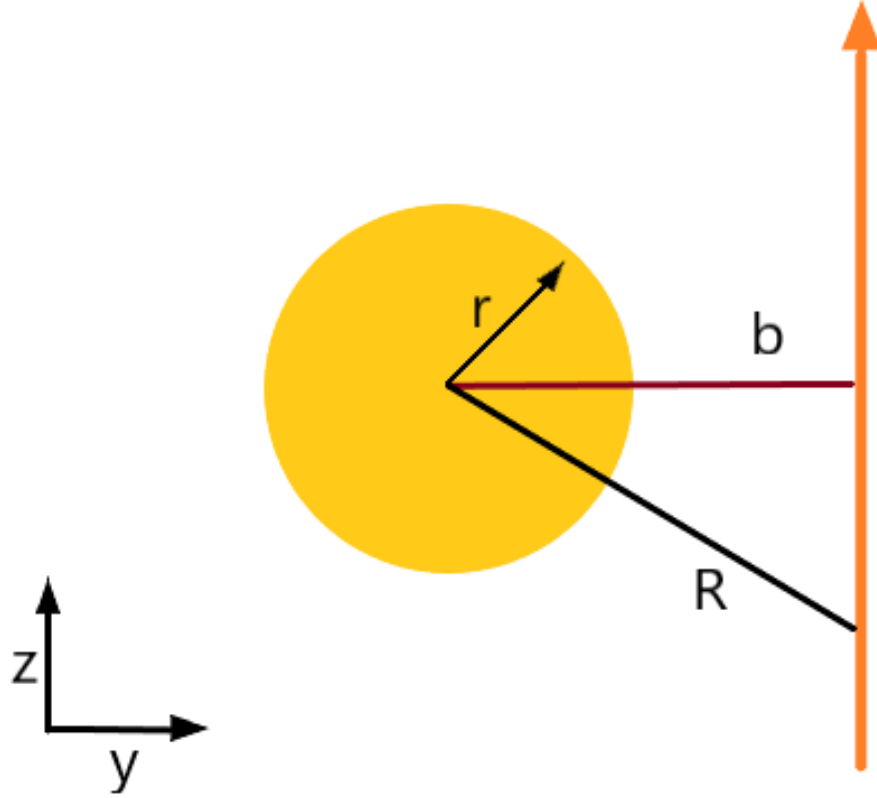


Рисунок 3 — Движение звезды относительно кластера ПЧД

помещаем в начало координат, как было сказано выше центр масс покоится, скорость звезды в этой системе координат  $v = |\mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}| \approx v_{cl}$ , где  $v_{star}$  — скорость звезды и  $v_{cl}$  — скорость центра масс кластера в ЛСО. Координаты ПЧД в кластере  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , координаты пролетающей звезды  $\mathbf{R} = (0, b, vt)$ ,  $\mathbf{R} - \mathbf{r} = -x\mathbf{e}_x + (b - y)\mathbf{e}_y + (z - vt)\mathbf{e}_z$ . Движение звезды относительно кластера ПЧД представлено на рисунке (3). Найдем изменение скорости ПЧД в кластере:

$$\Delta \mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a} dt = Gm_{star} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} dt = \frac{2Gm_{star}}{v_{cl}} \frac{-x\mathbf{e}_x + (b - y)\mathbf{e}_y}{x^2 + (b - y)^2}. \quad (32)$$

Полное изменение энергии кластера в результате встречи:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho_{cl}(\mathbf{r})(\Delta \mathbf{v})^2. \quad (33)$$

Для нашего случая плотность ПЧД в кластере  $\rho_{cl}(\mathbf{r}) = \rho_{cl} = const$ . В сферических координатах  $x = r \cos \phi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ , тогда

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2 \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \rho_{cl} \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2br \sin \phi \sin \theta} = \\ &= 2 \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \rho_{cl} \int_0^{R_{cl}} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{r^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2br \sin \phi \sin \theta} = \\ &= 8\pi \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \rho_{cl} \left[ R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнение (34) включает кинетическую энергию полученную центром масс кластера. Нас интересует изменение кинетической энергии кластера относительно неподвижного центра масс, для этого необходимо вычесть изменение энергии центра масс. Из уравнения (32) найдем изменение скорости центра масс:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V} &= \frac{1}{M_{cl}} \int_0^{R_{cl}} \rho_{cl} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \Delta \mathbf{v} d\phi = \frac{2Gm_{star}}{v_{cl} M_{cl}} \rho_{cl} \cdot \\ &\cdot \int_0^{R_{cl}} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{-r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + (b - r \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_y}{r^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2br \sin \phi \sin \theta} = \\ &= \frac{2Gm_{star}}{v_{cl} b} \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (35)$$

Теперь найдем изменение энергии центра масс:

$$\Delta E_{cm} = \frac{M_{cl} \Delta \mathbf{V}^2}{2} = \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \frac{2M_{cl}}{b^2} = 8\pi \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \frac{\rho_{cl} R_{cl}^3}{3b^2}. \quad (36)$$

Изменение кинетической энергии кластера относительно неподвижного центра масс:

$$\Delta E_{in} = \Delta E - \Delta E_{cm} = 8\pi \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \rho_{cl} \cdot \left[ R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) - \frac{R_{cl}^3}{3b^2} \right]. \quad (37)$$

Как можно заметить существует ограничение на прицельный параметр, он не может быть меньше размера кластера  $R_{cl}$ . Изменение внутренней энергии кластера ПЧД представлено на рисунке (4).

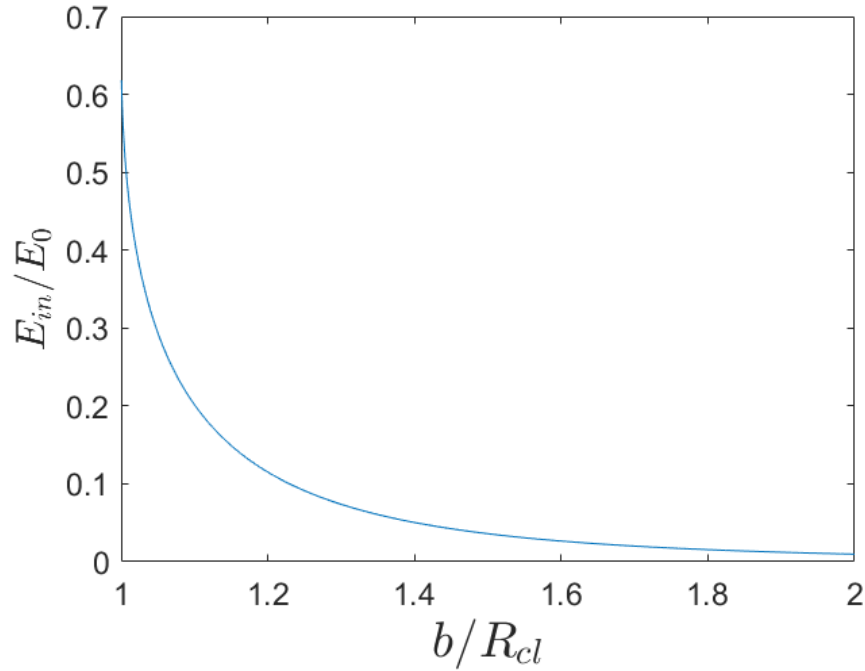


Рисунок 4 — Изменение внутренней энергии кластера ПЧД от прицельного параметра, где  $E_0 = 8\pi \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \rho_{cl} R_{cl}$



Теперь когда мы знаем какую внутреннюю энергию кластер получает от одной звезды, мы можем просуммировать по всем встречам со звездами, которые происходят с частотой  $2\pi b db n_{star} v_{cl}$  в единицу времени:

$$\frac{dE_{in}}{dt} = \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{v_{cl}} \left[ \int_{R_{cl}}^{R_s} R_{cl} b db - \int_{R_{cl}}^{R_s} \frac{R_{cl} db}{3b} - \int_{R_{cl}}^{R_s} \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) b db \right]. \quad (38)$$

После интегрирования получаем:

$$\frac{dE_{in}}{dt} = \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{3v_{cl}} \left[ R_{cl} (R_s^2 - R_{cl}^2) - (R_s^2 - R_{cl}^2)^{3/2} \cdot \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) \right]. \quad (39)$$

Построим график (5) изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера.

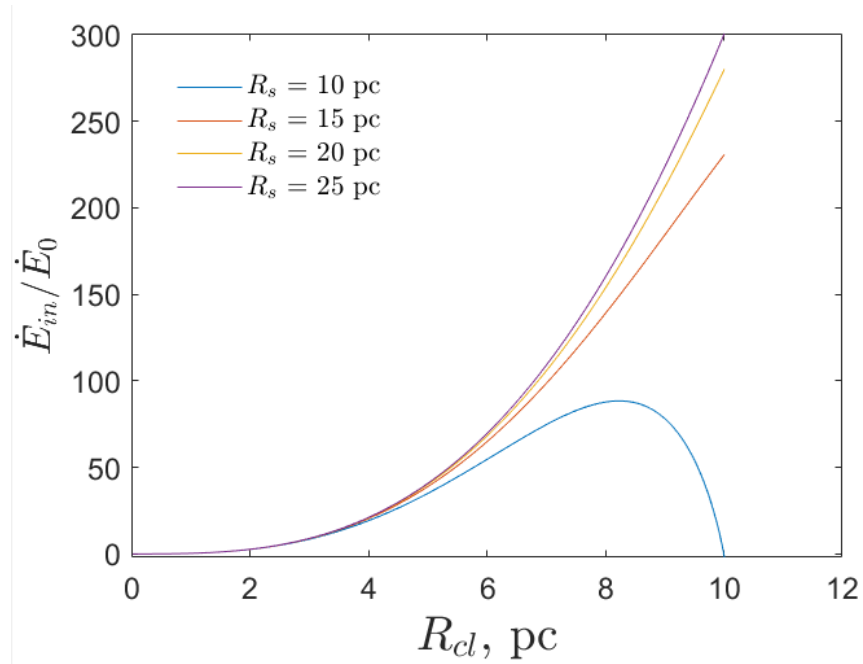


Рисунок 5 — Изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера, где  $\dot{E}_0 = \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{3v_{cl}}$

Теперь необходимо найти энергию, которую кластер получает при пролете звезд сквозь него. Для этого найдем энергию, которую теряет звезда при пролёте сквозь кластер в единицу времени. Для этого воспользуемся формулой Чандрасекара, которую мы вывели в прошлой главе:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi G^2(m_{bh} + m_{star})m_{star}\rho_{cl}}{v_{cl}} \ln\left(\frac{R_{cl}v^2}{G(m_{star} + m_{bh})}\right). \quad (40)$$

Просуммируем этот эффект от всех звезд, которые пролетают сквозь кластер:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{in}}{dt} &= \frac{dE}{dt} \frac{4\pi R_{cl}^3}{3} n_{star} = -\frac{16\pi^2 G^2(m_{star} + m_{bh})\rho_s \rho_{cl}}{3v_{cl}} R_{cl}^3 \cdot \\ &\quad \cdot \ln\left(\frac{R_{cl}v_{cl}^2}{G(m_{star} + m_{bh})}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Для нашей задачи  $m_{star} \gg m_{bh}$ , изменение внутренней энергии кластера учитывая, как пролет сквозь и мимо кластера:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{in}}{dt} &= \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{3v_{cl}} \left[ R_{cl}^3 \ln\left(\frac{R_{cl}v_{cl}^2}{Gm_{star}}\right) + R_{cl}(R_s^2 - R_{cl}^2) - \right. \\ &\quad \left. - (R_s^2 - R_{cl}^2)^{3/2} \arctan\left(\frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Также построим график (6) изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера, но уже с учетом пролета сквозь кластер.

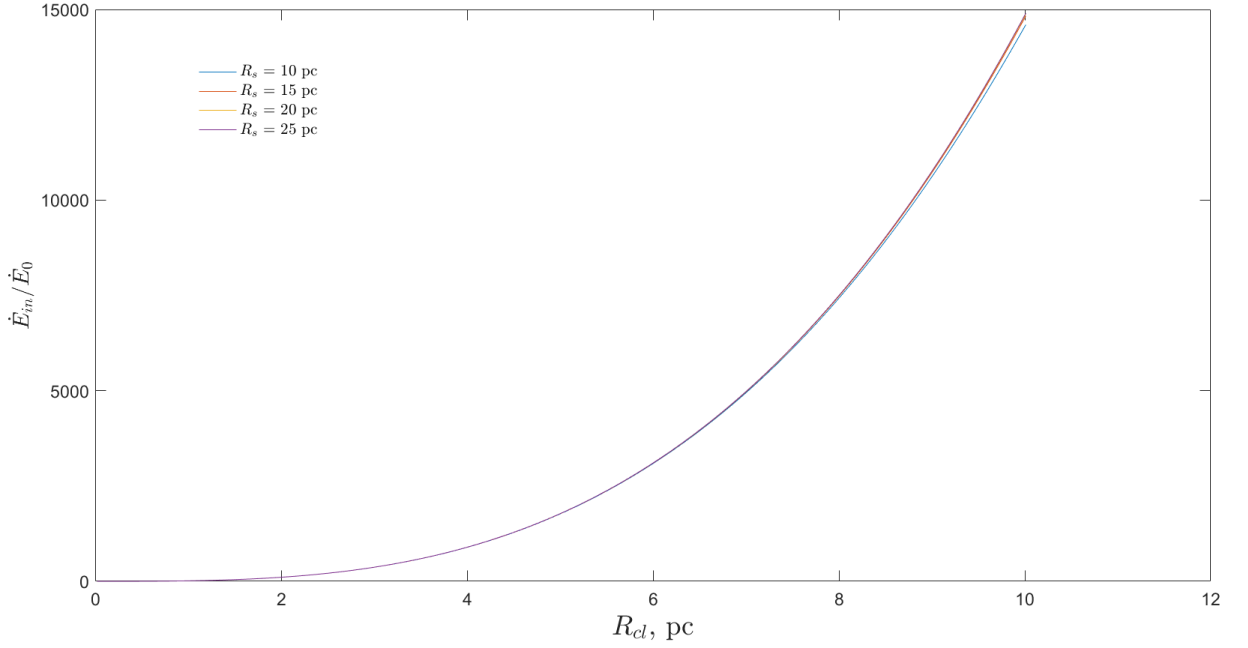


Рисунок 6 — Изменение внутренней энергии в единицу времени от размера кластера, где  $\dot{E}_0 = \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{3v_{cl}}$

## ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ КЛАСТЕРА

Теперь необходимо посмотреть как изменяется полная энергия кластера. Перепишем изменение внутренней энергии следующим образом:

$$\frac{dE_{in}}{dt} = \frac{4\pi G^2 M_{cl} m_{star} \rho_s}{v_{cl}} \left[ \ln \left( \frac{R_{cl} v_{cl}^2}{G m_{star}} \right) + \left( \frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right) - \left( \frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right)^{3/2} \cdot \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) \right]. \quad (43)$$

Для нашей задачи масса кластера  $M_{cl} = 10^5 M_{\odot}$ , масса звезд  $m_{star} = 1 M_{\odot}$ , дисперсия скоростей в шаровом скоплении  $\sigma \approx 2$  км/с, чтобы выполнялось импульсное приближение необходимо положить скорость центра масс кластера  $v_{cl} \approx 100$  км/с. Также появляется возможность упростить

уравнение (27):

$$\frac{d\varepsilon_{cm}}{dt} = - \frac{4\pi G^2 M_{cl}^2 \rho_s}{v_{cl}} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{GM_{cl}} \right). \quad (44)$$

Изменение полной энергии кластера:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{dE_{in}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{cm}}{dt} = \frac{4\pi G^2 M_{cl} m_{star} \rho_s}{v_{cl}} & \left[ \ln \left( \frac{R_{cl} v_{cl}^2}{Gm_{star}} \right) + \frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 - \right. \\ & \left. - \left( \frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) - \frac{M_{cl}}{m_{star}} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{GM_{cl}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Построим график (7) изменение полной энергии в единицу времени от размера кластера.

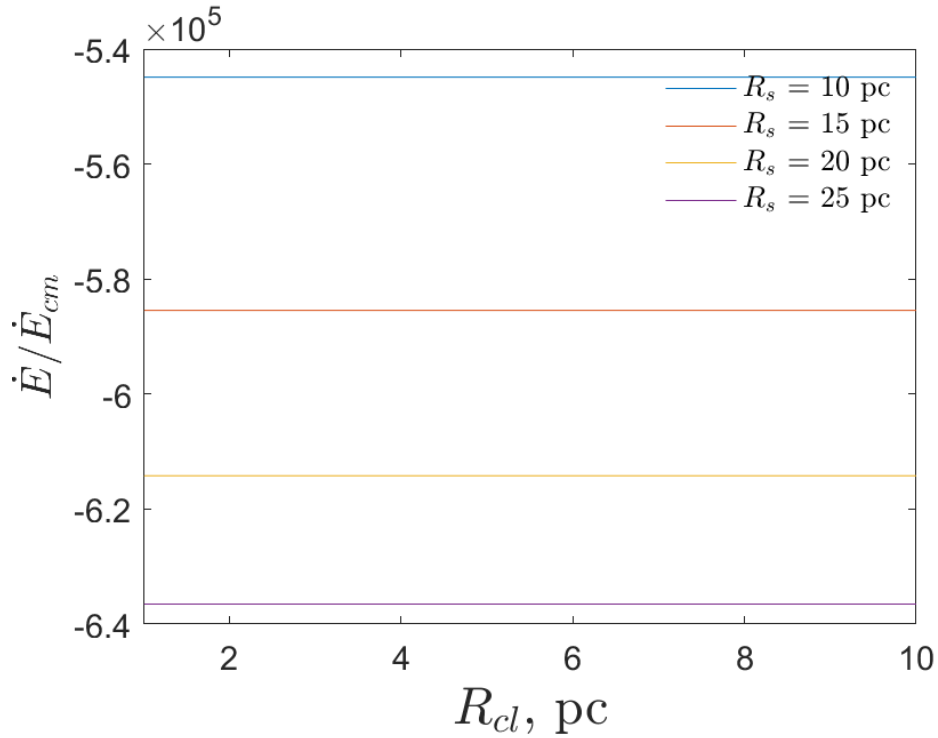


Рисунок 7 — Изменение полной энергии в единицу времени от размера кластера, где  $\dot{E}_{cm} = \frac{4\pi G^2 M_{cl} m_{star} \rho_s}{v_{cl}}$

Теперь построим график (8) отношение изменения энергии в единицу времени «рыхлого» кластера к точечному от размера кластера.

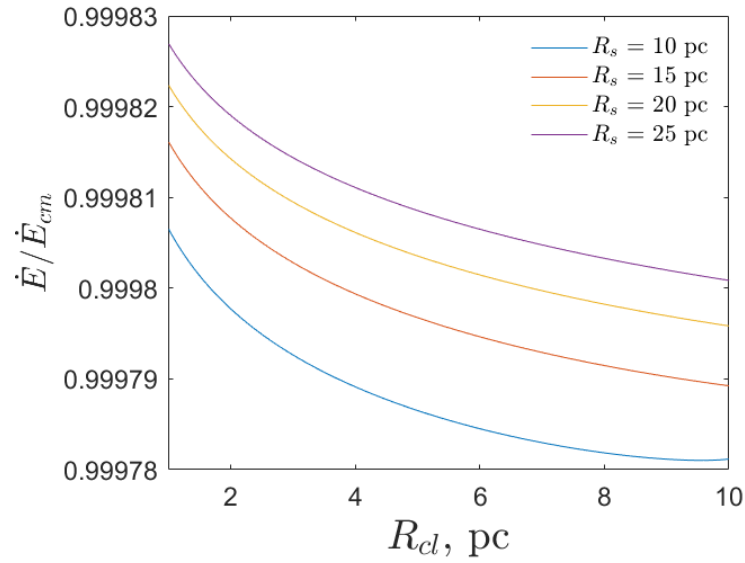


Рисунок 8 — Отношение изменения энергии «рыхлого» кластера к точечному от размера кластера

Также был рассмотрен отдельно фактор влияния массы кластера. Для этого построили график (9) изменение полной энергии в единицу времени от массы кластера.

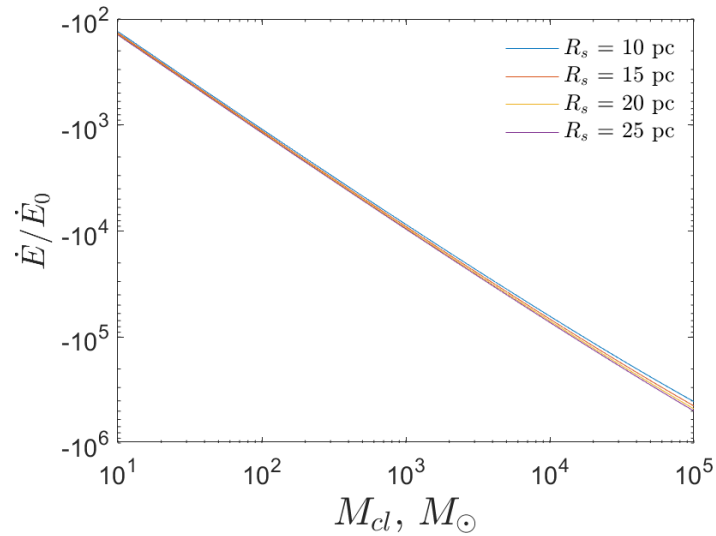


Рисунок 9 — Изменение полной энергии в единицу времени от массы кластера

Здесь представлен график (10) отношение изменения энергии в единицу времени «рыхлого» кластера к точечному от массы кластера.

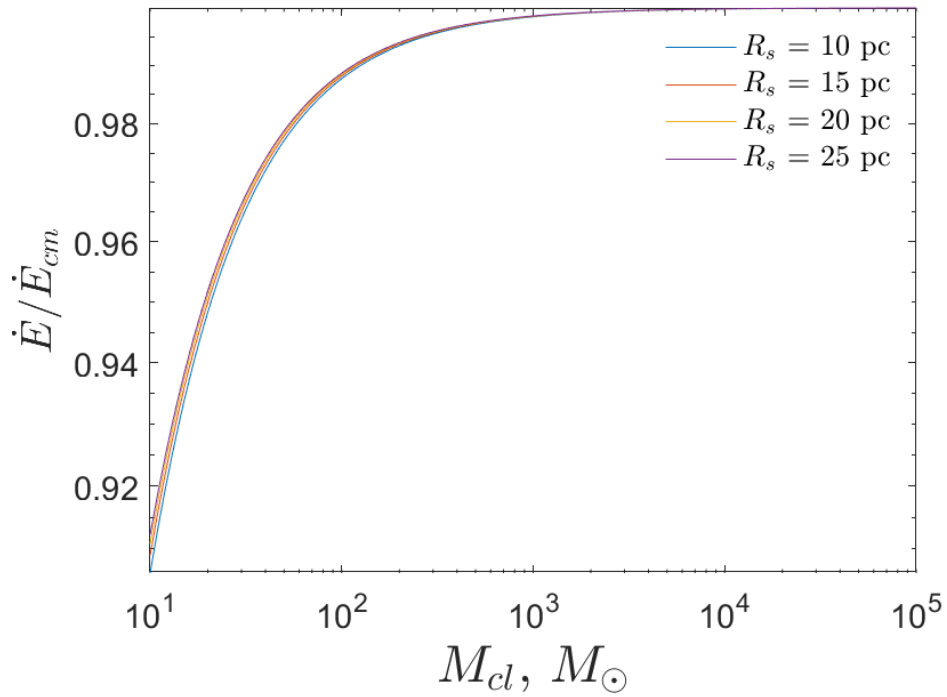


Рисунок 10 — Отношение изменения энергии «рыхлого» кластера к точечному от массы кластера

Как видно из рисунков роль массы кластера играет также малую роль.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучалось взаимодействие кластера ПЧД со звездами шарового скопления. Целью работы является пересмотр ограничения на плотность ПЧД, как скрытой массы, полученного для одиночных ПЧД по их возможному взаимодействию со скоплением звезд. В ходе работы было получено выражение для изменения энергии кластера в единицу времени (45). Были учтены следующие динамические эффекты: приливные силы при рассеянии звезды на кластере, рассеяние звезды на кластере как на целом, динамическое трение при прохождении кластера сквозь скопление звезд, динамическое трение при прохождении звезды сквозь кластер. Рассматривались возможные диапазоны различных параметров кластера ПЧД. На основе его было получено отношение изменения энергии «рыхлого» кластера к точечному. Как можно заметить по графикам (8), (10) в рамках использованного приближения эффекты, связанные с неточечностью кластера ПЧД, можно считать малыми.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // Soviet Astron. AJ (Engl. Transl. ), — 1967. — Т. 10. — С. 602.
2. *Hawking S.* Gravitationally collapsed objects of very low mass // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1971. — Т. 152. — С. 75.
3. *Khlopov M. Y.* Primordial black holes // Research in Astronomy and Astrophysics. — 2010. — Т. 10. — С. 495—528.
4. *García-Bellido J., Morales E. R.* Primordial black holes from single field models of inflation // Physics of the Dark Universe. — 2017. — Т. 18. — С. 47—54.
5. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. Abbott [et al.] // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 116.
6. 1-OGC: The First Open Gravitational-wave Catalog of Binary Mergers from Analysis of Public Advanced LIGO Data / A. H. Nitz [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2019.
7. Did LIGO Detect Dark Matter? / S. Bird [et al.] // Physical review letters. — 2016. — Vol. 116 20. — P. 201301.
8. *Ferrarese L., Merritt D.* A Fundamental Relation Between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies // ApJ. — 2000. — Т. 539.
9. *Dokuchaev V., Eroshenko Y., Rubin S.* Quasars formation around clusters of primordial black holes // Gravitation and Cosmology. — 2005.
10. *Dokuchaev V., Eroshenko Y. N., Rubin S. G.* Early formation of galaxies induced by clusters of black holes // Astronomy Reports. — 2008. — Т. 52. — С. 779—789.
11. *Khromykh L. A., Kirillov A. A.* The gravitational dynamics of the primordial black holes cluster // Journal of Physics: Conference Series. — 2019.
12. *Dolgov A.* Massive Primordial Black Holes // arXiv: Cosmology and Nongalactic Astrophysics. — 2019.



13. Constraints on primordial black holes / B. Carr [et al.] // Rept. Prog. Phys. — 2021. — Vol. 84, no. 11. — P. 116902. — arXiv: [2002.12778 \[astro-ph.CO\]](#).
14. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: [1807.06590 \[astro-ph.CO\]](#).
15. *Brandt T. D.* Constraints on MACHO Dark Matter from Compact Stellar Systems in Ultra-Faint Dwarf Galaxies // The Astrophysical Journal. — 2016. — T. 824.
16. *Chandrasekhar S.* Dynamical Friction. I. General Considerations: the Coefficient of Dynamical Friction. // — 1943. — T. 97. — C. 255.
17. *King I. R.* An Introduction to Classical Stellar Dynamics. — University of California, Berkeley, 1994.
18. *Richstone D. O.* Collisions of Galaxies in Dense Clusters. I. Dynamics of Collisions of Two Galaxies // — 1975. — T. 200. — C. 535–547.
19. *Lee H. M., Ostriker J. P.* Cross Sections for Tidal Capture Binary Formation and Stellar Merger // — 1986. — T. 310. — C. 176.
20. *Press W. H., Teukolsky S. A.* On formation of close binaries by two-body tidal capture. // — 1977. — T. 213. — C. 183–192.
21. *Heggie D. C.* Binary evolution in stellar dynamics. // — 1975. — T. 173. — C. 729–787.
22. *Bahcall J. N., Hut P., Tremaine S.* Maximum mass of objects that constitute unseen disk material // — 1985. — T. 290. — C. 15–20.
23. *Fuller G. M., Kusenko A., Takhistov V.* Primordial Black Holes and  $r$ -Process Nucleosynthesis // Phys. Rev. Lett. — 2017. — T. 119, вып. 6. — C. 061101.
24. *Weinberg M. D., Shapiro S. L., Wasserman I.* The Dynamical Fate of Wide Binaries in the Solar Neighborhood // — 1987. — T. 312. — C. 367.
25. *Moore B.* An Upper Limit to the Mass of Black Holes in the Halo of the Galaxy // — 1993. — T. 413. — C. L93. — arXiv: [astro-ph/9306004 \[astro-ph\]](#).

26. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики, Том 1, Механика. — Москва : Физмалит, 2005.
27. *Binney J., Tremaine S.* Galactic dynamics. Т. 13. — Princeton university press, 2011.
28. *Mulder W.* Dynamical friction on extended objects // Astronomy and Astrophysics. — 1983. — Т. 117. — С. 9—16.
29. Some Geometrical Aspects of Classical Coulomb Scattering / J. W. Adolph [et al.] // American Journal of Physics. — 1972. — Vol. 40. — P. 1852—1857.
30. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, Том 1, Механика. — Москва : Наука, 2004.
31. *Fermi E.* Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate // Ricerca scientifica. — 1936. — Т. 7, № 2. — С. 13—52.
32. *Banik U., Bosch F. C. van den.* A fully general, non-perturbative treatment of impulsive heating // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2021.
33. *Bate R. R., Mueller D. D., White J. E.* Fundamentals of Astrodynamics. — Courier Dover Publications, Mineola, 1971.