Министерство науки и высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НИЯУ «МИФИ»)

УДК 539.17

# ОТЧЁТ
# О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

# ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ И ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ПРИ НИЗКИХ И СРЕДНИХ ЭНЕРГИЯХ И ПРОБЛЕМА МИКРОСТРУКТУРЫ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

| | | |
|---|---|---|
| Исполнитель темы<br>студент группы Б19-102 | ________________________<br>подпись, дата | Д. А. Ситьков |
| Научный руководитель<br>д-р физ.-мат. наук, проф. | ________________________<br>подпись, дата | А. Л. Барабанов |

Москва 2022

# Оглавление

# Введение

В процессе деления ядро проходит процесс, который заканчивается появлением двух возбужденных ядерных осколков. Они, в свою очередь, претерпевают череду распадов, снимающих возбуждение, и оказываются в своих основных состояниях (либо же в изомерных возбуждённых состояниях).

По мере протекания процесса форма ядра меняется, поддерживая и удлиняя образующийся шейный регион между двумя будущими осколками. В итоге система переходит потенциальный барьер и стремится к неадиабатичному процессу разрыва данного региона — образуются два разлетающихся ядерных осколка. Таким образом, для описания данного процесса требуется аналитическая формула, способная описать поверхность ядра в ходе такой деформации. Далее следует решить задачу Шрёдингера для потенциала, в котором находятся нуклоны в процессе деформации ядерной поверхности.

В данной работе будет описана подходящая формула задания поверхности ядра, представленная в работе [1]. Затем будет представлена первая часть решения задачи Шрёдингера в реальном потенциале ядра — решение задачи для модели двухцентрового гармонического осциллятора из работы [2] без учёта спин-орбитального взаимодействия нуклонов.

Кроме процесса деления ядер в данной работе рассматривается важный вопрос ядерного синтеза. А именно, при проектирования установок, в которых предполагается осуществление управляемой реакции термоядерного синтеза $\mathrm{d} + \mathrm{t} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n}$ с образованием нейтронов с энергией 14,1 МэВ (в системе центра масс), представляет интерес исследование реакций, в которых образуются ядра (посредством взаимодействия нейтронов с ядрами атомов конструкционных материалов и других элементов, использующихся в данных установках) в относительно долгоживущих изомерных состояниях, распадающихся посредством испускания довольно жёстких гамма-квантов: учёт этих гамма-квантов важен для оценки радиационной стойкости материалов, используемых в проектируемых установках.

В последней версии библиотеки IRDFF-II (International Reactor Dosimetry and Fusion File) [3] (базы данных EXFOR) всего 4 реакции представляют собой образования ядеризомеров под действием нейтронов. В данной работе будут рассмотрены 2 из них:

1. ${}^{115}\mathrm{In}(\mathrm{n}, \mathrm{n}')^{115\mathrm{m}}\mathrm{In}$,
2. ${}^{115}\mathrm{In}(\mathrm{n}, 2\mathrm{n})^{114\mathrm{m}}\mathrm{In}$.

В настоящее время достигнут значительный прогресс в области численного моделирования ядерных реакций. Подходящим примером может служить программный комплекс TALYS-1.9 [4] с открытым кодом. Этот комплекс позволяет моделировать столкновения ядер с лёгкими частицами, в том числе нейтронами, с энергиями до 200 МэВ.

Таким образом, необходимо сравнить имеющиеся данные по сечениям образования ядер-изомеров в реакциях с нейтронами, как экспериментальные — с использованием данных из базы данных EXFOR, так и оцененные — из базы данных ENDF, с привлечением результатов расчётов, выполненных с помощью программного комплекса TALYS-1.9 со стандартным набором входных параметров из библиотеки RIPL-3 (Reference Input Parameter Library) [5].

# 1 Параметризация поверхности ядра

В работе [1] в цилиндрической системе координат произведена параметризация поверхности ядра в виде

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1(z) = b_1\sqrt{1 - \left(\dfrac{z}{a_1}\right)^2}, & z \le z_1, \\ \rho_3(z) = -\operatorname{sgn}\left(1/d\right)\sqrt{R_3^2 - (z - c_3)^2} + 1/d, & z_1 < z < z_2, \\ \rho_2(z) = b_2\sqrt{1 - \left(\dfrac{z - c_2}{a_2}\right)^2}, & z \ge z_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

где заданные параметры $a_1, b_1, a_2, b_2$ — полуоси эллипсоидов первого и второго осколков соответственно, $c_2$ — степень растянутости ядра; величины $z_1, z_2$ — точки перехода к шейному региону, $R_3$ — радиус окружности шейного региона, $\left(c_3, 1/d\right)$ — центр окружности шейного региона, определяются из системы нелинейных уравнений (1.2),

$$\begin{gathered} \rho_1(z_1) = \rho_3(z_1), \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho_1(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho_3(z)\right]_{z=z_1}, \\ \rho_2(z_2) = \rho_3(z_2), \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho_2(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho_3(z)\right]_{z=z_2}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

к которой необходимо добавить условие сохранения объёма (1.3):

$$\int\limits_{-a_1}^{z_1} \rho_1^2(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{z_1}^{z_2} \rho_3^2(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{z_2}^{a_2+c_2} \rho_2^2(z)\,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}a_1 b_1^2 + \frac{4}{3}a_2 b_2^2. \tag{1.3}$$

Реальное поле, в котором находятся нуклоны в ядре, описывается потенциалом Вудса-Саксона [6]

$$V_{\mathrm{WS}}(\rho, z) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{\Delta(\rho,z)}{a}\right)}, \tag{1.4}$$

где $V_0$ — величина, определяющая глубину потенциала, $a$ — параметр диффузности, характеризующий степень размытости края потенциальной ямы, $\Delta(\rho, z)$ — функция, определяющая расстояние между точкой $(\rho, z)$ и поверхностью ядра.

Функция $\rho(z)$ параметризации (1.1) поверхности ядра входит в функцию $\Delta(\rho, z)$.

Спин-орбитальное взаимодействие нуклонов описывается дополнительным слагаемым к потенциалу Вудса-Саксона (1.4) вида

$$\hat{V}_{ls} = -\lambda \left( \frac{1}{2mc} \right)^2 \big( \boldsymbol{\nabla} V_{\mathrm{WS}} \times \hat{\mathbf{p}} \big) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \tag{1.5}$$

где $\lambda = 35$ — безразмерная константа взаимодействия, $m$ — масса нуклона, $c$ — скорость света, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ — оператор импульса, $\hat{\mathbf{s}} = {}^{\boldsymbol{\sigma}}\!/_{2}$ — оператор спина ($\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули).

Уравнение Шрёдингера для полного потенциала

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\mathrm{WS}} + \hat{V}_{ls} \right) \Psi(\rho, z, \varphi) = E \Psi(\rho, z, \varphi) \tag{1.6}$$

аналитически не решается.

Базис для диагонализации полного потенциала может быть получен из решения задачи с потенциалом двухцентрового симметричного осциллятора.

# 2 Волновая функция задачи

Потенциал двухцентрового симметричного осциллятора дан в работе [2]. Решим задачу без учёта спин-орбитального взаимодействия.

Нуклон массой $m$ находится в поле

$$V(\rho, z) = \frac{m\omega^2\rho^2}{2} + \frac{m\omega^2\left(|z| - z_0\right)^2}{2}, \tag{2.1}$$

где частота $\omega = \omega_0 {}^R\!/_r$, а величина $r = r(z_0)$ может быть аналитически определена из уравнения

$$2r^3 + 3r^2 z_0 - z_0^3 - 2R^3 = 0, \tag{2.2}$$

а, согласно [7, §4, п. 1], величина $\hbar\omega_0 = 40A^{-1/3}$ (MeV) и $R = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1{,}2$ (Fm).

Уравнение Шрёдингера $\hat{\mathcal{H}}_0\Phi = E\Phi$ в этом потенциале записывается в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\rho^2 - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\left(|z| - z_0\right)^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\Phi = 0. \tag{2.3}$$

## 2.1 Угловая функция

Разделим переменные в первый раз

$$\Phi(\rho, z, \varphi) = \Omega(\rho, z) v(\varphi). \tag{2.4}$$

Получим, что уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{\Omega_{\rho\rho}}{\Omega}\rho^2 + \frac{\Omega_\rho}{\Omega}\rho + \frac{\Omega_{zz}}{\Omega}\rho^2 - \frac{m^2\omega^2\rho^4}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\left(|z| - z_0\right)^2\rho^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\rho^2 = -\frac{v''}{v}. \tag{2.5}$$

Поскольку слева от знака равенства стоит функция, зависящая только от $(\rho, z)$, а справа — только от $\varphi$, то

$$-\frac{v''(\varphi)}{v(\varphi)} = A_1^2 = \mathrm{const}, \tag{2.6a}$$

$$v''(\varphi) + A_1^2 v(\varphi) = 0, \tag{2.6b}$$

$$v(\varphi) = \mathrm{const}_1 \cdot e^{iA_1\varphi} + \mathrm{const}_2 \cdot e^{-iA_1\varphi}. \tag{2.6c}$$

Из условия $v(\varphi + 2\pi) = v(\varphi)$ получим, что $A_1 = n_\varphi \in \mathbb{Z}$ — целое число.

Физически осмысленно будет взять одно фундаментальное решение в виде, например, $v(\varphi) = \mathrm{const} \cdot e^{in_\varphi \varphi}$. Из условия нормировки $\int_0^{2\pi} |v|^2 \, \mathrm{d}\varphi = 1$ получим, что

$$v(\varphi) = \frac{e^{in_\varphi \varphi}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2.7}$$

## 2.2 Радиальная функция

Разделяя переменные во второй раз

$$\Omega(\rho, z) = \chi(\rho)\zeta(z), \tag{2.8}$$

получим, что левая часть уравнения (2.5) представима в виде

$$\frac{\zeta''}{\zeta} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\left(|z| - z_0\right)^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n_\varphi^2}{\rho^2} + \frac{m^2\omega^2\rho^2}{\hbar^2} - \frac{\chi''}{\chi} - \frac{1}{\rho}\frac{\chi'}{\chi}. \tag{2.9}$$

Отсюда,

$$\frac{n_\varphi^2}{\rho^2} + \frac{m^2\omega^2\rho^2}{\hbar^2} - \frac{\chi''(\rho)}{\chi(\rho)} - \frac{1}{\rho}\frac{\chi'(\rho)}{\chi(\rho)} = -A_2 = \mathrm{const}, \tag{2.10a}$$

$$\chi''(\rho) + \frac{1}{\rho}\chi'(\rho) + \left(-A_2 - \frac{1}{\rho^2}n_\varphi^2 - \frac{m^2\omega^2\rho^2}{\hbar^2}\right)\chi(\rho) = 0. \tag{2.10b}$$

Воспользуемся заменой вида

$$\chi(\rho) = f(\rho)\exp\left(-\frac{m\omega\rho^2}{2\hbar}\right)\rho^{|n_\varphi|}. \tag{2.11}$$

Тогда уравнение (2.10b) преобразуется к виду

$$f''(\rho) + \left(\frac{2|n_\varphi| + 1}{\rho} - \frac{2m\omega\rho}{\hbar}\right)f'(\rho) - \left(A_2 + \frac{2\left(|n_\varphi| + 1\right)m\omega}{\hbar}\right)f(\rho) = 0. \tag{2.12}$$

Если рассматривать функцию $f$ как функцию аргумента $x = \frac{m\omega\rho^2}{\hbar}$, то необходимо произвести замены

$$f(\rho) \to f\left(x\right), \tag{2.13a}$$

$$f'(\rho) \to \frac{2m\omega\rho}{\hbar}f'(x), \tag{2.13b}$$

$$f''(\rho) \to \frac{4m^2\omega^2\rho^2}{\hbar^2}f''(x) + \frac{2m\omega}{\hbar}f'(x), \tag{2.13c}$$

где штрихом обозначена производная функции $f$ по её аргументу. Тогда уравнение (2.12) запишется в виде

$$x f''(x) + \left(|n_\varphi| + 1 - x\right) f'(x) - \left(\frac{A_2\hbar}{4m\omega} + \frac{|n_\varphi| + 1}{2}\right) f(x) = 0. \tag{2.14}$$

На функцию $\chi(\rho)$ наложены условия

$$\lim_{\rho\to 0} |\chi(\rho)| < +\infty, \tag{2.15a}$$

$$\lim_{\rho\to +\infty} |\chi(\rho)| = 0. \tag{2.15b}$$

Согласно произведённым заменам условие (2.15a) преобразуется в условие на функцию $f(x)$ вида $\lim_{x\to 0}\left|x^{\frac{|n_\varphi|}{2}} f(x)\right| < +\infty$, которое должно удовлетворяться при любом $n_\varphi \in \mathbb{Z}$. При $n_\varphi = 0$ получим самое сильное[1)] условие (подразумевая непрерывность $f$)

$$|f(0)| < +\infty. \tag{2.16}$$

Условие (2.15b) же будет выполняться, если функция $f(x)$ растёт на бесконечности не быстрее степенной функции. Таким образом, получим второе условие

$$\lim_{x\to +\infty} |f(x)| \leq \mathrm{const} \cdot x^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

Уравнение (2.14) с граничными условиями (2.16) и (2.17) имеет решения лишь в виде полиномов, соответствующих выбору

$$-\left(\frac{A_2\hbar}{4m\omega} + \frac{|n_\varphi| + 1}{2}\right) = n_\rho, \tag{2.18}$$

где $n_\rho \in \mathbb{N}_0$ — неотрицательное целое число. То есть, имеем задачу

$$\begin{gathered} x f''(x) + \left(|n_\varphi| + 1 - x\right) f'(x) + n_\rho f(x) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \\ |f(0)| < +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} |f(x)| \leq \mathrm{const} \cdot x^N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{2.19}$$

Её решения — полиномы Чебышёва-Лагерра

$$f(x) = \mathrm{const} \cdot L_{n_\rho}^{(|n_\varphi|)}(x). \tag{2.20}$$

Согласно [8, (13.128)] полиномы Чебышёва-Лагерра могут быть выражены через вырож-

[1)] В смысле того, что из его удовлетворения следует выполнение условия при $n_\varphi \neq 0$.

денную гипергеометрическую функцию первого рода (функцию Куммера) как

$$L_{n_\rho}^{(|n_\varphi|)}(x) = \frac{(n_\rho + |n_\varphi|)!}{n_\rho!\,|n_\varphi|!} M(-n_\rho, |n_\varphi| + 1; x). \tag{2.21}$$

Так, решение задачи (2.10b) представляется в виде

$$\chi(\rho) = C \exp\left(-\frac{m\omega\rho^2}{2\hbar}\right)\rho^{|n_\varphi|} M\left(-n_\rho, |n_\varphi| + 1; \frac{m\omega\rho^2}{\hbar}\right), \tag{2.22}$$

где $C$ — нормировочная константа.

### 2.2.1 Нормировочная константа

Будем искать действительную нормировочную константу $C \in \mathbb{R}$ такую, что

$$C^2 \int\limits_0^{+\infty} \left|\chi(\rho)\right|^2 \rho \,\mathrm{d}\rho = 1. \tag{2.23a}$$

Получим

$$C^2 \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\rho^2\right)\rho^{2|n_\varphi|+1} M^2\left(-n_\rho, |n_\varphi| + 1; \frac{m\omega}{\hbar}\rho^2\right) = 1. \tag{2.23b}$$

Согласно [9, (4.4)]

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2\gamma-1} \exp\left(-hx^2\right) M^2\left(-n, \gamma; hx^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{n!\,\Gamma^2(\gamma)}{h^\gamma \Gamma(\gamma + n)}. \tag{2.24}$$

В случае (2.23b) имеем

$$\gamma = |n_\varphi| + 1, \tag{2.25a}$$

$$h = {}^{m\omega}/_{\hbar}, \tag{2.25b}$$

$$n = n_\rho. \tag{2.25c}$$

Итого, получим

$$C = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{|n_\varphi|+1}{2}} \left[\frac{2\Gamma\big(|n_\varphi| + n_\rho + 1\big)}{\Gamma(n_\rho + 1)}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\big(|n_\varphi| + 1\big)} = \tag{2.26a}$$

$$= \frac{1}{|n_\varphi|!}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{|n_\varphi|+1}{2}} \sqrt{\frac{2\big(|n_\varphi| + n_\rho\big)!}{n_\rho!}}. \tag{2.26b}$$

Так, функция (2.22) в полном виде запишется как

$$\chi(\rho) = \frac{\exp\Big(-\frac{m\omega\rho^2}{2\hbar}\Big)\rho^{|n_\varphi|}}{|n_\varphi|!}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{|n_\varphi|+1}{2}} \sqrt{\frac{2\big(|n_\varphi| + n_\rho\big)!}{n_\rho!}} M\left(-n_\rho, |n_\varphi| + 1; \frac{m\omega\rho^2}{\hbar}\right). \tag{2.27}$$

## 2.3 Аксиальная функция

Из (2.9), (2.10a) и (2.18) получим

$$\frac{\zeta''}{\zeta} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\left(|z| - z_0\right)^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m\omega\left(2n_\rho + |n_\varphi| + 1\right)}{\hbar}. \tag{2.28}$$

Рассмотрим область $0 < z < +\infty$. Произведём замену

$$\zeta(z) = \xi(z)\exp\Big(-\frac{m\omega}{2\hbar}(z - z_0)^2\Big). \tag{2.29}$$

Тогда (2.28) преобразуется к виду

$$\xi''(z) - \frac{2m\omega}{\hbar}(z - z_0)\xi'(z) + \frac{2mE - 2m\omega\hbar\left(2n_\rho + |n_\varphi|\right) - 3m\omega\hbar}{\hbar^2}\xi(z) = 0. \tag{2.30}$$

Рассмотрим функцию $\xi$ как функцию аргумента $x = \frac{m\omega}{\hbar}(z - z_0)^2$. Тогда

$$\xi(z) \to \xi(x), \tag{2.31a}$$

$$\xi'(z) \to \frac{2m\omega}{\hbar}(z - z_0)\xi'(x), \tag{2.31b}$$

$$\xi''(z) \to \frac{4m^2\omega^2}{\hbar^2}(z - z_0)^2\xi''(x) + \frac{2m\omega}{\hbar}\xi'(x), \tag{2.31c}$$

где штрихом обозначена производная функции $\xi$ по её аргументу. Так, уравнение (2.30) преобразуется к виду

$$x\xi''(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right)\xi'(x) + \frac{E - \hbar\omega\left(2n_\rho + |n_\varphi|\right) - \frac{3}{2}\hbar\omega}{2\hbar\omega}\xi(x) = 0. \tag{2.32}$$

Поскольку формально изначальное дифференциальное уравнение (2.28) задано на прямой $-\infty < z < +\infty$, то граничного условия в точке $z = 0$ вида $|\zeta(0)| < +\infty$ нет. Поэтому, логика получения полиномов Чебышёва-Лагерра, изложенная в разд. 2.2, здесь не применима.

Обозначим постоянный коэффициент при последнем слагаемом как

$$\frac{E - \hbar\omega\left(2n_\rho + |n_\varphi|\right) - \frac{3}{2}\hbar\omega}{2\hbar\omega} = \frac{n_z}{2}, \tag{2.33}$$

где $n_z \in \mathbb{R}$ — действительное число[2)].

Согласно [10, Математическое дополнение Г] общее решение уравнения (2.32) имеет вид

$$\xi(x) = C_1 M\left(\frac{1-n_z}{2}, \frac{3}{2}; x\right)\sqrt{x} + C_2 M\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}; x\right), \tag{2.34}$$

где $C_1, C_2$ — произвольные постоянные.

Так, аксиальная функция при $z > 0$ имеет вид[3)]

$$\begin{aligned}\zeta(z>0) = \exp&\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(z-z_0)^2\right)\times \\ &\times\left[C_1(z-z_0)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}M\left(\frac{1-n_z}{2}, \frac{3}{2}; \frac{m\omega(z-z_0)^2}{\hbar}\right) + \right. \\ &\left. + C_2 M\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}; \frac{m\omega(z-z_0)^2}{\hbar}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.35}$$

Поскольку при замене $z \to (-z)$ дифференциальное уравнение (2.28) не изменится,

---

2)Не обязательно целое!

3)Для восстановления информации о знаке выражения $z - z_0$ необходимо «синхронно» выбирать ветви функции $\sqrt{x}$: так как $z - z_0 < 0$ на участке $0 < z < z_0$, то выбираем там отрицательную ветвь корня; на оставшемся участке — положительную. Таким образом, $\sqrt{x} = (z - z_0)\sqrt{m\omega/\hbar}$.

то $\zeta(-z>0)=\zeta(z>0)\big|_{z\to(-z)}$ — его решение в области $-\infty<z<0$. То есть,

$$\zeta(z<0)=\exp\Big(-\frac{m\omega}{2\hbar}(z+z_0)^2\Big)\times \\ \times\left[C_1'(z+z_0)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}M\left(\frac{1-n_z}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega(z+z_0)^2}{\hbar}\right)+\right. \\ \left.+C_2'M\left(-\frac{n_z}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega(z+z_0)^2}{\hbar}\right)\right], \quad (2.36)$$

где $C_1', C_2'$ — произвольные постоянные.

### 2.3.1 Собственные значения $n_z$

Аксиальная функция должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\big[\zeta(z>0)=\zeta(z<0)\big]_{z=0}, \quad (2.37a)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\zeta(z>0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\zeta(z<0)\right]_{z=0}, \quad (2.37b)$$

$$\lim_{z\to+\infty}\zeta(z>0)=0, \quad (2.37c)$$

$$\lim_{z\to-\infty}\zeta(z<0)=0. \quad (2.37d)$$

Первые два условия дают соответственно[4)]

$$z_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}M\left(\frac{1-n_z}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)(C_1'+C_1)+M\left(-\frac{n_z}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)(C_2'-C_2)=0, \quad (2.38a)$$

$$(C_1'-C_1)\left[\left(\frac{m\omega z_0^2}{\hbar}-1\right)M\left(\frac{1-n_z}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)-\frac{2m\omega z_0^2(1-n_z)}{3\hbar}M\left(\frac{3-n_z}{2},\frac{5}{2};\frac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)\right]+ \\ +(C_2'+C_2)z_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left[M\left(-\frac{n_z}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)+2n_zM\left(\frac{2-n_z}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)\right]=0. \quad (2.38b)$$

При больших значениях третьего аргумента функции Куммера имеем асимптотику [10, (Г, 10)]

$$M(a,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}x^{a-c}e^x\Big(1+\mathcal{O}\big(x^{-1}\big)\Big),\quad x\to+\infty, \quad (2.39)$$

[4)] Для раскрытия условия непрерывности производных использовалось соотношение $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M(a,c;x)=\frac{a}{c}M(a+1,c+1;x)$.

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Так, получим[5)]

$$\zeta(z\to\pm\infty)\sim\exp\Bigl(-\frac{m\omega}{2\hbar}\bigl(z\mp z_0\bigr)^2\Bigr)\exp\left(\frac{m\omega\bigl(z\mp z_0\bigr)^2}{\hbar}\right)\times$$
$$\times\left[\pm C_{1,1'}\left(\frac{m\omega\bigl(z\mp z_0\bigr)^2}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega\bigl(z\mp z_0\bigr)^2}{\hbar}\right)^{-\frac{2+n_z}{2}}\frac{\Gamma\bigl(\frac{3}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{1-n_z}{2}\bigr)}+\right.$$
$$\left.+\,C_{2,2'}\left(\frac{m\omega\bigl(z\mp z_0\bigr)^2}{\hbar}\right)^{-\frac{1+n_z}{2}}\frac{\Gamma\bigl(\frac{1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(-\frac{n_z}{2}\bigr)}\right]. \tag{2.40}$$

Отсюда, условия (2.37c) и (2.37d) дают

$$\frac{C_1}{2\Gamma\bigl(\frac{1-n_z}{2}\bigr)}+\frac{C_2}{\Gamma\bigl(-\frac{n_z}{2}\bigr)}=0, \tag{2.41a}$$

$$\frac{C_1'}{2\Gamma\bigl(\frac{1-n_z}{2}\bigr)}-\frac{C_2'}{\Gamma\bigl(-\frac{n_z}{2}\bigr)}=0. \tag{2.41b}$$

Поскольку оператор чётности $\hat{P}$ коммутирует с гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}_0$, то собственные функции гамильтониана должны быть собственными функциями оператора чётности, то есть $\hat{P}\zeta(z)=P\zeta(z)$, где собственные значения $P=\pm1$ отвечают соответственно чётной и нечётной аксиальной функции: $\zeta(z<0)=\zeta(z>0)\big|_{z\to(-z)}$ и $\zeta(z<0)=-\zeta(z>0)\big|_{z\to(-z)}$. Из явных выражений для $\zeta\bigl(z\lessgtr 0\bigr)$ получим

$$C_1'=-C_1,\quad C_2'=C_2\qquad\text{для } P=+1, \tag{2.42a}$$

$$C_1'=C_1,\quad C_2'=-C_2\qquad\text{для } P=-1. \tag{2.42b}$$

Видно, что для *чётной* аксиальной функции требование (2.38a) непрерывности в точке $z=0$ выполняется автоматически. Аналогично, для *нечётной* — требование (2.38b) непрерывности производных в $z=0$[6)]. Также для фиксированной чётности условия (2.41a) и (2.41b) оказываются эквивалентными.

Имеем (например, для чётности $P=-1$) однородную систему линейных алгебраи-

[5)] Нештрихованные индексы отвечают аксиальной функции при $z>0$, штрихованные — при $z<0$. Таким образом, в правой части эквивалентности нештрихованным индексам отвечают знаки *сверху*, штрихованным — знаки *снизу*. Разные знаки у $C_1$ и $C_1'$ обусловлены выбором положительной ветви при затягивании выражения $z\mp z_0$ под корень с учётом рассматриваемого предела $z\to\pm\infty$.

[6)] Для чётной функции *по определению* выполняется соотношение $f(-x)=f(x)$, следовательно, $\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to+0}f(-x)=\lim_{x\to+0}f(x)$ — чётная функция непрерывна в $x=0$. Производная нечётной функции — чётная функция, откуда следует автоматическая непрерывность производных.

ческих уравнений на коэффициенты[7] $C_1$ и $C_2$:

$$\begin{cases} z_0\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}M\left(\dfrac{1-n_z}{2},\dfrac{3}{2};\dfrac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)C_1 - M\left(-\dfrac{n_z}{2},\dfrac{1}{2};\dfrac{m\omega z_0^2}{\hbar}\right)C_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2\Gamma\left(\frac{1-n_z}{2}\right)}C_1 + \dfrac{1}{\Gamma\left(-\frac{n_z}{2}\right)}C_2 = 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Наличие нетривиальных решений обеспечивается равенством нулю определителя системы (2.43) — уравнение на собственные значения $n_z = n_z(z_0)$:

$$\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n_z}{2}\right)}\sqrt{\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}}M\left(\frac{1-n_z}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}\right) = -\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1-n_z}{2}\right)}M\left(-\frac{n_z}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}\right), \tag{2.44}$$

где $\omega(z_0) = {}^{\omega_0 R}\!/_{r(z_0)}$, а $r(z_0)$ удовлетворяет уравнению $2r^3 + 3r^2 z_0 - z_0^3 - 2R^3 = 0$.

Аналогичное уравнение на собственные значения $n_z$ для $P = +1$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\left[\frac{2m\omega(z_0)z_0^2(1-n_z)}{3\hbar}M\left(\frac{3-n_z}{2},\frac{5}{2};\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}\right)-\right. \\ &-\left.\left(\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}-1\right)M\left(\frac{1-n_z}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}\right)\right]\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{n_z}{2}\right)} = z_0\sqrt{\frac{m\omega(z_0)}{\hbar}}\left[M\left(-\frac{n_z}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}\right)+\right. \\ &\left.+\,2n_z M\left(\frac{2-n_z}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega(z_0)z_0^2}{\hbar}\right)\right]\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1-n_z}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Изобразим зависимость $n_z(z_0)$ для ядра $^{235}$U.

[7]Штрихованные коэффициенты определяются соответствующей «чётностной» зависимостью.

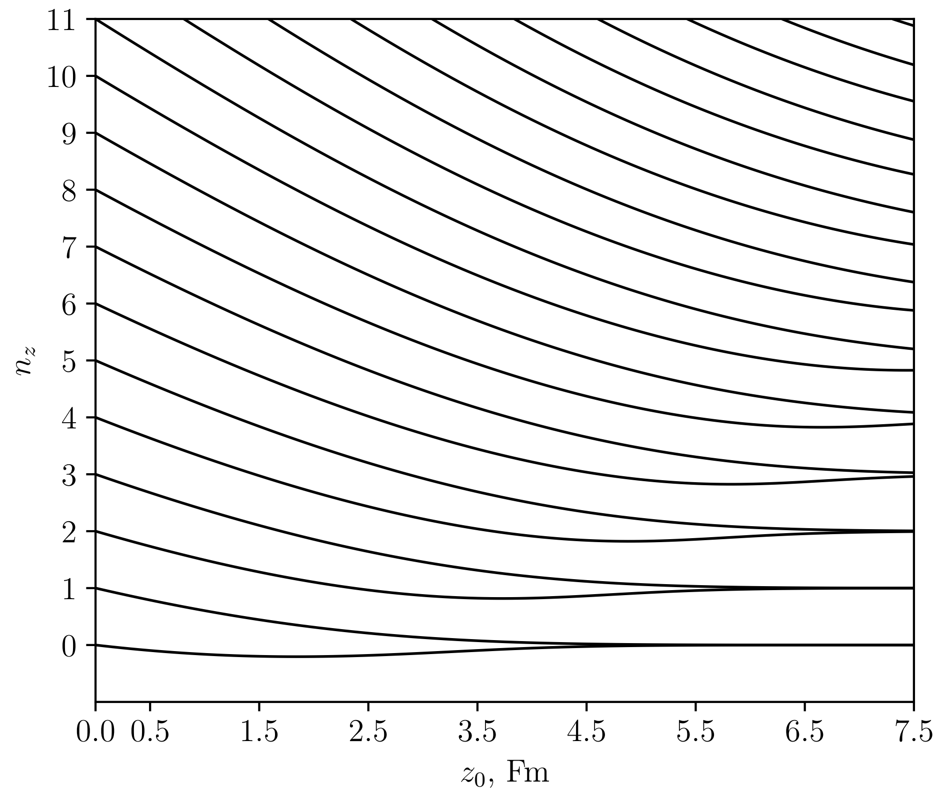


Рисунок 2.1 — Собственные значения $n_z$ задачи на функцию $\zeta(z)$ как функции относительного положения центров осциллятора $z_0$. Линии, выходящие из чётных значений $n_z(z_0 = 0)$, отвечают положительной чётности $\zeta(z)$; из нечётных — отрицательной.

Необходимая процедура обезразмеривания некоторых величин, входящих в уравнения на собственные значения, описана в прил. А.

# 3 Решение задачи

## 3.1 Энергетические уровни

Согласно зависимости (2.33) энергия связана со всеми квантовыми числами как

$$E(z_0) = \hbar\omega(z_0)\big(n_z(z_0) + 2n_\rho + |n_\varphi| + 3/2\big), \tag{3.1}$$

где $n_z(z_0) \in \mathbb{R}$, $n_\rho \in \mathbb{N}_0$, $n_\varphi \in \mathbb{Z}$.

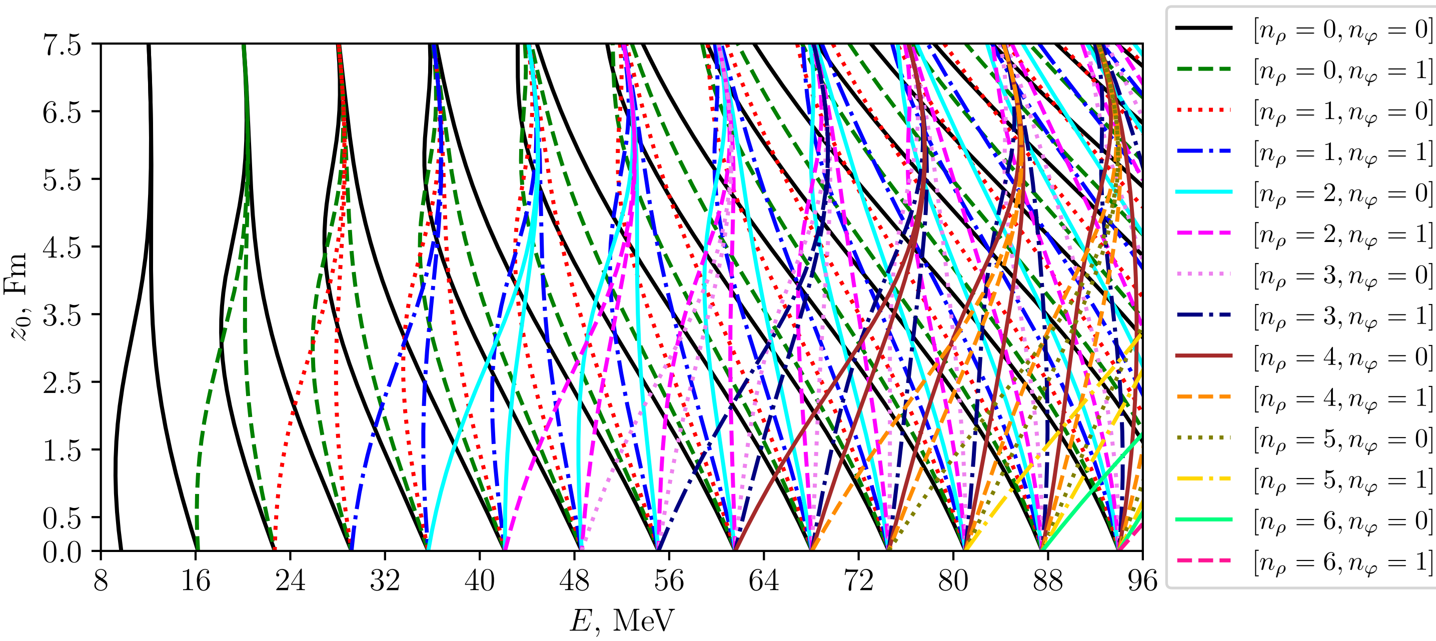


Рисунок 3.1 — Зависимость $E(z_0)$ для низших энергетических уровней для ядра $^{235}$U. Каждая новая серия линий начинается с квантовым числом $n(z_0 = 0) = 0$; при движении вправо вдоль оси энергии на новую линию той же серии это число увеличивается на 1.

Из (3.1) видно, что уровни с одинаковой величиной $2n_\rho + |n_\varphi|$, но разными квантовыми числами $n_\rho$ и $n_\varphi$ будут вырождены. Например, на рис. 3.1 одинаковыми линиями описываются уровни с $n_\rho = 1, n_\varphi = 0$ и $n_\rho = 0, n_\varphi = 2$ и так далее.

Полученные зависимости на рис. 2.1 и рис. 3.1 совпадают с зависимостями, полученными в работе [2, Fig. 3].

## 3.2 Фундаментальные решения

Для обеих чётностей угловая и радиальная зависимости даются соответственно (нормированными) выражениями (2.7) и (2.27).

Нормировочная константа аксиальной функции аналитически не выражается через элементарные функции, поэтому везде далее она присутствует явно, и при построении графиков определялась численно из условия

$$C^2 \sum_k \Delta z_k \cdot \frac{\zeta^2(z_{k+1}) + \zeta^2(z_k)}{2} \approx 1, \quad \Delta z_k \equiv z_{k+1} - z_k, \tag{3.2}$$

где $\{z_k\} \subset Z$, а $Z$ — область значений аргумента $z$, в которой функция $\zeta(z)$ не успела экспоненциально затухнуть до значений $\zeta \sim 10^{-1}$.

### 3.2.1 Отрицательная аксиальная чётность

При $P = -1$ имеем $C_1' = C_1$ и $C_2' = -C_2$. При выполнении (2.44) получим, что уравнения системы (2.43) линейно зависимы, поэтому выберем одно из них наиболее простое по виду (содержащее только гамма-функции).

Поскольку для отрицательной чётности все «квантовые числа» $n_z(z_0 = 0)$ принимают нечётные значения, то выражение ${}^{(1-n_z)}/_2$, стоящее под одной из гамма-функций в выбранном выражении, может принимать значения вида «минус чётное число», что даст полюсы этой гамма-функции. Поэтому, выразим все константы так, чтобы гамма-функция этого аргумента оказалась в знаменателе:

$$C_2 = -\frac{\Gamma\left(-\frac{n_z}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1-n_z}{2}\right)} C_1, \tag{3.3a}$$

$$C_2' = \frac{\Gamma\left(-\frac{n_z}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1-n_z}{2}\right)} C_1, \quad C_1' = C_1. \tag{3.3b}$$

Обозначим $C_1 \equiv C^{(-)}$. Из выражений (2.35) и (2.36) получим

$$\begin{aligned}\zeta^{(-)}(z > 0) = C^{(-)} \exp\Big(-\frac{m\omega}{2\hbar}(z - z_0)^2\Big)\times \\ \times \left[(z - z_0)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} M\left(\frac{1-n_z}{2}, \frac{3}{2}; \frac{m\omega(z-z_0)^2}{\hbar}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma\left(-\frac{n_z}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1-n_z}{2}\right)} M\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}; \frac{m\omega(z-z_0)^2}{\hbar}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.4a}$$

$$\zeta^{(-)}(z<0) = C^{(-)} \exp\Bigl(-\frac{m\omega}{2\hbar}(z+z_0)^2\Bigr)\times$$
$$\times\left[(z+z_0)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} M\left(\frac{1-n_z}{2}, \frac{3}{2}; \frac{m\omega(z+z_0)^2}{\hbar}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma\bigl(-\frac{n_z}{2}\bigr)}{2\Gamma\bigl(\frac{1-n_z}{2}\bigr)} M\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}; \frac{m\omega(z+z_0)^2}{\hbar}\right)\right], \quad (3.4b)$$

причём зависимости $n_z(z_0)$ определяются из условия $n_z(z_0 = 0) = n_z^{(-)} = 1, 3, 5, \ldots$, то есть соответствующие «квантовые числа» отвечают отрицательной чётности аксиальной функции.

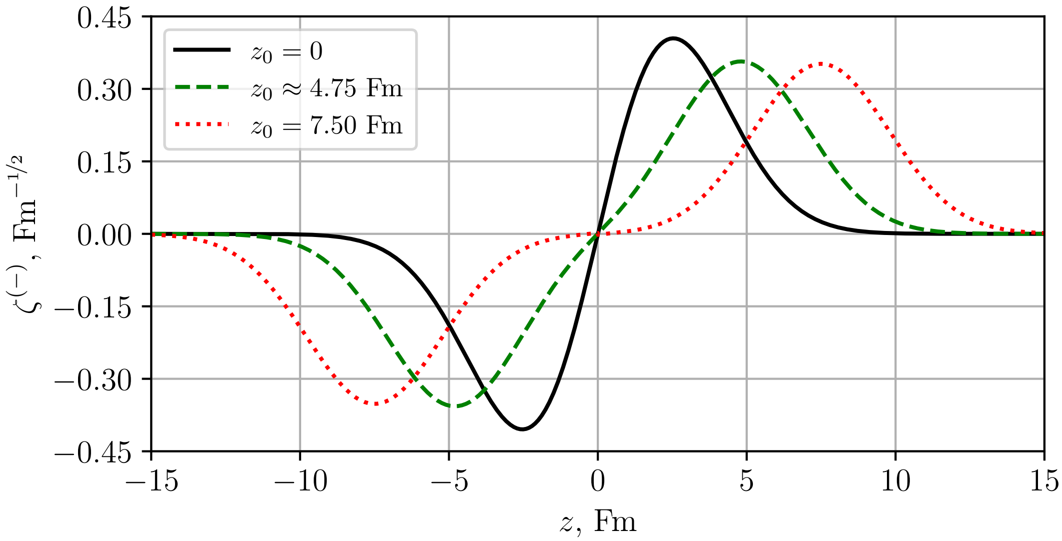


Рисунок 3.2 — Графики нечётных аксиальных функций $\zeta^{(-)}(z)$ при определённых параметрах растяжения $z_0$ и при зависимости $n_z(z_0)$, определяющейся «квантовым числом» $n_z(z_0 = 0) = 1$.

### 3.2.2 Положительная аксиальная чётность

Аналогично, при $P = +1$ получим

$$\zeta^{(+)}(z) = C^{(+)} \exp\Big(-\frac{m\omega}{2\hbar}\big(|z| - z_0\big)^2\Big)\times$$
$$\times \Bigg[M\Bigg(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}; \frac{m\omega\big(|z|-z_0\big)^2}{\hbar}\Bigg) - \frac{2\Gamma\big(\frac{1-n_z}{2}\big)}{\Gamma\big(-\frac{n_z}{2}\big)}\big(|z|-z_0\big)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\times$$
$$\times M\Bigg(\frac{1-n_z}{2}, \frac{3}{2}; \frac{m\omega\big(|z|-z_0\big)^2}{\hbar}\Bigg)\Bigg], \quad (3.5)$$

причём зависимости $n_z(z_0)$ определяются из условия $n_z(z_0 = 0) = n_z^{(+)} = 0, 2, 4, \ldots$

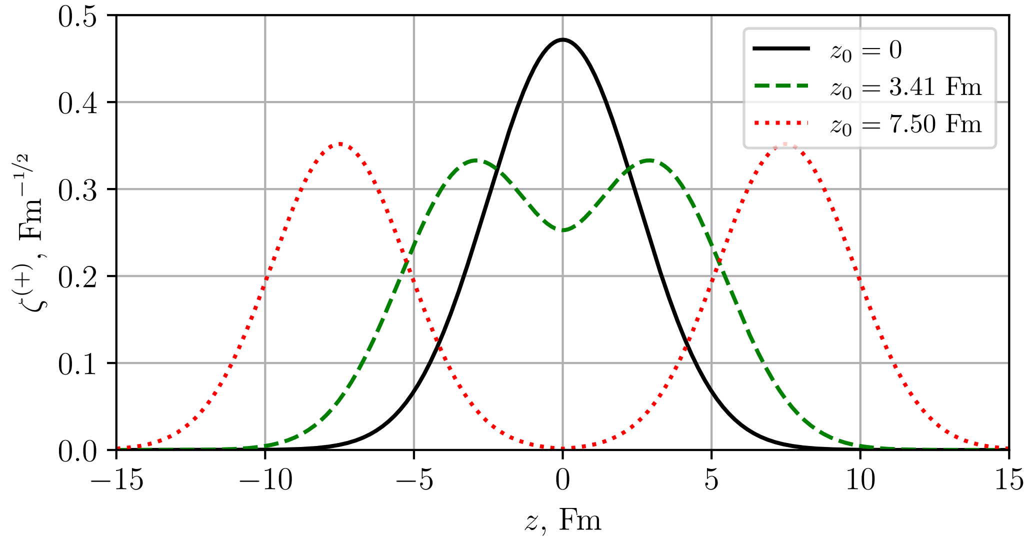


Рисунок 3.3 — Графики чётных аксиальных функций $\zeta^{(+)}(z)$ при определённых параметрах растяжения $z_0$ и при зависимости $n_z(z_0)$, определяющейся «квантовым числом» $n_z(z_0 = 0) = 0$.

Полученные зависимости на рис. 3.2 и рис. 3.3 совпадают с соответствующими зависимостями, изображёнными в работе [11, Fig. 3].

# 4 Сечения реакций с нейтронами

К анализу реакций

a) $^{115}\mathrm{In}(\mathrm{n},\mathrm{n}')^{115\mathrm{m}}\mathrm{In}$,

b) $^{115}\mathrm{In}(\mathrm{n},2\mathrm{n})^{114\mathrm{m}}\mathrm{In}$

были привлечены следующие данные:

1. Результаты расчёта сечений реакции с выходом как основного (g), так и изомерного (m) состояний, а также полное сечение реакции с выходом обоих (g + m) состояний, выполненный программой TALYS-1.9 с параметрами по умолчанию, в зависимости от энергии падающего нейтрона от порога реакции до 60 МэВ.

2. Результаты расчёта полного и упругого сечений взаимодействия во входном канале реакции ($\mathrm{n} +$ ядро-мишень $^{A}Z$) в зависимости от энергии нейтрона, до энергии 60 МэВ.

3. Для реакций $^{A}Z(\mathrm{n},2\mathrm{n})^{A-1}Z$, в которых в выходном канале имело место взаимодействие нейтрона с остаточным ядром $^{A-1}Z$, вычислялись также полное и упругое сечения взаимодействия этих частиц, $\mathrm{n} + {}^{A-1}Z$, в выходном канале до энергии 60 МэВ.

4. По сечениям, указанным выше в пунктах 1, 2 и 3, из базы данных ENDF извлекались оцененные зависимости этих сечений от энергии нейтронов (до 60 МэВ) из следующих библиотек: JEFF-3.3, JENDL-5.0, ENDF/B-VIII.0, ROSFOND-2010, TENDL-2021 и IRDFF-II, а из базы EXFOR — все экспериментальные данные, относящиеся к энергии нейтронов до 60 МэВ.

## 4.1 Реакция $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},\mathrm{n}')\,^{115\mathrm{m}}\mathrm{In}$

На рис. 4.1, 4.2, 4.3 представлены сечения выхода изомерного (m), основного (g) и обоих (g + m) состояний, соответственно, ядра $^{115}$In в зависимости от энергии нейтрона: расчёт по TALYS-1.9, а также данные из ENDF и EXFOR. В наиболее интересующей нас области 10–20 МэВ имеет место хорошее согласие рассчитанного по TALYS-1.9 сечения выхода изомерного (m) состояния с оцененными сечениями из ENDF и экспериментальными данными из EXFOR. На рис. 4.2 продемонстрировано согласие расчёта по TALYS-1.9 и оценки TENDL-2021 для сечения выхода основного (g) состояния; других оценок для данного сечения нет. На рис. 4.3 видно, что выше 10 МэВ имеются различающиеся предсказания для хода полного сечения выхода (g+m) ядра $^{115}$In, но отсутствие экспериментальных данных делает невозможным выбор между предсказаниями.

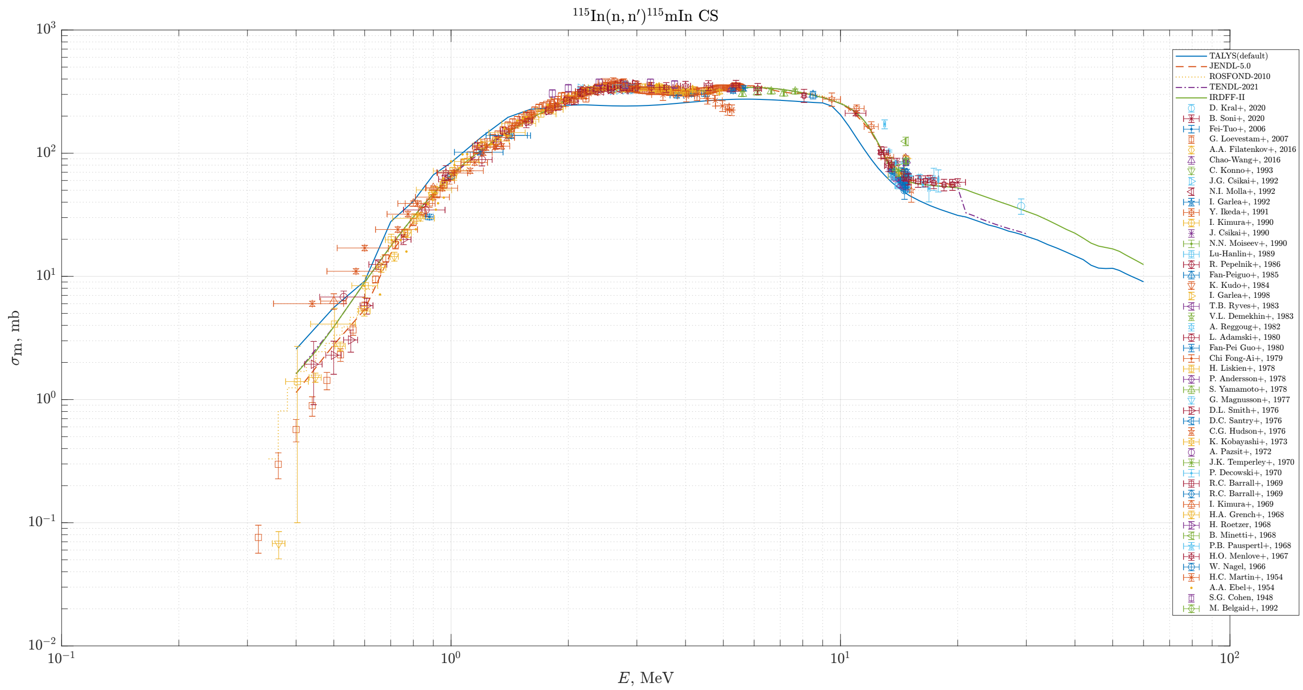


Рисунок 4.1 — Сечение выхода изомерного (m) состояния ядра $^{115}$In в реакции $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},\mathrm{n'})\,^{115}\mathrm{In}$ в зависимости от энергии нейтрона.

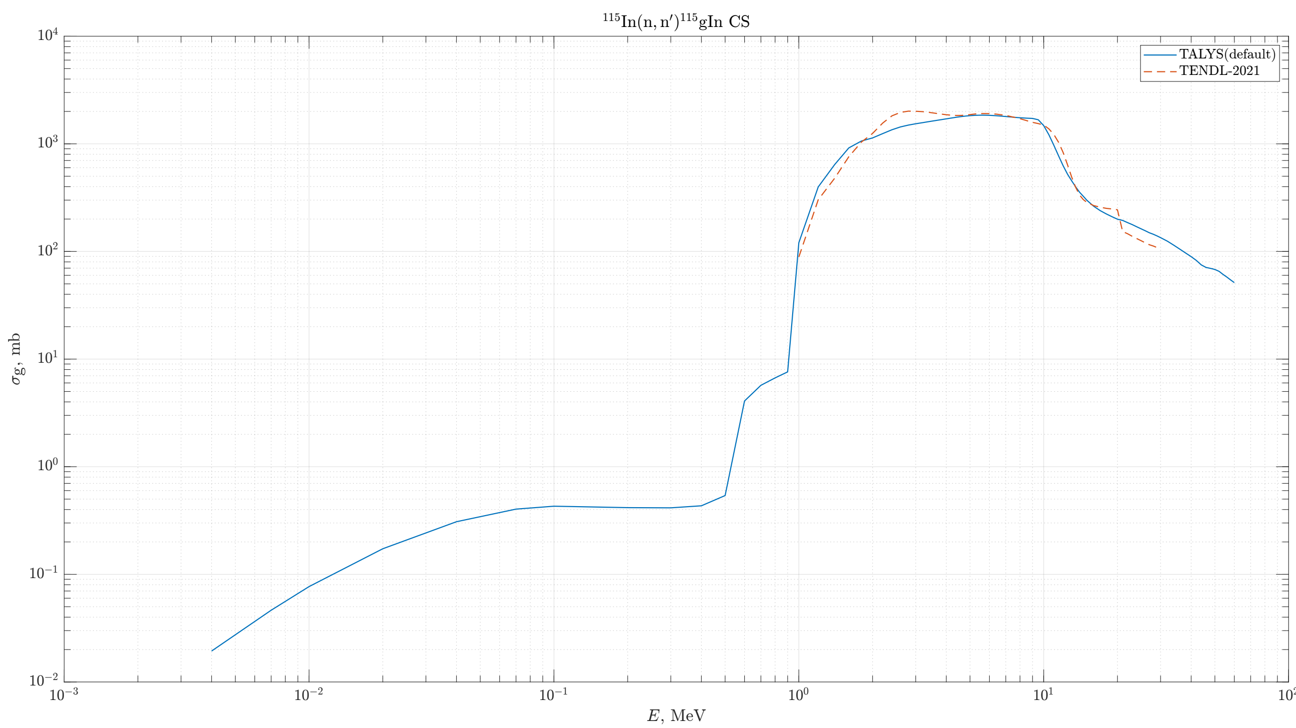


Рисунок 4.2 — Сечение выхода основного (g) состояния ядра $^{115}$In в реакции $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},\mathrm{n'})\,^{115}\mathrm{In}$ в зависимости от энергии нейтрона.

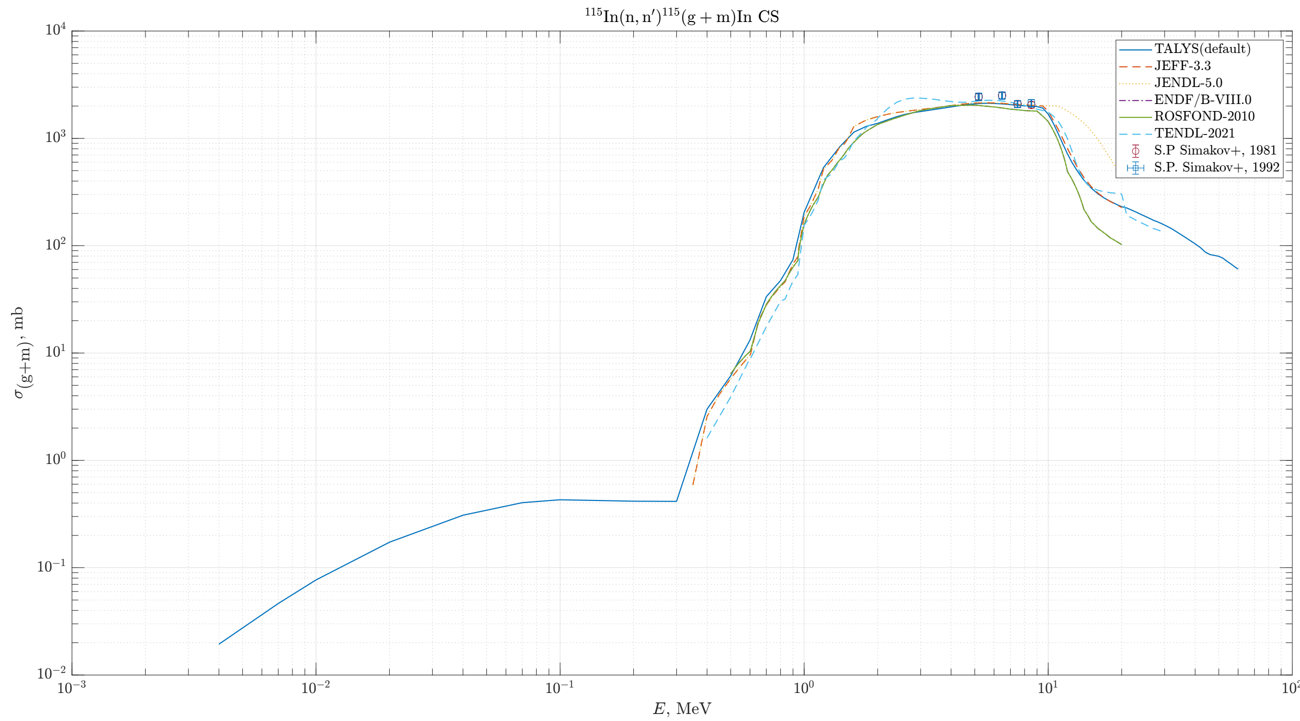


Рисунок 4.3 — Полное сечение выхода $(g + m)$ ядра $^{115}$In в реакции $^{115}$In $(n, n')$ $^{115}$In в зависимости от энергии нейтрона.

На рис. 4.4 и 4.5 представлены зависимости полного и упругого сечений взаимодействия нейтронов с ядрами-мишенями $^{115}$In: расчёт по TALYS-1.9, а также данные из ENDF. Видно хорошее согласие расчёта по TALYS-1.9 с оцененными значениями этих же сечений и с экспериментальными данными.

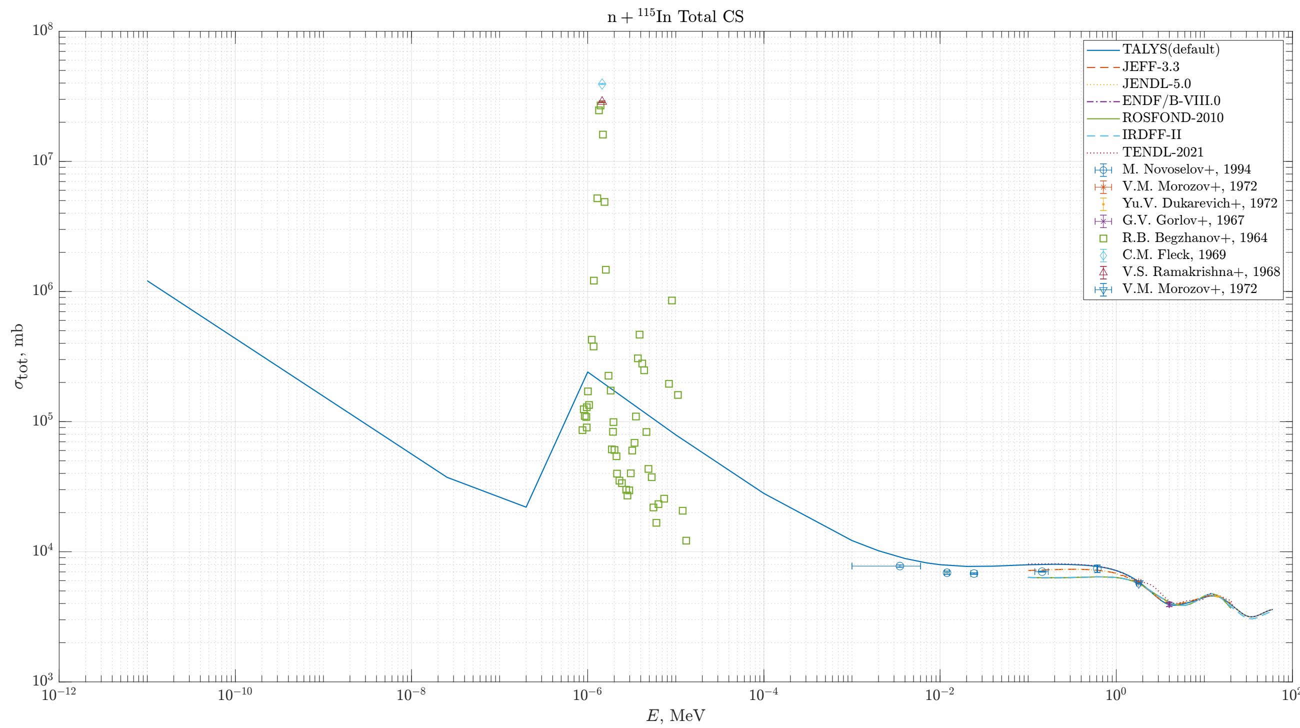


Рисунок 4.4 — Полное сечение взаимодействия нейтронов с ядрами-мишенями $^{115}$In.

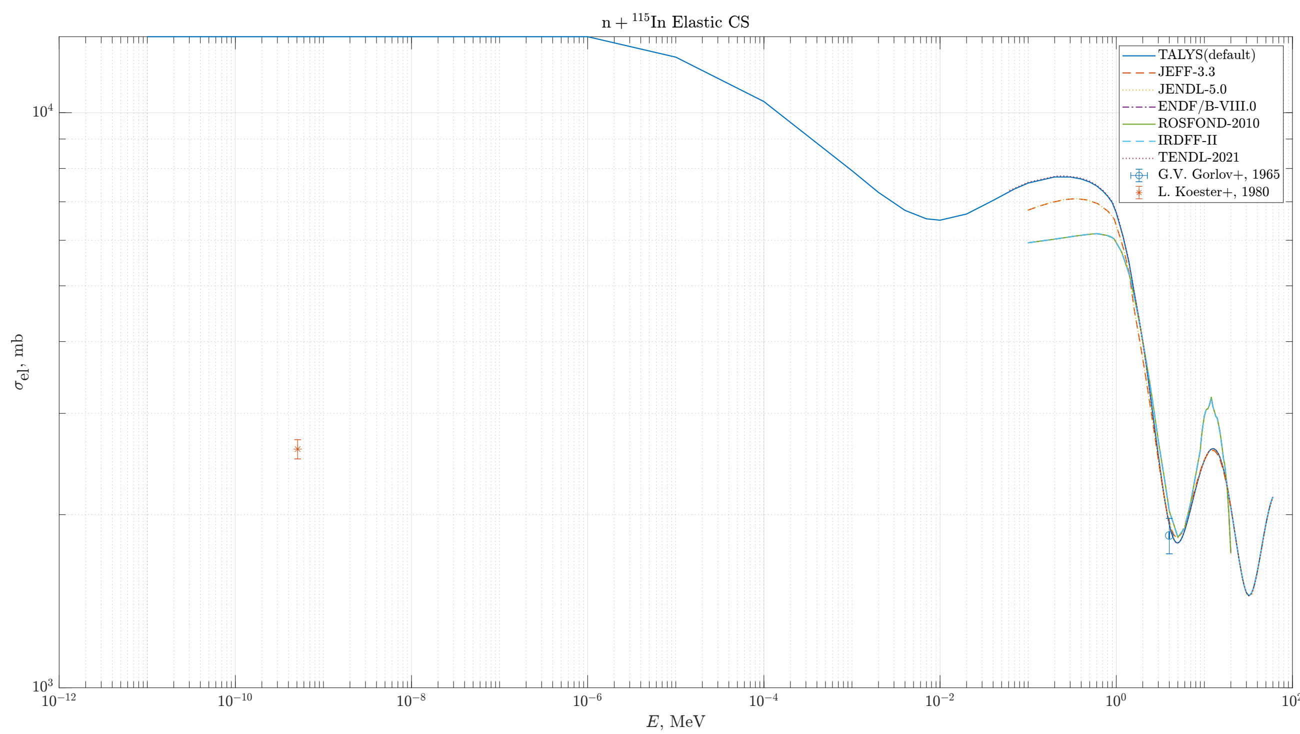


Рисунок 4.5 — Сечение упругого взаимодействия нейтронов с ядрами-мишенями $^{115}$In.

## 4.2 Реакция $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},2\mathrm{n})\,^{114\mathrm{m}}\mathrm{In}$

На рис. 4.6, 4.7, 4.8 представлены сечения выхода изомерного (m), основного (g) и обоих (g + m) состояний, соответственно, ядра $^{114}\mathrm{In}$ в зависимости от энергии нейтрона: расчёт по TALYS-1.9, а также данные из ENDF и EXFOR. На всех этих рисунках видно схожее поведение кривых, соответствующих сечению, рассчитанному по TALYS-1.9, и оцененным сечениям. Основной массив экспериментальных данных подтверждает правильность расчёта и оценок.

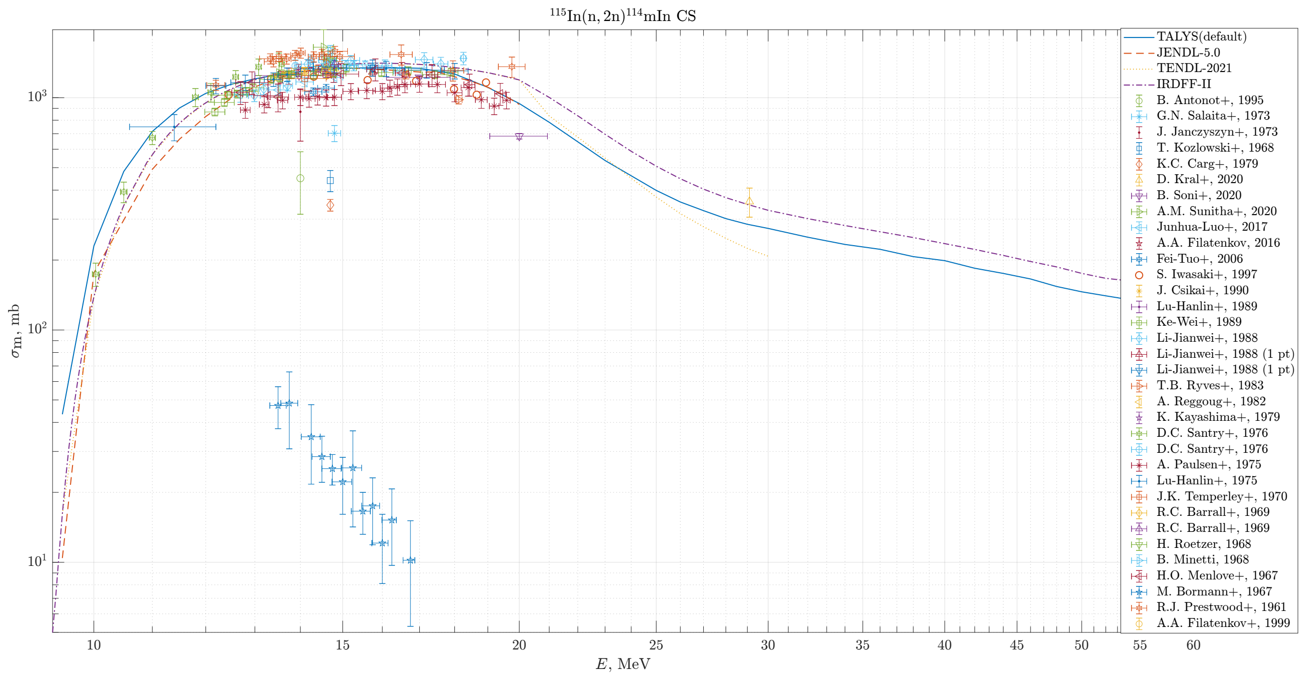


Рисунок 4.6 — Сечение выхода изомерного (m) состояния ядра $^{114}\mathrm{In}$ в реакции $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},2\mathrm{n})\,^{114}\mathrm{In}$ в зависимости от энергии нейтрона.

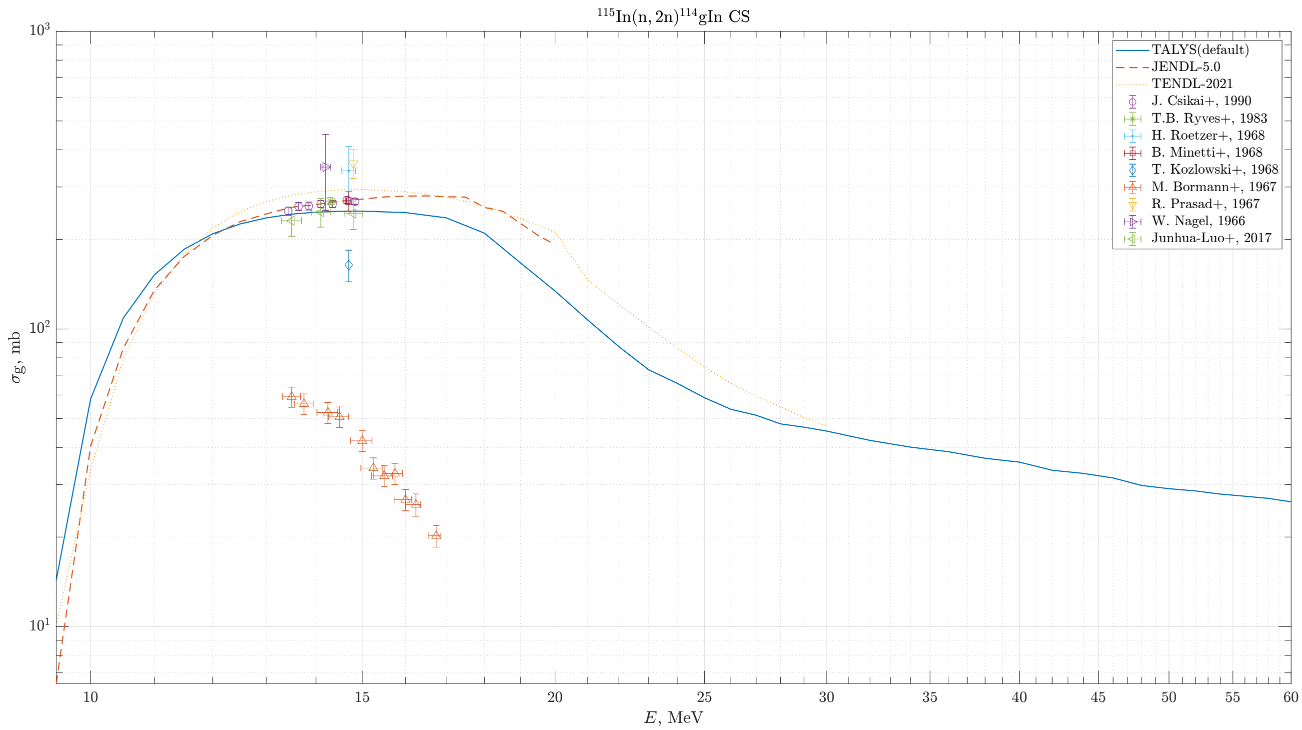


Рисунок 4.7 — Сечение выхода основного (g) состояния ядра $^{114}$In в реакции $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},2\mathrm{n})\,^{114}\mathrm{In}$ в зависимости от энергии нейтрона.

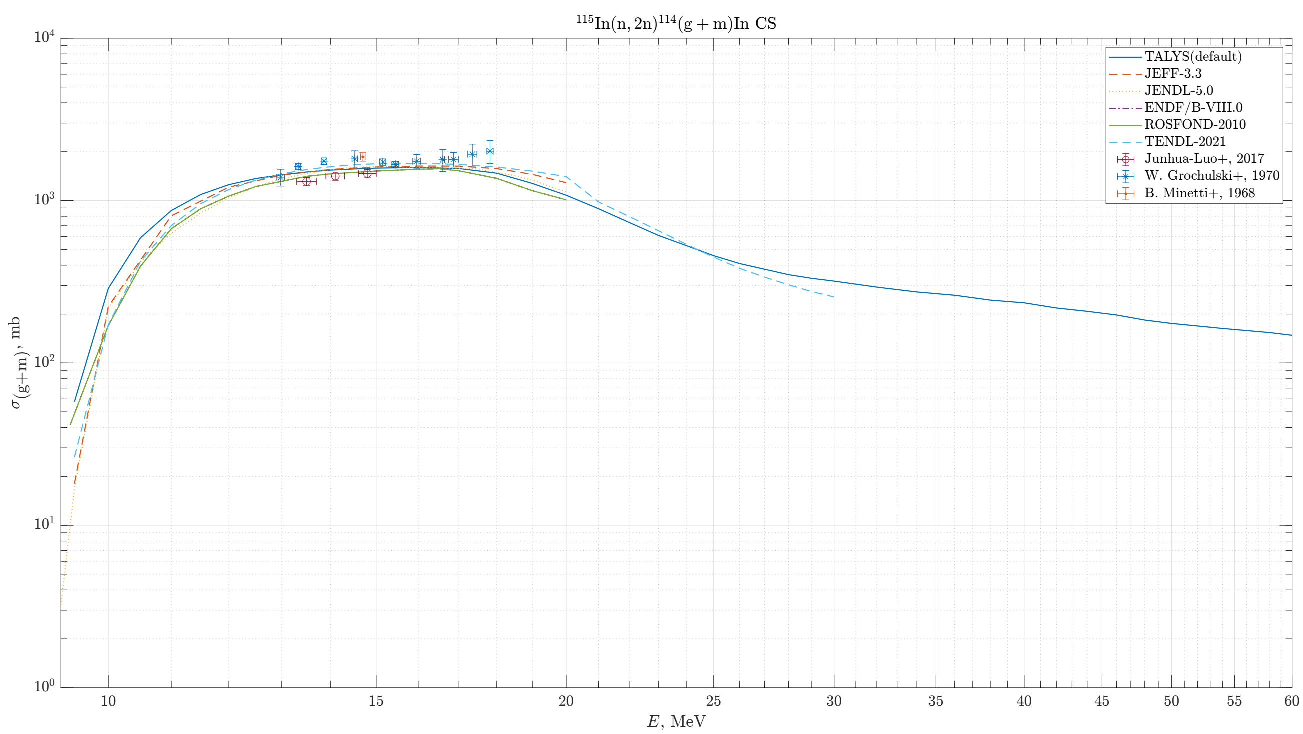


Рисунок 4.8 — Полное сечение выхода (g + m) ядра $^{114}$In в реакции $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},2\mathrm{n})\,^{114}\mathrm{In}$ в зависимости от энергии нейтрона.

В реакции $^{115}\mathrm{In}\,(\mathrm{n},2\mathrm{n})\,^{114}\mathrm{In}$ в выходном канале имеется также взаимодействие нейтрона и остаточного ядра $^{114}$In, поэтому были выполнены также расчёты полного и упругого сечений для этой пары частиц. Результаты представлены на рис. 4.9 и 4.10.

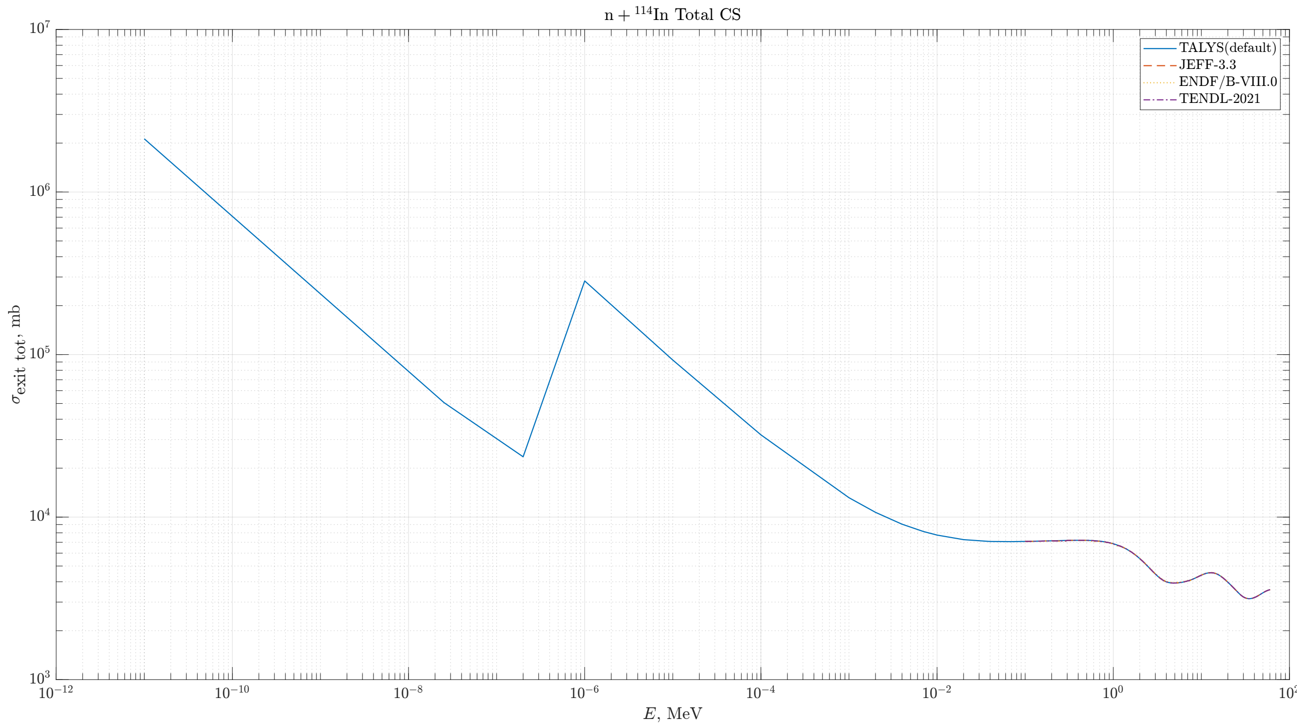


Рисунок 4.9 — Полное сечение взаимодействия нейтронов с ядрами-мишенями $^{114}$In.

Ядро $^{114}$In обладает очень малым временем жизни, поэтому непосредственное измерение полного и упругого сечений взаимодействия в канале $\mathrm{n} + {}^{114}\mathrm{In}$ невозможно. Соответственно, на рис. 4.9 и 4.10 расчёт по TALYS-1.9 сравнивается с оцененными сечениями. Видно, что согласие является хорошим.

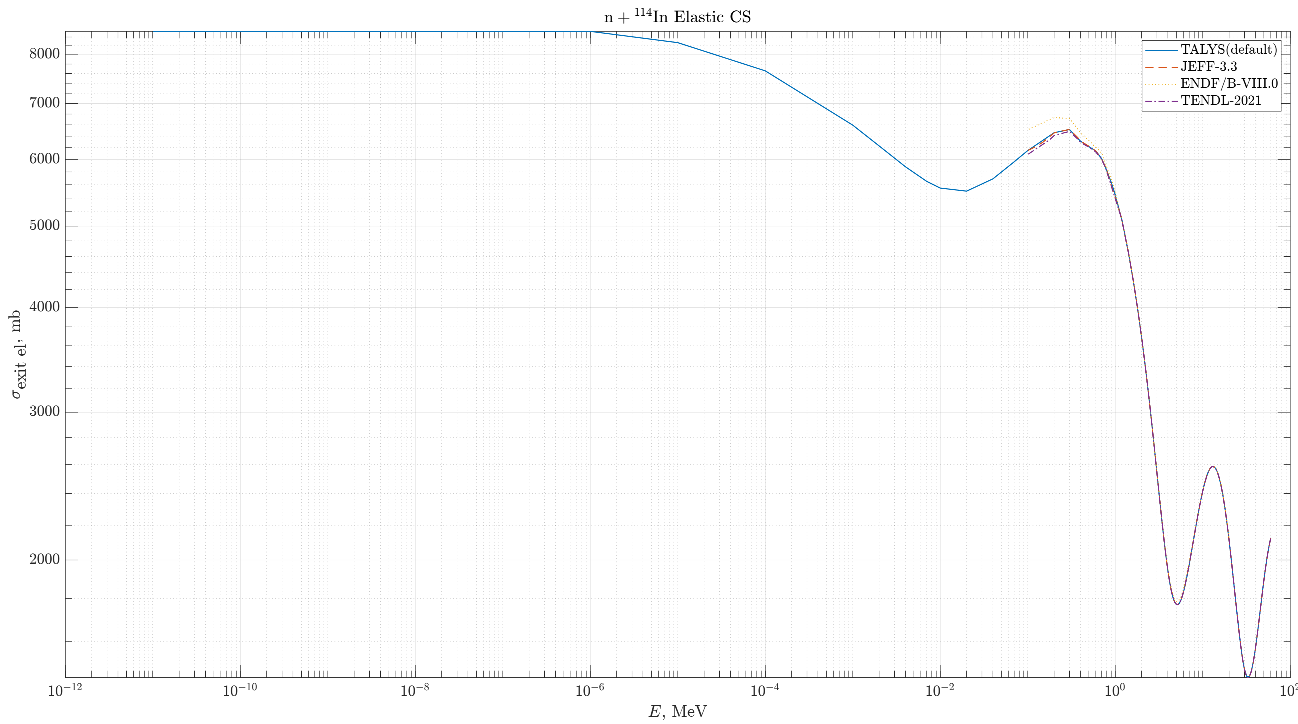


Рисунок 4.10 — Сечение упругого взаимодействия нейтронов с ядрами-мишенями $^{114}$In.

# Заключение

Таким образом, в данной работе был получен аналитический базис из собственных функций $\Phi(\rho, z, \varphi) = \chi(\rho)\zeta(z)v(\varphi)$ задачи симметричного двухцентрового осциллятора: решены уравнения сшивки аксиальной функции $\zeta(z)$, аналитически найдены нормировочные константы угловой и радиальной функций $v(\varphi), \chi(\rho)$, для аксиальной функции $\zeta(z)$ эта константа определяется численно.

Следующим шагом для развития модели будет получение базиса, подходящего для диагонализации полного потенциала, в котором движутся нуклоны в ядре, $V = V_{\mathrm{WS}} + V_{ls}$. Для этого необходимо в модель данного осциллятора включить спин-орбитальное взаимодействие нуклонов. Кроме базиса для диагонализации полного потенциала при рассмотрении задачи двухцентрового осциллятора со спин-орбитальным взаимодействием мы получим зависимости для энергий, которые более здраво будут описывать энергетические уровни реального ядра наподобие существующих диаграмм Нильсона. Данный шаг рассматривается в работе [11].

Во второй части данной работы выполненный анализ имеющихся данных по двум отобранным нейтронным реакциям с образованием ядер-изомеров показал, что в целом расчёты по программе TALYS-1.9 с параметрами по умолчанию (фактически — с параметрами, рекомендованными библиотекой RIPL-3 [5]) хорошо согласуются как с имеющимися экспериментальными данными, представленными в EXFOR, так и с оцененными данными из библиотек JEFF-3.3, JENDL-5, ENDF/B-VIII.0, ROSFOND-2010, TENDL-2021, представленными в ENDF.

Так, расчёты по программе TALYS-1.9 с параметрами по умолчанию позволяют получать достаточно надёжные сведения о сечениях ядерных процессов, в том числе с образованием ядер-изомеров в реакциях с нейтронами. На исследованных примерах показано, что полные и упругие сечения взаимодействия нейтронов с ядрами практически одинаково описываются как расчётом по TALYS-1.9, так и оцененными кривыми из библиотек, представленных в ENDF.

# Приложения

## A Преобразования для зависимости $n_z$

Во все уравнения на собственные значения входит величина

$$\frac{m\omega(z_0)}{\hbar} \tag{A.1}$$

размерностью $[z_0]^{-2}$. Таким образом, если эту величину выразить в $\mathrm{Fm}^{-2}$, то $[z_0] = \mathrm{Fm}$.

Используем

$$\hbar = 6{,}582 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{s}, \tag{A.2a}$$

$$m = 940\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}, \quad c = 3 \cdot 10^{23}\ \frac{\mathrm{Fm}}{\mathrm{s}}. \tag{A.2b}$$

Поскольку

$$\omega(z_0) = \frac{\omega_0 R}{r(z_0)}, \quad \hbar\omega_0 = 40 A^{-1/3}\ \mathrm{MeV}, \quad R = r_0 \cdot A^{1/3}, \quad r_0 = 1{,}2\ \mathrm{Fm}, \tag{A.3}$$

где

$$r(z_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{z_0^2}{\left\{2\sqrt{2}\sqrt{R^3(2R^3 + z_0^3)} + 4R^3 + z_0^3\right\}^{1/3}} + \right.$$
$$\left. + \left\{2\sqrt{2}\sqrt{R^3(2R^3 + z_0^3)} + 4R^3 + z_0^3\right\}^{1/3} - z_0\right], \tag{A.4}$$

то

$$\frac{m\omega(z_0)}{\hbar} = \frac{m\omega_0}{\hbar} \cdot \frac{R}{r(z_0)} = \frac{m \cdot 40\ \mathrm{MeV}}{\hbar^2} \cdot \frac{r_0}{r(z_0)} =$$
$$= \frac{40\ \mathrm{MeV} \cdot 940\ \mathrm{MeV}^2}{9 \cdot 10^{46}\ \frac{\mathrm{Fm}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot 6{,}582^2 \cdot 10^{-44}\ \mathrm{MeV}^2 \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{r_0}{r(z_0)} = 0{,}964 \cdot \frac{r_0}{r(z_0)}\ \mathrm{Fm}^{-2}. \tag{A.5}$$

Если положить $\hbar = 1$ и приравнять (A.5) и $m\omega(z_0)$, то получим

$$m = 0{,}024\ \frac{1}{\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{Fm}^2}. \tag{A.6}$$

Таким образом, получим величины, которые дают размерность $[n_z] = 1$ при использовании $[z_0] = \mathrm{Fm}$:

$$\hbar = 1, \tag{A.7a}$$

$$m = 0{,}024\ \mathrm{MeV}^{-1} \cdot \mathrm{Fm}^{-2}, \tag{A.7b}$$

$$\omega_0 = 40A^{-1/3}\ \mathrm{MeV}, \tag{A.7c}$$

$$r_0 = 1{,}2\ \mathrm{Fm}. \tag{A.7d}$$

# Список литературы


1. M. Mirea, “Superasymmetric two-center shell model for spontaneous heavy-ion emission”, — *Phys. Rev. C*, v. 54, iss. 1, p. 302–314, 1996.
2. P. Holzer, U. Mosel, and W. Greiner, “Double-centre oscillator and its application to fission”, — *Nuclear Physics A*, v. 138, iss. 2, p. 241–252, 1969.
3. A. Trkov *et al.*, “IRDFF-II: A New Neutron Metrology Library”, — *Nuclear Data Sheets*, v. 163, p. 1–108, 2020. DOI: `10.1016/j.nds.2019.12.001`.
4. A. J. Koning and D. Rochman, “Modern Nuclear Data Evaluation with the TALYS Code System”, — *Nuclear Data Sheets*, v. 113, iss. 12, p. 2841–2934, 2012. DOI: `10.1016/j.nds.2012.11.002`.
5. R. Capote *et al.*, “RIPL — Reference Input Parameter Library for Calculation of Nuclear Reactions and Nuclear Data Evaluations”, — *Nuclear Data Sheets*, v. 110, iss. 12, p. 3107–3214, 2009. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.nds.2009.10.004`.
6. M. Mirea, “Two Center Shell Model with Woods-Saxon Potentials”, — *Romanian Reports in Physics*, v. 59, iss. 2, p. 523–531, 2007.
7. О. Бор и Б. Моттельсон, *Структура атомного ядра. Том 1. Одночастичное движение.* — Москва: Мир, 1971.
8. G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists.* — 5th ed. Academic Press, 2001.
9. N. Saad and R. L. Hall, “Integrals containing confluent hypergeometric functions with applications to perturbed singular potentials”, — *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, iss. 28, p. 7771–7788, 2003.
10. А. С. Давыдов, *Квантовая механика.* — 2-е изд. Москва: Наука, 1973.
11. D. Scharnweber, W. Greiner, and U. Mosel, “The two-center shell model”, — *Nuclear Physics A*, v. 164, iss. 2, p. 257–278, 1971.