

*Исследование динамики взаимодействия  
кластера ПЧД со звездами*

*Выполнил:*

*Пугачев С.О.*

*Научный руководитель:*

*в.н.с., Белоцкий К.М.*

# Введение

*В данной работе рассматривается рассеяние звезд на кластере первичных черных дыр (ПЧД) внутри шарового звездного скопления. Рассматриваются следующие эффекты:*

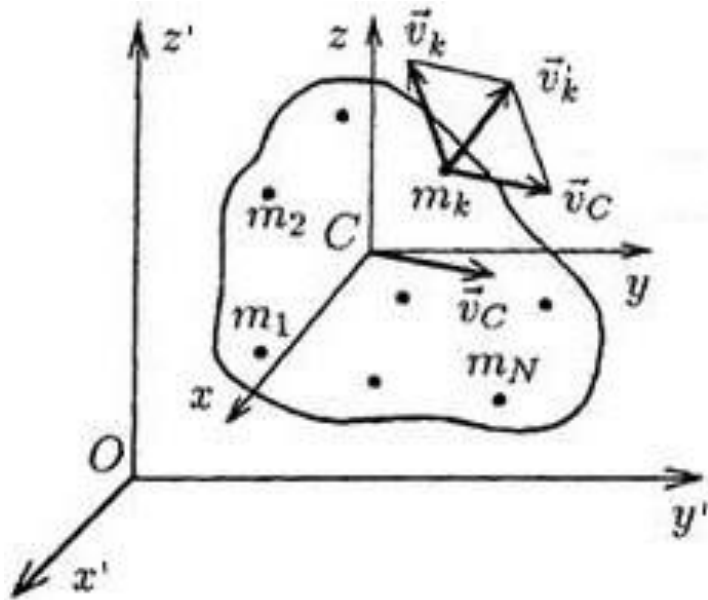
- 1) Учет динамического трения при пролёте точечного кластера сквозь шаровое скопление.*
- 2) Рассеяние звезд на кластере с учетом приливных сил.*
- 3) Учет динамического трения при пролёте звезды сквозь кластер.*

*В ходе этой работы необходимо понять, как изменяется полная энергия кластера при взаимодействии со скоплением звезд.*

# Использование теоремы Кёнига

Для оценки каждого эффекта удобно воспользоваться теоремой Кёнига.

Кинетическая энергия кластера ПЧД равна сумме кинетической энергии центра масс кластера, в предположении, что в нём сосредоточена вся масса кластера, и кинетической энергии движения относительно центра масс:



$$\mathcal{E}_k = \varepsilon_{cm} + E_{in} = \frac{MV^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

# Изменение энергии кластера как целого за счет динамического трения внутри скопления звезд

(в системе покоя шарового скопления)

Сила действующая на точечный кластер при пролёте сквозь шаровое скопление:

$$\mathbf{F}_{df} = - \frac{4\pi G^2 M_{cl}(M_{cl} + m_{star})\rho_s}{v_{cl}^3} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right) \mathbf{v}_{cl}$$

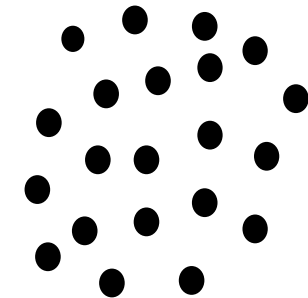
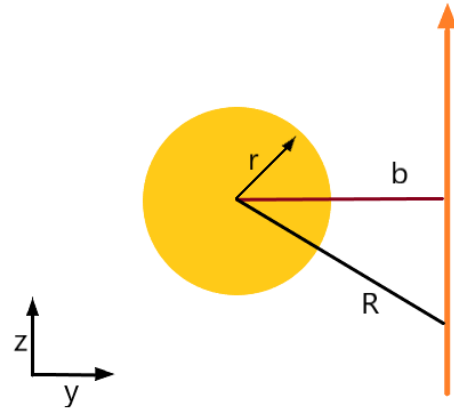
Энергия, которую теряет кластер:

$$\frac{d\varepsilon_{cm}}{dt} = (\mathbf{F}_{df} \mathbf{v}_{cl}) = - \frac{4\pi G^2 M_{cl}(M_{cl} + m_{star})\rho_s}{v_{cl}} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{G(M_{cl} + m_{star})} \right)$$



# Изменение внутренней энергии кластера за счет пролёта одной звезды мимо кластера – (1)

(учёт приливного воздействия)



$\mathbf{R} = (0, b, vt)$  - координаты пролетающей звезды

$\mathbf{r} = (x, y, z)$  - координаты ПЧД в кластере

$v = |\mathbf{v}_{star} - \mathbf{v}_{cl}| \approx v_{cl}$  - скорость звезды в системе отсчета где покоится

$$\Delta \mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{a} dt = Gm_{star} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} dt = \frac{2Gm_{star}}{v_{cl}} \frac{-x\mathbf{e}_x + (b-y)\mathbf{e}_y}{x^2 + (b-y)^2}$$

# Изменение внутренней энергии кластера за счет пролёта одной звезды мимо кластера – (2)

Изменение энергии кластера:

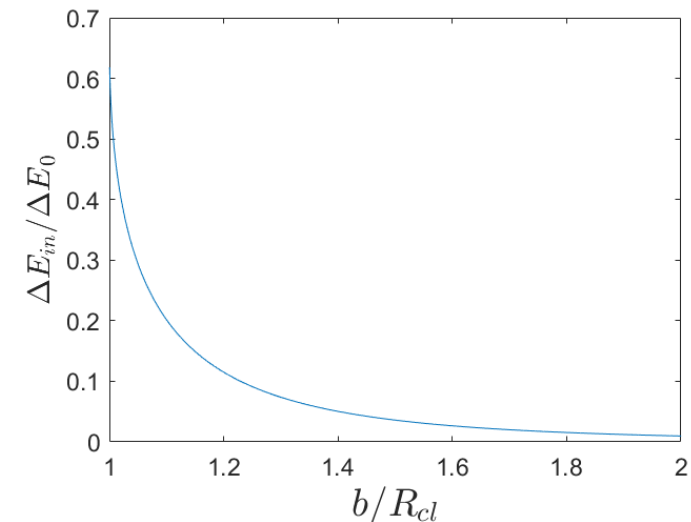
$$\Delta E = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho_{cl}(\mathbf{r})(\Delta\mathbf{v})^2 \quad \Delta E = 8\pi \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \rho_{cl} \left[ R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) \right]$$

Изменение скорости центра масс:

$$\Delta\mathbf{V} = \frac{1}{M_{cl}} \int d^3\mathbf{r} \rho_{cl}(\mathbf{r})(\Delta\mathbf{v}) \quad \Delta E_{cm} = \frac{M_{cl}\Delta\mathbf{V}^2}{2} = \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \frac{2M_{cl}}{b^2} = 8\pi \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \frac{\rho_{cl}R_{cl}^3}{3b^2}$$

Изменение внутренней энергии кластера:

$$\Delta E_{in} = \Delta E - \Delta E_{cm} = 8\pi \left( \frac{Gm_{star}}{v_{cl}} \right)^2 \rho_{cl} \cdot \left[ R_{cl} - \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) - \frac{R_{cl}^3}{3b^2} \right]$$

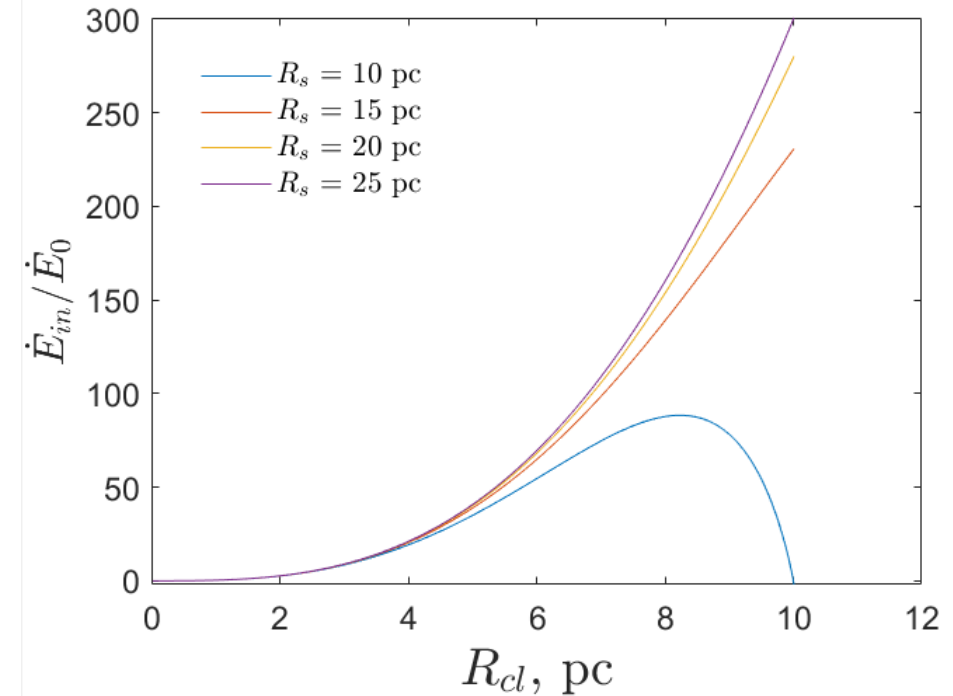


# Изменение внутренней энергии кластера для всего скопления звезд

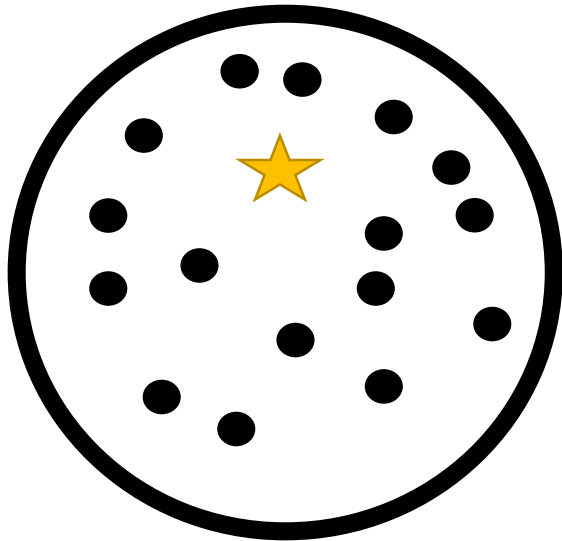
Теперь когда мы знаем какую внутреннюю энергию кластер получает от одной звезды, мы можем просуммировать по всем встречам со звездами, которые происходят с частотой  $2\pi b db n_{star} v_{cl}$  в единицу времени:

$$\frac{dE_{in}}{dt} = \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{v_{cl}} \left[ \int_{R_{cl}}^{R_s} R_{cl} b db - \int_{R_{cl}}^{R_s} \frac{R_{cl} db}{3b} - \int_{R_{cl}}^{R_s} \sqrt{b^2 - R_{cl}^2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{b^2 - R_{cl}^2}} \right) b db \right]$$

$$\frac{dE_{in}}{dt} = \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{3v_{cl}} \left[ R_{cl} (R_s^2 - R_{cl}^2) - (R_s^2 - R_{cl}^2)^{3/2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right) \right]$$



# Изменение внутренней энергии кластера за счет пролёта звезды сквозь него



Энергия, которую теряет звезда при пролёте  
сквозь кластер в единицу времени:

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{4\pi G^2 (m_{bh} + m_{star}) m_{star} \rho_{cl}}{v_{cl}} \ln \left( \frac{R_{cl} v_{cl}^2}{G(m_{star} + m_{bh})} \right)$$

Просуммируем этот эффект от всех звезд,  
которые пролетают сквозь кластер:

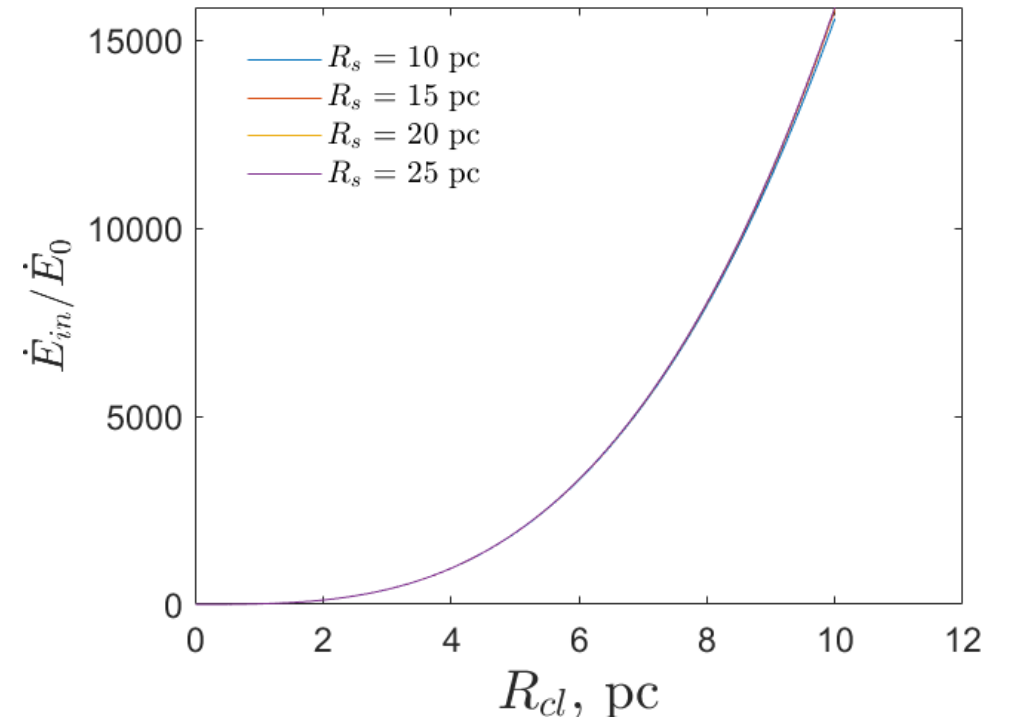
$$\begin{aligned} \frac{dE_{in}}{dt} &= \frac{dE}{dt} \frac{4\pi R_{cl}^3}{3} n_{star} \\ &= - \frac{4\pi G^2 (m_{star} + m_{bh}) M_{cl} \rho_s}{v_{cl}} \ln \left( \frac{R_{cl} v_{cl}^2}{G(m_{star} + m_{bh})} \right) \end{aligned}$$



# Изменение внутренней энергии кластера от его размера

Для нашей задачи  $m_{star} \gg m_{bh}$ , изменение внутренней энергии кластера учитывая, как пролет сквозь и мимо кластера:

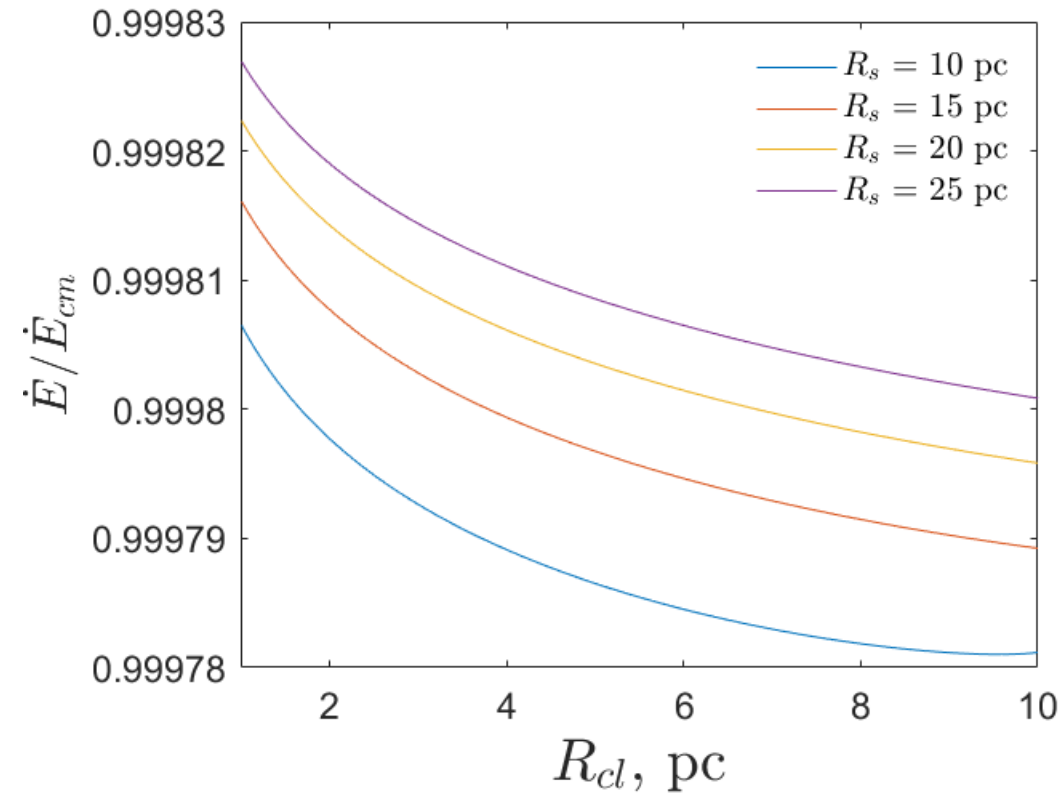
$$\frac{dE_{in}}{dt} = \frac{16\pi^2 G^2 m_{star} \rho_s \rho_{cl}}{3v_{cl}} \left[ \underbrace{R_{cl}^3 \ln \left( \frac{R_{cl} v_{cl}^2}{G m_{star}} \right)}_{\text{пролет сквозь кластер}} + \underbrace{R_{cl}(R_s^2 - R_{cl}^2) - (R_s^2 - R_{cl}^2)^{3/2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right)}_{\text{пролет мимо кластера}} \right]$$



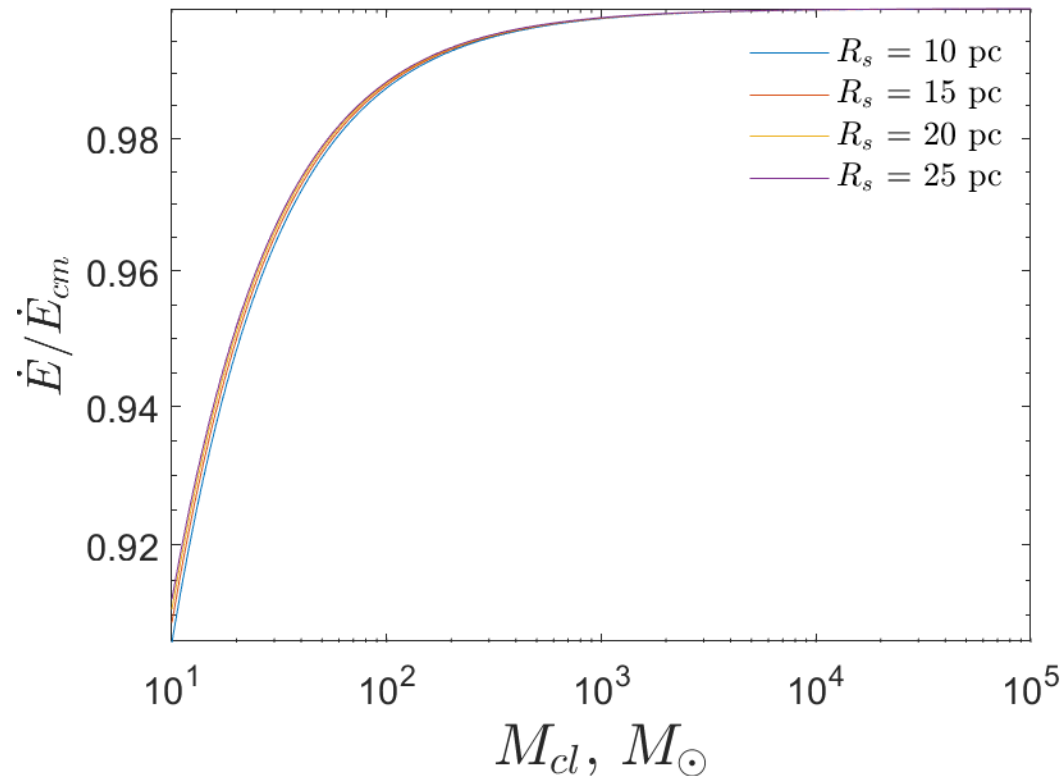
# Изменение полной энергии (внутренней и как целого) кластера

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{dE_{in}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{cm}}{dt} = \frac{4\pi G^2 M_{cl} m_{star} \rho_s}{v_{cl}} & \left[ \underbrace{\ln \left( \frac{R_{cl} v_{cl}^2}{G m_{star}} \right)}_{\text{пролет сквозь кластер}} \right. \\
 & + \underbrace{\frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 - \left( \frac{R_s^2}{R_{cl}^2} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left( \frac{R_{cl}}{\sqrt{R_s^2 - R_{cl}^2}} \right)}_{\text{пролет мимо кластера}} \\
 & \left. - \underbrace{\frac{M_{cl}}{m_{star}} \ln \left( \frac{R_s v_{cl}^2}{G M_{cl}} \right)}_{\text{пролет сквозь скопление}} \right]
 \end{aligned}$$

# Отношение изменения энергии «рыхлого» кластера к точечному от размера кластера



*Отношение изменения полной энергии «рыхлого» кластера к точечному от массы кластера*



# Заключение

*В данной работе изучалась динамика взаимодействия кластера ПЧД со звездами шарового скопления. Целью работы является пересмотр ограничений на долю ПЧД в составе скрытой массы, полученных ранее для одиночных ПЧД, по их возможному взаимодействию с шаровым звездным скоплением в том случае, если ПЧД образуют кластер. В ходе работы было получено выражение для изменения энергии кластера в единицу времени. Были учтены следующие динамические эффекты:*

- 1) Учет динамического трения при пролёте точечного кластера сквозь шаровое скопление.*
- 2) Рассеяние звезд на кластере с учетом приливных сил.*
- 3) Учет динамического трения при пролёте звезды сквозь кластер.*

*Было получено отношение изменения энергии «рыхлого» кластера к точечному. Главным результатом работы является, то что в рамках использованного приближения эффекты, связанные с неточечностью кластера ПЧД, можно считать малыми.*

*Спасибо за внимание!*