Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

Институт ядерной физики и технологий
Кафедра №40 «Физика элементарных частиц»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕНОРМГРУППОВОГО ПОТОКА ИНТЕГРИРУЕМОЙ O(4) СИГМА-МОДЕЛИ

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц., PhD. _______ М. Н. Алфимов

Студент _______ И. Д. Федоров

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная $O(n)$ сигма-модель – скалярная теория поля, описывающая поле как некоторую точечную частицу, движущуюся по фиксированному $(n-1)$-мерному многообразию. В таких теорях поля наблюдается спонтанное нарушение непрерывных симметрий. Как было показано в [1], для каждой спонтанно нарушенной непрерывной симметрии в теории должна содержаться безмассовая частица – голдстоуновский бозон (теорема Голдстоуна). Таким образом, посредством сигма-моделей можно изучать взаимодействия между элементарными частицами, что может найти применение в физике элементарных частиц, физике высоких энергий, и, как показано в [2,3], в физике конденсированного состояния для описания электронного газа или сверхтекучего гелия-3. В [4] показано, что QLL сигма-модель является хорошим кандидатом для теории сильных взаимодействий при высоких энергиях [5], удовлетворяя требованию асимптотической свободы и демонстрируя те же симметрии, что и квантовая хромодинамика.

Данная работа посвящена изучению нелинейной $O(4)$ сигма-модели. Рассматривается метрика "сосиски", проверяется справедливость уравнения ренормгруппы в однопетлевом случае.

1. ДЕФОРМИРОВАННАЯ O(4) СИГМА-МОДЕЛЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как правило, в $O(n)$ сигма-моделях рассматриваются римановы многообразия. Действие записывается как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \, d^n\sigma,$$

где $\mathbf{X}$ – координата на заданном многообразии, $G = \{G_{ij}\}$ – метрический тензор. Метрика такова, что при отсутствии деформации действие инвариантно относительно преобразований

$$X^i \to A^{ij} X^j$$

с любой $n \times n$ ортогональной матрицей A, или, говоря иначе, действие инвариантно относительно действия группы $O(n)$ ортогональных преобразований.

Данные теории поля требуют перенормировки. Как известно, их можно описать при помощи уравнения ренормгруппы [6]. Уравнение ренормгруппы для метрики G выглядит следующим образом:

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}\left(G\right),$$

где $\dot{G}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} G_{ij}$ – производная метрического тензора по времени, V – некоторое векторное поле. В качестве t выступает некий параметр, непрерывно связанный с масштабом энергии.

В данной работе рассматривается $O(4)$ сигма-модель. Согласно гипотезе, выдвинутой в [7], метрика деформированной трехмерной сферы (метрика "сосиски"), удовлетворяющая уравнению ренормгруппы, имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 = (h - 1 - \kappa^2) \left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1-\kappa^2 r^2}{1-r^2} - \frac{2\kappa^2}{h} \right)^{-1} d\phi_1^2 + r^2 \phi_2^2 \right), \quad (1.1) \end{aligned}$$

где $h = h(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Параметр κ, также называемый параметром деформации, отвечает за нарушение $O(4)$ симметрии. Легко видеть, что при $\kappa = 0$ данная метрика представляет из себя метрику трехмерной сферы:

$$ds^2 = (h-1)\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + (1-r^2) d\phi_1^2 + r^2 d\phi_2^2 \right).$$

1.2. ОДНОПЕТЛЕВОЕ RG-УРАВНЕНИЕ

Члены, пропорциональные первой степени h, должны удовлетворять однопетлевому уравнению ренормгруппы (произвольная схема перенормировки)

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -R_{ij}, \qquad (1.2)$$

где V – некоторое векторное поле, R_{ij} – тензор Риччи, $\dot{G}_{ij}$ – производная первой фундаментальной формы по времени. Проверим, что предъявленная метрика (1.1) лействительно удовлетворяет данному уравнению.

Результат вычисления символов Кристоффеля ${\Gamma^i}_{j\kappa}$ дает

$$
{\Gamma^1}_{11} = r\frac{\kappa^2+1-2\kappa^2r^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2r^2)}, \qquad {\Gamma^1}_{22} = -r\frac{(\kappa^2-1)(1-r^2)}{1-\kappa^2r^2},
$$

$$
{\Gamma^1}_{33} = -r(1-r^2)(1-\kappa^2r^2),
$$

$$
{\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} = r\frac{\kappa^2-1}{(1-r^2)(1-\kappa^2r^2)}, \quad {\Gamma^3}_{13} = {\Gamma^3}_{31} = \frac{1}{r},
$$

остальные компоненты равны нулю. Отсюда через тензор Римана получаем тензор Риччи:

$$
R_{11} = {R^i}_{1,i1} = \frac{-2+2\kappa^2r^2-2\kappa^4r^2(r^2-1)}{(r^2-1)(1-\kappa^2r^2)^2},
$$

$$
R_{22} = {R^i}_{2,i2} = \frac{2(\kappa^2-1)(r^2-1)}{(1-\kappa^2r^2)^2},
$$

$$
R_{33} = {R^i}_{3,i3} = 2r^2-2\kappa^2r^4,
$$

остальные компоненты равны нулю. Перепишем теперь уравнение (1.2) с использованием потенциала Ψ векторного поля:

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\dot{h}(1-\kappa^2r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}}{(1-r^2)(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{\dot{h}(1-\kappa^2r^2)(1-r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}(1-r^2)}{(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 \\
0 & 0 & \dot{h}r^2
\end{pmatrix} + 2\nabla_i\nabla_j\Psi =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\frac{-2+2\kappa^2r^2-2\kappa^4r^2(r^2-1)}{(r^2-1)(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{2(\kappa^2-1)(r^2-1)}{(1-\kappa^2r^2)^2} & 0 \\
0 & 0 & 2r^2-2\kappa^2r^4
\end{pmatrix}. \tag{1.3}
$$

Предположим, что поле нулевое, $\Psi = 0$. Тогда рассматривая компоненту с $i = j = 3$, находим

$$
\dot{h} = 2 - 2\kappa^2r^2.
$$

В полученом уравнении фигурирует координата r, но параметры связи не должны зависеть от кооординат. Значит, нулевое поле не удовлетворяет уравнению ренормгруппы. Попробуем найти поле, которое подходит. Так как $\nabla_j\Psi = \dfrac{\partial\Psi}{\partial x^j} \equiv \Psi_j$ – ковариантная компонента, то по общему правилу ковариантного дифференцирования имеем

$$
\nabla_i\nabla_j\Psi = \nabla_i\Psi_j = \frac{\partial\Psi_j}{\partial x^i} - \Psi_\alpha{\Gamma^\alpha}_{ij}.
$$

Предположим, что Ψ не зависит от ϕ_2. Рассмотрим компоненту с $i = j = 3$. Для неё в силу этой независимости имеем

$$\nabla_3 \nabla_3 \Psi = -\Psi_1 {\Gamma^1}_{33}.$$

Тогда эта же компонента уравнения (1.3) перепишется как

$$2r^2 - 2\kappa^2 r^4 - 2\Psi_1 {\Gamma^1}_{33} = -\dot{h} r^2.$$

Будем искать Ψ_1 в таком виде, чтобы

$$\Psi_1 {\Gamma^1}_{33} = -\kappa^2 r^4 + \beta r^2, \tag{1.4}$$

где β – некоторая достаточно гладкая функция, зависящая от координат и параметров h, κ. Подставляя это в уравнение, имеем

$$\dot{h} = 2\beta - 2,$$

откуда видно, что β от координат зависеть не должна. Выбирая $\beta = \kappa^2$, то согласно (1.4) получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} \equiv \Psi_1 = -\frac{r\kappa^2}{1 - \kappa^2 r^2},$$

откуда $\Psi = \dfrac{1}{2} \ln \left| 1 - \kappa^2 r^2 \right| + C(\phi_1)$. Теперь подставляя такой потенциал в компоненту с $i = j = 2$ уравнения (1.3) получаем, что $C(\phi_1) = 0$. Проверяя последнюю ненулевую компоненту с $i = j = 1$ того же уравнения, получим

$$\dot{\kappa} = \frac{2\kappa^3 - 2\kappa}{h},$$

что говорит о том, что полученный потенциал действительно подходит.

Таким образом, метрика (1.1) удовлетворяет однопетлевому уравнению ренормгруппы с потенциалом

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \kappa^2 r^2 \right|,$$

причем на параметры h и κ накладывается ограничение в виде следующих дифференциальных уравнений:

$$\dot{h} = 2\kappa^2 - 2,$$
$$\dot{\kappa} = \frac{2\kappa^3 - 2\kappa}{h}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данном этапе научно-исследовательской работы рассмотрено понятие интегрируемой нелинейной $O(n)$ сигма-модели в квантовой теории поля. Начато изучение ренормгруппового потока данной модели, а именно, для предполагаемой метрики “сосиски” интегрируемой $O(4)$ сигма-модели выполнена проверка уравнения ренормгруппы в однопетлевом случае, получен положительный результат, причем векторное поле оказалось ненулевым и, кроме того, потенциальным.

Дальнейшее изучение деформированной $O(4)$ сигма-модели состоит в нахождении поправки к метрике и бета-функции по h в двухпетлевом случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Broken symmetries*, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.

[2] G. Schwiete, *Erratum: Nonlinear sigma model with particle-hole asymmetry for the disordered two-dimensional electron gas*, *Phys. Rev. B* **106** (2022) 079901.

[3] H. Yabu and H. Kuratsuji, *Nonlinear sigma model lagrangian for superfluid he3-a (b)*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **32** (1999) 7367.

[4] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory*, *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [`arXiv:hep-ph/0601196`].

[5] F. Kleefeld, *Consistent relativistic quantum theory for systems/particles described by non-hermitian hamiltonians and lagrangians*, *AIP Conference Proceedings* **660** (2003) 325.

[6] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models*, *Journal of High Energy Physics* (2018) [`arXiv:1804.03399`].

[7] B. Hoare, N. Levine and A.A. Tseytlin, *Integrable sigma models and 2-loop rg flow*, *Journal of High Energy Physics* (2019) [arXiv:1910.00397].