Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ОТЧЁТ О
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

# ИЗУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ В ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

| | | | |
|---|---|---|---|
| Научный руководитель | ________ | д. ф. - м. н., проф. | С.Г. Рубин |
| Студент | ________ | | В.О. Юшин |

Москва 2022

# Содержание

# 1 Постановка задачи и основные формулы

Проблема иерархии масштабов заключается в том, что гравитация в $10^{24}$ раз слабее слабого взаимодействия, т.к. масса Планка велика: $M_{Pl} \sim 10^{19}\, GeV$. В дополнительных измерениях масса планка может быть меньше и гравитация встанет в один ряд с остальными взаимодействиями. Для $D$-мерного пространства можно записать действие скалярного поля; вариация действия приводит к классическим уравнениям, из которых получаются структуры, они должны быть устойчивы.
Задача состоит в исследовании на устойчивость скалярного поля $w$ в $D$-мерном пространстве $[D = 4 + n]$. Она сводится к исследованию на устойчивость решений уравнения Клейна-Гордона:

$$\Box w = -W'_w(w) \ , \qquad W(w) = \frac{1}{2} m^2 w^2 \ , \qquad \Box \equiv \Box_D \ . \tag{1}$$

Метрика $D$-мерного пространства:

$$ds^2 = e^{2\gamma(u)} \left( dt^2 - e^{2Ht} \delta_{ij} dx^i dx^j \right) - du^2 - r^2(u)\, d\Omega^2_{n-1} \ , \qquad i, j = \overline{1,3} \tag{2}$$

[с учётом переименования координаты $x^4 \equiv u$]. В дальнейшем будем считать $w = w(t,u)$ – скалярная функция в пространстве с дополнительными измерениями, $\gamma(u) = 0$ и то, что функция $r(u)$ известна [является решением стационарной системы, её вид представлен на рис. 1].

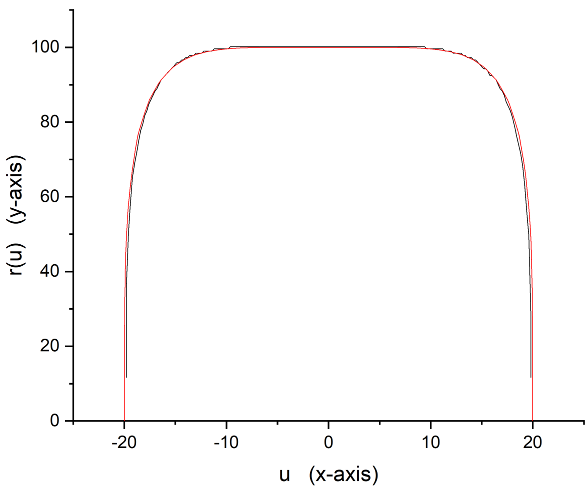



Рис. 1: График $r(u)$.
Черной линией показан изначальный набор данных, не имеющих аналитической зависимости, красной линией показана фитирующая функция для данного набора данных. Была выбрана функция $|x/a|^k + |y/b|^l = 1$, при $a = 20$, $b = 100$, $k = 6$, $l = 4$.

В последнем слагаемом метрики (2), $d\Omega^2_{n-1}$ является метрикой $(n-1)$-мерной поверхности единичной сферы в $D$-мерном пространстве, её вид:

$$d\Omega^2_{n-1} = \left(dx^5\right)^2 + \left(dx^6\right)^2 \sin^2(x^5) + \left(dx^7\right)^2 \sin^2(x^5) \sin^2(x^6) + \ldots$$
$$\ldots + \left(dx^{n+3}\right)^2 \prod_{k=5}^{n+2} \sin^2(x^k) \ .$$

## 2 Переход к уравнению Шрёдингера

Преобразуем исходное уравнение (1) к виду стационарного уравнения Шрёдингера, его легче исследовать на устойчивость. Для начала явно распишем даламбертиан в многомерном пространстве, действующий на $w$:

$$\begin{aligned}
\Box w &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\frac{\partial w}{\partial x^\mu}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial w}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\right)+\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) = \\
&= \partial_\mu w\cdot\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\nu g_{\lambda\rho}+\partial_\nu g^{\mu\nu}\right]+g^{\mu\nu}\cdot\partial_\mu\partial_\nu w\ . \qquad (3)
\end{aligned}$$

Видно, что обнулить выражение (3) могут производные от $w$, они в свою очередь не будут равны нулю только если берутся по переменным $t$ и $u$ [т.к. $w = w(t,u)$]. Кроме того, метрический тензор диагонален [это видно из того, что в метрику (2) входят квадраты переменных]. Следовательно, всюду: $\mu = \nu$ и $\lambda = \rho$. Перед дальнейшими преобразованиями введём обозначения: $\partial_\xi\partial_\xi w \equiv \partial^2_{\xi\xi}w \equiv \partial^2_\xi w$.

• При $\mu = \nu = t$ выражение (3) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\partial_t w\cdot\left[\frac{1}{2}g^{tt}\left(g^{\lambda\lambda}\partial_t g_{\lambda\lambda}\right)+\partial_t g^{tt}\right]+g^{tt}\cdot\partial_t^2 w &= \\
= 3\partial_t w\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{2Ht}}2He^{2Ht}\right)+0\right]+\partial_t^2 w &= \\
&= 3H\partial_t w+\partial_t^2 w\ .
\end{aligned}$$

• При $\mu = \nu = u$:

$$\begin{aligned}
\partial_u w\cdot\left(\frac{1}{2}g^{uu}\left(g^{\lambda\lambda}\partial_u g_{\lambda\lambda}\right)+\partial_u g^{uu}\right)+g^{uu}\cdot\partial_u^2 w &= \\
&= -\partial_u w\cdot\frac{n-1}{r}\partial_u r-\partial_u^2 w\ .
\end{aligned}$$

Теперь можем свести уравнение (1) для функции $w(t,u)$ к виду

$$\partial_t^2 w+3H\partial_t w-\partial_u^2 w-\frac{n-1}{r}\partial_u r\cdot\partial_u w = -W'_w(w)\ . \qquad (4)$$

Будем рассматривать функцию $w(t,u)$ как суперпозицию стационарной функции $w_s$, являющейся решением классического уравнения, и малого отклонения от этого стационарного значения $\delta w$:

$$w(t,u) = w_s(u)+\delta w(t,u)\ . \qquad (5)$$

Преобразуя левую часть выражения (4) и оставляя правую неизменной, получаем:

$$\partial_t^2(\delta w) + 3H\partial_t(\delta w) - \partial_u^2(\delta w) - \frac{n-1}{r}\partial_u r \cdot \partial_u(\delta w) +$$
$$+ \left[-\partial_u^2(w_s) - \frac{n-1}{r}\partial_u r \cdot \partial_u(w_s)\right] = -W'_w(w) \ . \qquad (6)$$

Отдельно правая часть выражения (4) преобразуется следующим образом:

$$-W'_w(w) = -W'_w(w_s + \delta w) = -W'_w(w_s) - W''_w(w_s) \cdot \delta w \ .$$

Выражение для $-W'_w(w_s)$ находим, подставляя $w_s$ в исходное (4). Видим, что выражение совпадает с выражением в квадратных скобках $[\ldots]$ уравнения (6):

$$-W'_w(w_s) = -\partial_u^2(w_s) - \frac{n-1}{r}\partial_u r \cdot \partial_u(w_s) = [\ldots] \ .$$

В итоге уравнение (4) с учётом представления (5) приобретает вид:

$$\partial_t^2(\delta w) + 3H\partial_t(\delta w) - \partial_u^2(\delta w) - \frac{n-1}{r}\partial_u r \cdot \partial_u(\delta w) = -W''_w \cdot \delta w \ . \qquad (7)$$

Для исследования устойчивости решений представим малые отклонения в следующем виде:

$$\delta w = C(u)e^{i\lambda t} \ . \qquad (8)$$

При $H = 0$ и с учётом (8) уравнение (7) будет выглядеть так:

$$-C(u)\lambda^2 e^{i\lambda t} - e^{i\lambda t}\partial_u^2 C(u) - \frac{n-1}{r}e^{i\lambda t}\partial_u r \cdot \partial_u C(u) = -W''_w \cdot C(u)e^{i\lambda t} \ .$$

Группируя подобные приводить к следующему выражению

$$\partial_u^2 C(u) + \frac{n-1}{r}\partial_u r \cdot \partial_u C(u) = [W''_w - \lambda^2]C(u) \ . \qquad (9)$$

Для того чтобы свести уравнение (9) к выражению вида уравнения Шрёдингера, необходимо сделать замены:

$$C(u) = Q(u) \cdot \Psi(u) \ , \qquad Q(u) = r(u)^{(1-n)/2} \ . \qquad (10)$$

Подставляя замены (10) в уравнение (9), получаем:

$$\partial_u\{\Psi \cdot \partial_u Q + Q \cdot \partial_u \Psi\} + \frac{n-1}{r}\partial_u r\{\Psi \cdot \partial_u Q + Q \cdot \partial_u \Psi\} = [W''_w - \lambda^2] \, Q \, \Psi \ .$$

Проводя дальнейшие преобразования,

$$\Psi \cdot \partial_u^2 Q + \underline{2\partial_u Q \cdot \partial_u \Psi} + Q \cdot \partial_u^2 \Psi + \frac{n-1}{r}\partial_u r \cdot \partial_u Q \cdot \Psi +$$
$$+\underline{\underline{\frac{n-1}{r}\partial_u r \cdot Q \cdot \partial_u \Psi}} = [W''_w - \lambda^2]\, Q\, \Psi\ ,$$

видно, что слагаемые подчёркнутые одной и двумя чертами противоположны, и они компенсируют друг друга, $\underline{(\ldots)} = -\underline{\underline{(\ldots)}}$:

$$\begin{aligned}
\underline{(\ldots)} &= 2\frac{1-n}{2}r^{(1-n)/2}\, r^{-1}\partial_u r \cdot \partial_u \Psi = -(n-1)r^{(1-n)/2}\, r^{-1}\partial_u r \cdot \partial_u \Psi\ ,\\
\underline{\underline{(\ldots)}} &= (n-1)r^{(1-n)/2}\, r^{-1}\partial_u r \cdot \partial_u \Psi\ .
\end{aligned}$$

Переобозначая написание производных

$$\partial_u^2 \square \equiv \square''\ , \qquad \partial_u \square \equiv \square'\ ,$$

приходим к выражению:

$$\Psi'' - \Psi \cdot \left[W''_w - \lambda^2 - \frac{Q''}{Q} - (n-1)\frac{r'}{r}\frac{Q'}{Q}\right] = 0\ ,$$

оно совпадает по виду с уравнением Шрёдингера:

$$\Psi'' - \Psi(-E + V) = 0\ , \tag{11}$$

при

$$E = \lambda^2\ , \qquad V = W''_w - \frac{Q''}{Q} - (n-1)\frac{r'}{r}\frac{Q'}{Q}\ . \tag{12}$$

Т.к. $\lambda$ в общем случае является комплексным числом, то энергия $E$ [действительная величина] может принимать как положительные, так и отрицательны значения. Глядя на (8), понимаем, что малые осцилляции не растут, если $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$, и, значит, состояния при таких $\lambda$ будут устойчивыми. Следовательно, состояния с отрицательной энергией являются неустойчивыми.

Потенциальная энергия $V = V(u)$, выражения (12), при разном количестве дополнительных измерений $n$, имеет разный вид, он приведён на рис. 2. Отдельно стоит упомянуть, что в выражение (12) для $V$ выходит слагаемое $W''_w = m^2$, эта величина влияет только на высоту графиков.

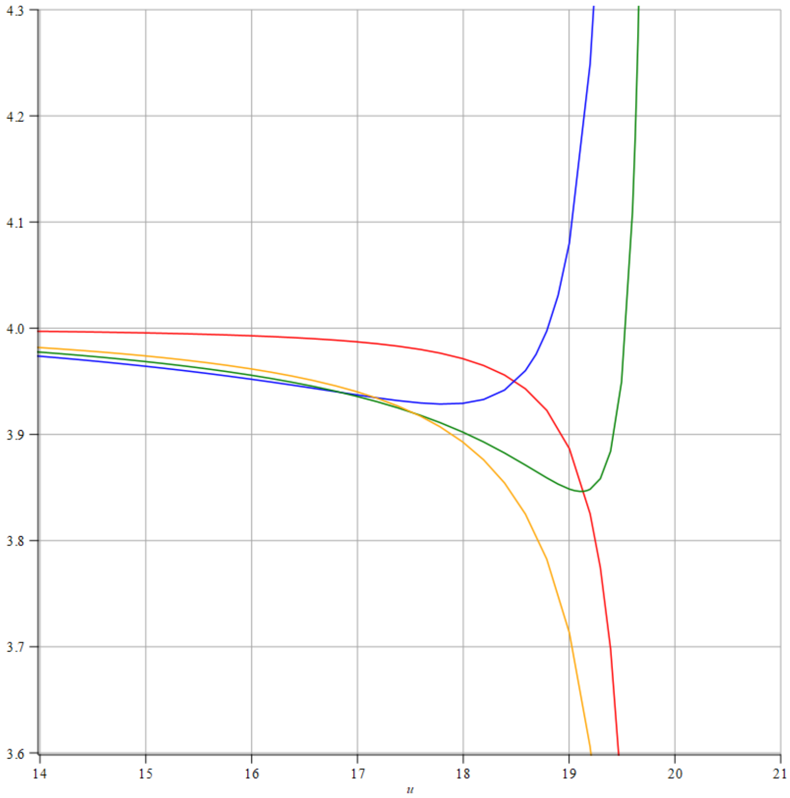



Рис. 2: График $V(u)$ вблизи $u = 20$. Красная линия при $n = 2$, оранжевая линия при $n = 8$, зелёналя линия при $n = 10$, синяя линия при $n = 12$. Выбрано $m = 2$, определяет уровень графиков как $m^2$.

# 3 Анализ потенциала для $n \geq 10$

Потенциалы уравнения (12) при $n \geq 10$ имеют минимум, где их можно аппроксимировать параболой $V_p(u)$, стационарные уровни энергии для которой мы знаем. В малой окрестности точки минимума $u_{min}$ первые три слагаемых разложения $V(u)$ в ряд дают параболу $V_p(u)$:

$$V(u) \approx V_p(u) = V(u_{min}) + V'(u_{min}) \cdot (u - u_{min}) + \frac{V''(u_{min}) \cdot (u - u_{min})^2}{2} \, .$$

Для примера на рис. 3 построен график $V(u)$ при $n = 10$, $m = 2$ и соответствующей $V_p(u)$.

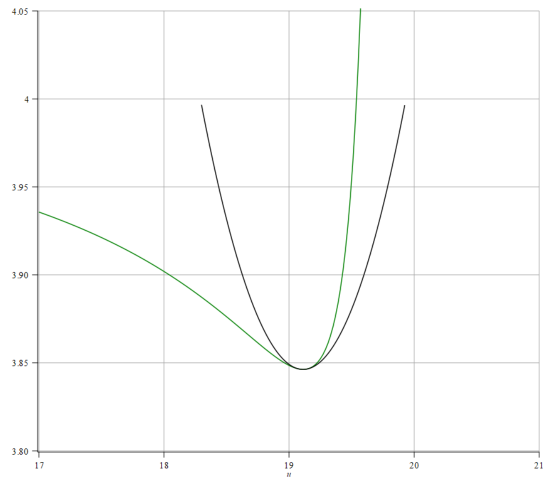



Рис. 3: График $V(u)$ при $n = 10$ и $m = 2$ обозначен зелёной линией, чёрная линия – парабола $V_p(u)$, своей вершиной совпадающая с минимумом $V(u)$. Парабола задаётся уравнением $V_p(u) = p \cdot (u - c)^2 + d$ при $p = 0{,}228$, $c = 19{,}113$ и $d = 3{,}846$.

Уравнения Шрёдингера для линейного осциллятора:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Psi'' + \left[\frac{M\omega}{2}u^2\right]\Psi = [\mathcal{E}]\Psi \, . \tag{13}$$

В квадратные скобки взяты потенциальная и полная энергии осциллятора, находящегося в начале координат. Стационарные уровни энергии будут $\mathcal{E}_z = \hbar\omega(z + 1/2)$, где $z = 0, 1, 2, \ldots$ . Пусть $\hbar^2/2M = 1$ и $M = 1$. Тогда уравнение (13) приобретает вид:

$$-\Psi'' + \left[\frac{\omega}{2}u^2\right]\Psi = [\mathcal{E}]\Psi \, , \tag{14}$$

а стационарные уровни: $\mathcal{E}_z = \omega\sqrt{2}(z + 1/2)$. Приведём уравнение (11) к виду (14). Потенциал $V(u)$ в минимуме можно аппроксимировать параболой $V_p(u)$, которая в свою очередь представима в виде суммы параболы заданной в начале координат $\widetilde{V}_p$ и вертикального смещения $d$ [при смещении осциллятора в плоскости задания функции $V(u)$ по горизонтали, энергетический спектр не изменится, при вертикальной же трансляции $d$ уровни энергии изменятся на величину трансляции]:

$$V_p(u) = \widetilde{V}_p(u) + d \, .$$

Уравнение (11) становится следующим:

$$-\Psi'' + \widetilde{V}_p\Psi = (E - d)\Psi \ . \qquad (15)$$

Сравнивая выражения (14) и (15) видно, что:

$$\frac{\omega}{2}u^2 = p \cdot u^2 \qquad \rightarrow \qquad \omega = 2p \ ,$$

$$\mathcal{E}_{min} = \omega\frac{\sqrt{2}}{2} = E_{min} - d \qquad \rightarrow \qquad E_{min} = p\sqrt{2} + d \ .$$

Подставляя параметры параболы, для $n = 10$ и $m = 2$ получаем $E_{min} = 4{,}168$. Масса влияет только на высоту потенциала $V(u)$, как следствие на величину $E_{min}$ как $m^2$. Чем больше масса $m$, тем выше энергии стационарного состояния. Поэтому при $m = 0$ энергия $E_{min} = 0{,}168$. Следовательно, будут получаться устойчивые состояния при любой массе.

Рассматривая $n > 10$ при $m = 0$ получаются отрицательные значения энергии, следовательно, такие состояния не будут устойчивыми. Но с увеличением массы достигаются положительные энергии и, как следствие, устойчивые состояния. При $n = 11$ положительная $E_{min}$ получается от $m \approx 0{,}150$, а при $n = 12$ от $m \approx 0{,}195$.

Для примера, на рисунке 4 изображены $V(u)$ при $n = 11$ и $m = 0$ с соответствующим $E_{min}$ – неустойчивое состояние. Напротив, на рисунке 5 изображены $V(u)$ для $n = 10$, $n = 11$ и $n = 12$ с соответствующими $E_{min}$, при $m = 2$, такие состояния будут устойчивыми.

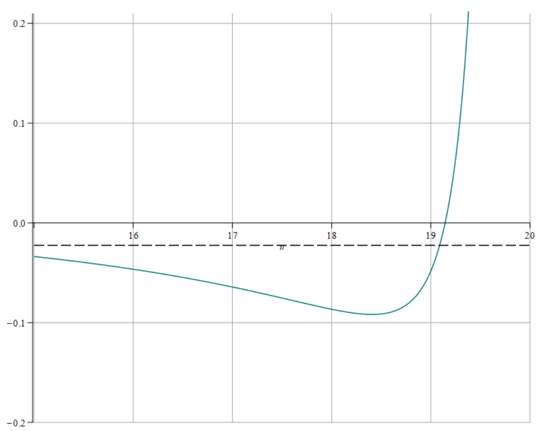
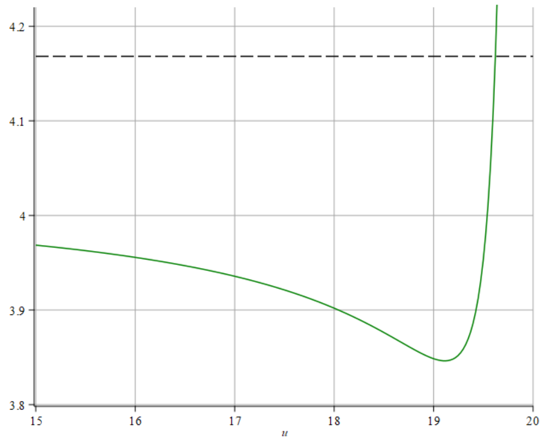
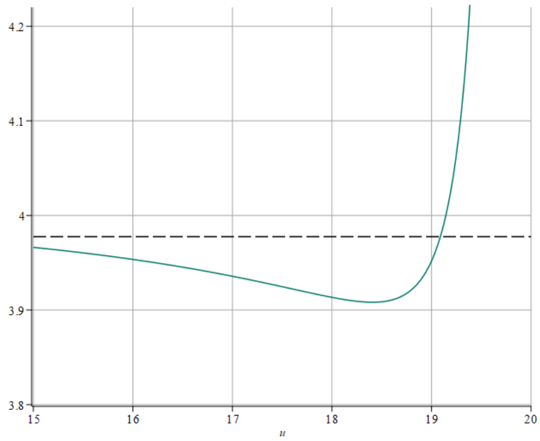


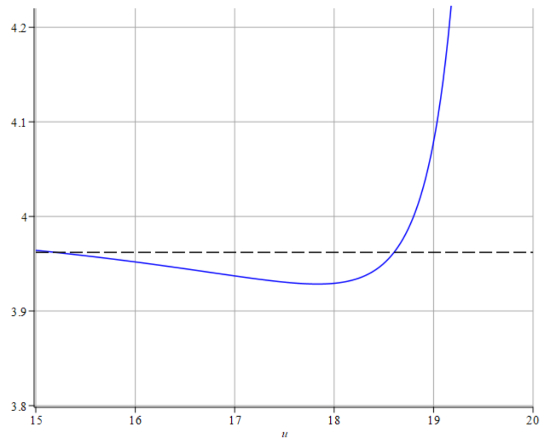

Рис. 4: График $V(u)$ и соответствующий $E_{min}$ при $n = 11$ и $m = 0$.




при $n = 10$




при $n = 11$




при $n = 12$

Рис. 5: Графики $V(u)$ при $n = 10$ (зелёная линия), $n = 11$ (голубая), $n = 12$ (синяя) и соответствующие $E_{min}$ (обозначены черным штрихом). Всюду $m = 2$.

# 4 Анализ потенциала для $1 < n < 10$

В уравнение (12) при $1 < n < 10$ имеем потенциалы подобные кулоновским, стационарные уровни такой задачи нам известны. В окрестности точки $u = 20$ потенциал можно аппроксимировать следующим выражением:

$$V(u) \approx V_c(u) = \frac{\alpha}{u - f} + g \ .$$

Для кулоновского поля в самом простом случае [атом водорода] уравнение Шрёдингера и минимальная энергия [1s-подуровень] будут такими:

$$-\Psi'' + \left[-\frac{e^2}{u}\right]\Psi = [\mathcal{E}]\Psi \ , \qquad \mathcal{E}_{min} = -\frac{1}{4}e^4 \ . \tag{16}$$

Выражения записаны с учётом $\hbar^2/2M = 1$ и $M = 1$. Приведем уравнение (11) к виду (16). На уровни энергии горизонтальное смещение $f$ не влияет, поэтому в рамках поиска минимальной энергии можно считать $V_c(u) = \widetilde{V}_c(u) + g$, где $\widetilde{V}_c(u)$ – кулоновский потенциал в начале координат, $g$ – вертикальное смещение. Тогда уравнение (11) принимает вид:

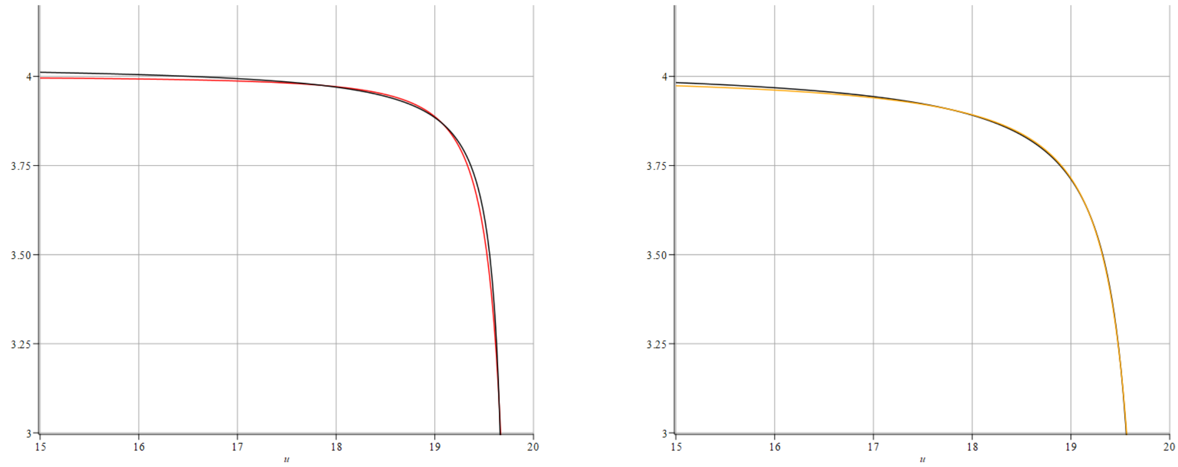
$$-\Psi'' + \widetilde{V}_c\Psi = (E - g)\Psi \ . \tag{17}$$

Сравнивая два выражения: (17) и (16), видно:

$$-\frac{e^2}{u} = \frac{\alpha}{u} \quad \to \quad e^2 = -\alpha \ ,$$
$$\mathcal{E}_{min} = -\frac{1}{4}e^4 = E_{min} - g \quad \to \quad E_{min} = -\frac{1}{4}\alpha^2 + g \ .$$

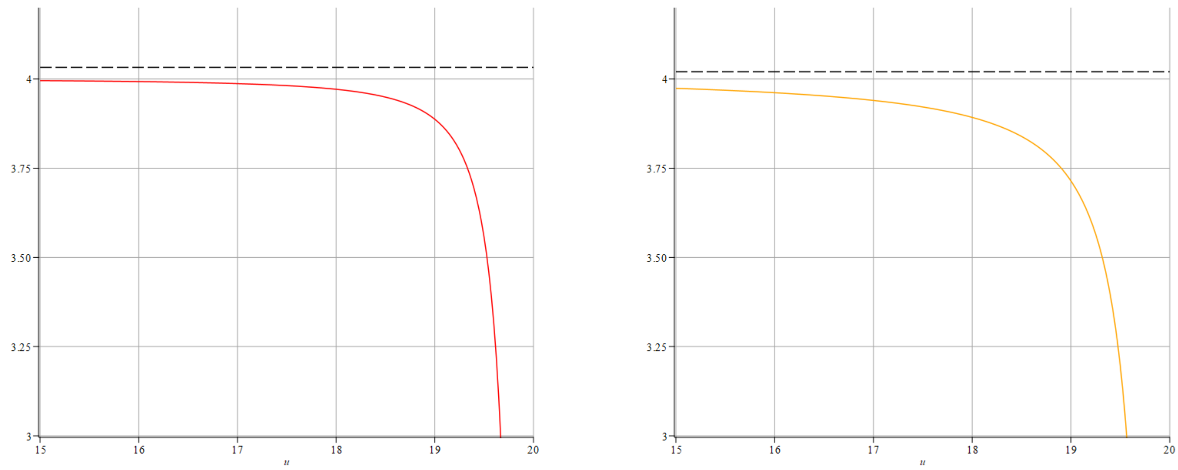
Из-за невозможности разложения в ряд потенциала $V(u)$ при $1 < n < 10$ [как это было сделано в случае $n \geq 10$], параметры $\alpha$ и $g$ подбираются вручную, путем выбора точек при аппроксимации. На рисунке 6 построены графики $V_c(u)$ для соответствующих $V(u)$ при $n = 2$ и $n = 8$ соответственно, при $m = 2$. С учётом $m = 2$ для $n = 2$ параметры: $\alpha = 0{,}118$, $g = 4{,}036$, отсюда $E_{min} = 4{,}033$; для $n = 8$: $\alpha = 0{,}267$, $g = 4{,}038$, $E_{min} = 4{,}020$.

На рисунке 7 изображены $V(u)$ для $n = 2$ и $n = 8$ с соответствующими $E_{min}$, при $m = 2$.




при $n = 2$ при $n = 8$

Рис. 6: Графики $V(u)$: красная линия при $n = 2$, оранжевая линия при $n = 8$; соответствующие аппроксимации $V_c(u)$ обозначены черными линиями; всюду $m = 2$.




при $n = 2$ при $n = 8$

Рис. 7: Графики $V(u)$ при $n = 2$ (красная линия), $n = 8$ (оранжевая) и соответствующие $E_{min}$ (обозначены черным штрихом); $m = 2$.

# 5 Итог и дальнейшая работа

Был выполнен приближенный анализ потенциала при различных $n$ с помощью известных решений уравнения Шрёдингера. Результаты, полученные при подобном анализе, указывают на устойчивость решений, за исключением некоторой области параметров, где решения неустойчивы.

Возникают вопросы, касательно точности подобного анализа. К примеру, на рисунке 5 при $n = 10$ уровень $E_{min}$ существенно выше минимума потенциала, в котором производилось разложения до квадратичного порядка, справа $E_{min}$ опирается на видимую часть потенциала, левая же точка лежит в отрицательных значениях $u$ [потенциал V(u) симметричен относительно нуля]. Для $n = 11$ и $n = 12$ рисунка 5 уровни $E_{min}$ хоть и опираются на потенциал в положительных значениях $u$, всё еще находятся достаточно высоко от минимума. При $1 < n < 10$, из-за сложностей выбора точек при аппроксимации потенциалов, получившиеся уровни $E_{min}$ находятся уж слишком высоко [рис. 7].

В дальнейшем можно численно найти стационарные уровни энергии [не только минимальные] для различных $n$.