Специфика формирования крупномасштабной структуры Вселенной в модели темных атомов

Студент: Карни Мд Вейс

Руководитель: Проф., д.ф.-м.н. Хлопов М. Ю.

Москва 2023г.

Введение

Темные атомы *OHe*

- Система темных атомов *OHe* похожа на боровскую систему атомов водорода
- В отличии от атома водородаn, у темного атома OHe очень тяжелое ядро, которое состоит из равномерно отрицательно заряженных частиц O и частицы He, связанных вместе
- Энергетические уровни и вероятности переходов, определяются взаимодействием между частицами O и He
- Система OHe представляет интерес для исследователей, изучающих темную материю, потому что это простая система, которую можно изучать теоретически
- Система темных атомов OHe может быть обнаружена благодаря ее взаимодействию с обычной материей, обеспечивая потенциальный способ косвенного обнаружения темной материи

- Скорость формирования темных атомов OHe важна, потому что она определяет обилие этих частиц во Вселенной.
- присутствие атомов OHe может оказывать влияние на наблюдаемые свойства галактик и других астрономических
- Эти темные атомы также могут вносить свой вклад в общую плотность Вселенной, что влияет на скорость расширения и конечную судьбу Вселенной.

Оценко плотности числа частиц O во Вселенной при формирорвании OHe

Расчет плотности числа частиц О-частиц

- Мы знаем, что плотность энергии О-частиц во Вселенной определяется по формуле: $\rho_O = m_O n_O c^2$, где m_O - масса О-частицы, а n_O - плотность числа частиц.
- $\rho_{tot} = \rho_{rad} + \rho_M + \rho_O$ где ρ_{rad} - плотность энергии излучения, ρ_M - плотность энергии вещества и ρ_O - плотность энергии О частиц.
- $\rho_{tot} = \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ где H_0 - современная постоянная Хаббла, а G - гравитационная постоянная.
- Во время формирования OHe температура Вселенной составляла около 100 кэВ

- мы можем оценить значение H на данный момент как:

$$H(T) \approx \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{tot}(T)} = 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{M_{Pl}}$$

где g_* - эффективное число релятивистских степеней свободы, T - температура и M_{Pl} - планковская масса.

- Предполагая, что данный момент O частиц находятся в тепловом равновесии с излучением и веществом во Вселенной

$$n_O = \frac{\rho_O}{m_O c^2} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \frac{g_O}{g_*} \frac{\rho_{rad}(T)}{m_O} \left(\frac{T}{m_O c^2}\right)^3$$

где $\zeta(3) \approx 1.202$ - дзета-функция Римана, оцененная в 3, g_O - число внутренних степеней свободы частицы O, и мы предположили, что частицы O достигли химического равновесия с излучением и веществом.

- Используя приведенные выше уравнения, мы можем вычислить плотность числа частиц O следующим образом:

$$n_O \approx 2.98 \times 10^{21} g_O \left(\frac{100\ \mathrm{keV}}{m_O c^2}\right)^3 \left(\frac{g_*}{10.75}\right)^{1/2} \quad m^{-3}$$

где мы использовали $g_* = 10.75$ для эффективного числа релятивистских степеней свободы при температуре 100 кэВ.

- Предполагая $m_O = 10$ ГэВ/с^2 и $g_O = 2$, получаем: $n_O \approx 4.13 \times 10^{18}$ м$^{-3}$,

$$\boxed{n_O \approx 4.13 \times 10^{18}\ \text{м}^{-3}}$$

Оценко поперечного сечения для формирования OHe

- Формула поперечного сечения для формирования OHe из статьи Кузьмина и Рубакова, использующая $m_O = 10$ ГэВ/с ^{2} и температуру $T = 100$ кэВ
-

$$\sigma_{OHe} = 8\pi\alpha_O^2\alpha_{\mathrm{eff}}^2 \left(\frac{m_O}{m_e}\right)^2 \frac{1}{v_{\mathrm{rel}}^2}\left[\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{v_{\mathrm{esc}}}{v_{\mathrm{rel}}}\right) - \sqrt{\frac{v_{\mathrm{esc}}^2}{v_{\mathrm{rel}}^2}-1}\left(1-\frac{v_{\mathrm{esc}}^2}{v_{\mathrm{rel}}^2}\right)\right] =$$

$$= 8\pi\left(\frac{g_O}{4\pi}\right)^2\left(\frac{g_{\mathrm{eff}}}{4\pi}\right)^2\left(\frac{m_O}{m_e}\right)^2 \frac{1}{v_{\mathrm{rel}}^2}\left[\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{v_{\mathrm{esc}}}{v_{\mathrm{rel}}}\right) - \sqrt{\frac{v_{\mathrm{esc}}^2}{v_{\mathrm{rel}}^2}-1}\left(1-\frac{v_{\mathrm{esc}}^2}{v_{\mathrm{rel}}^2}\right)\right]$$

- где мы использовали $\alpha_O = g_O^2/(4\pi)$ и $\alpha_{\mathrm{eff}} = g_{\mathrm{eff}}^2/(4\pi)$, причем $g_O = 2$ и $g_{\mathrm{eff}} = 2$ представляют собой степени свободы для частицы O и эффективные степени свободы при $T = 100$ кэВ соответственно.

- Используя боровский радиус OHe как $a_0 = 2 \times 10^{-13}$ см, мы имеем $v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{2GM_{\mathrm{OHe}}/a_0} \approx 1.92 \times 10^{11}$ см /с, где M_{OHe} - масса OHe. Принимая $M_{\mathrm{OHe}} \approx 2m_p$, как и раньше, мы имеем $v_{\mathrm{esc}} \approx 1.36 \times 10^6$ см /с.
- Затем мы можем вычислить относительную скорость v_{rel}, используя то же выражение, что и раньше, которое дает $v_{\mathrm{rel}} \approx 3.38 \times 10^7$ см /с. Вставляя эти значения в выражение для σ_{OHe}, получаем:

$$\boxed{\sigma_{OHe} \approx 1.41 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2.}$$

Вычисление скорости формирования *OHe*

- Скорость образования *OHe* на единицу объема может быть рассчитана по формуле:

$$\frac{dN_{OHe}}{dt} = n_O n_{He} \left\langle \sigma_{OHe} v \right\rangle$$

где n_O - плотность число частиц O, n_{He} - плотность число атомов гелиям и $\langle \sigma_{\mathrm{OHe}} v \rangle$ - усредненное по скорости поперечное сечение образования OHe.

- Используя приведенные значения, мы имеем:

$$\frac{dN_{\mathrm{OHe}}}{dt} = \left(4.13 \times 10^{18}\ \mathrm{m}^{-3}\right) \left(n_{\mathrm{He}}\right) \left(1.41 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2\right) \langle v \rangle$$

где $\langle v \rangle$ - средняя относительная скорость между частицами O и атомами гелия. Мы можем приблизить это следующим образом:

- $$\langle v\rangle \approx \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_{\mathrm{He}}}} = \sqrt{\frac{8\left(1.38\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}\right)\left(100\mathrm{keV}\right)}{\pi\left(6.646\times10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)}} \approx 1221\ \mathrm{m/s}$$

  где k_B - постоянная Больцмана, T - температура и m_{He} - масса атома гелия.
- плотность число атомов гелия может быть рассчитана исходя из плотности Вселенной и массовой доли гелия
- $$n_{\mathrm{He}} = \frac{\rho_{\mathrm{c}}\Omega_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}}}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \approx \frac{\left(1.88\times10^{-26}\ \mathrm{kg/m^3}\right)(0.24)}{\left(6.646\times10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)} \approx 8.5\times10^{18}\ \mathrm{m}^{-3}$$

  где ρ_{c} -относительная плотность Вселенной, а Ω_{He} - массовая доля гелия. Подставляя значения, получаем

- $$\frac{dN_{OHe}}{dt} \approx \left(4.13 \times 10^{18}\ m^{-3}\right)\left(8.5 \times 10^{18}\ m^{-3}\right)\left(1.41 \times 10^{-24}\ cm^{2}\right) \times \\ \times \left(1221\ m/\mathrm{s}\right)\ \approx 4.20 \times 10^{-3}\ s^{-1}\ m^{-3}$$

$$\boxed{\frac{dN_{OHe}}{dt} \approx 4.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-3}}$$

Температура и плотность формирования *OHe*

- Определить условия температуры и плотности, необходимые для образования OHe, используя теоретические модели и допущения. Мы можем использовать следующую формулу для оценки температуры,

$$R_{OHe} = n_O \cdot \sigma_{OHe} \cdot v_{rel}$$

 где n_O - численная плотность частиц O, σ_{OHe} - поперечное сечение образования OHe, v_{rel} - относительная скорость между частицами O и He и R_{OHe} - скорость образования OHe на единицу объема.
- Скорость образования OHe на единицу объема определяется по формуле $r_{OHe} = n_O^2 \sigma_{OHe} v_{rel}$, где n_O - плотность числа частиц O, σ_{OHe} - поперечное сечение образования OHe и v_{rel} - относительнаяскорость между частицей O и ядром Он.

- Частицы O нерелятивистские и могут рассматриваться как классический идеальный газ с распределением скоростей Максвелла-Больцмана.
- Частицы O и ядра He образуют связанное состояние с характерным размером R_{OHe}, который может быть аппроксимирован как радиус Бора для системы OHe.
- Частицы O намного массивнее ядер He, поэтому систему OHe можно рассматривать как проблему двух тел с ядром He, зафиксированным в начале координат.
- Используя эти допущения и уравнения, мы можем вывести выражение для температуры T, необходимой для образования OHe:

$$T = \frac{m_O}{k_B} \left(\frac{R_{OHe}}{n_O \sigma_{OHe}} \right)^{2/3}$$

где m_O - масса частицы O, а k_B - постоянная Больцмана.

- Подставляя приведенные значения, получаем:

$$T = \frac{(10\ \mathrm{GeV}/c^2)(1\ \mathrm{GeV}/c^2)}{k_B} \left(\frac{4.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-3}}{4.13 \times 10^{18}\ \mathrm{m}^{-3} \times 1.41 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2} \right)^{2/3}$$

Упрощая это выражение, получаем: $\boxed{T \approx 91.9\ \mathrm{keV}}$

- Чтобы определить условие плотности He, необходимое для формирования OHe, мы можем использовать уравнение Saha:

$$\frac{n_{\mathrm{OHe}}}{n_{\mathrm{O}} n_{\mathrm{He}}} = \left(\frac{2\pi m_{\mathrm{e}} k_{\mathrm{B}} T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2g_{\mathrm{OHe}}}{g_{\mathrm{O}} g_{\mathrm{He}}} \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{b}}}{k_{\mathrm{B}} T} \right)$$

где n_{OHe} - плотность числа OHe, n_{O} - плотность числа O-частиц, n_{He} - плотность числа He, m_{e} - масса электрона, k_{B} - постоянная Больцмана, T - температура, h - постоянная Планка, g_{OHe} - вырождение OHe, g_{O} - вырождение O-частиц, g_{He} - вырождение He и E_{b} - энергия связи OHe.

- Мы можем переставить уравнение для решения n_{He}:

$$n_{\mathrm{He}} = \frac{n_{\mathrm{OHe}}}{n_{\mathrm{O}}} \left(\frac{g_{\mathrm{O}} g_{\mathrm{He}}}{2 g_{\mathrm{OHe}}}\right) \exp\left(\frac{E_{\mathrm{b}}}{k_{\mathrm{B}} T}\right) \left(\frac{h^2}{2\pi m_{\mathrm{e}} k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2}$$

- Подключая приведенные значения, получаем:

$$n_{\mathrm{He}} = \frac{(4.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-3})}{(4.13 \times 10^{18}\ \mathrm{m}^{-3})} \left(\frac{2}{2}\right) \exp\left(\frac{(-1.6\ \mathrm{MeV})}{(91.9\ \mathrm{keV})(1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K})}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s})^2}{2\pi(9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K})(91.9 \times 10^{3}\ \mathrm{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV})}\right)^{3/2}$$

- Упрощая выражение, получаем:

$$\boxed{n_{\mathrm{He}} \approx 1.19 \times 10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}}$$

Вычисление времени формирования *OHe*

- Используя ту же формулу и предполагая плотность He $1.19 \times 10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}$ и температуру 91,9 кэВ, мы можем вычислить время, когда во Вселенной существовали необходимые условия для образования OHe. Уравнение получается в результате объединения уравнений Фридмана с уравнением состояния для вселенной с преобладанием излучения, которое задается в $\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$, где g_* - эффективное число релятивистских степеней свободы при температуре
- Используя уравнение Фридмана $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$, мы можем решить для t в терминах ρ и g_*:

$$t = \frac{1}{2H} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}}$$

- Подставляя выражение в ρ, получаем:

$$t = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{T^2} \sqrt{g_*} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{30}}}$$

- Упрощая константы, мы приходим к:

$$t = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \frac{1}{2} \ln \frac{2.58 \times 10^{38}}{g_*^{1/2} T^2}$$

- предполагая, что во Вселенной преобладает излучение. где G - гравитационная постоянная, ρ - плотность энергии Вселенной, g_* - эффективное число релятивистских степеней свободы и T - температура. Подставим в t, получаем:

$$\boxed{t \approx 164 \text{ s}}$$

Оценка общего числа образовавшихся *OHe* атомов

Общее количество образовавшихся атомов OHe можно оценить следующим образом

- используя эти формулы:

$$N_{\mathrm{OHe}} = R_{\mathrm{OHe}} \cdot V$$

  где R_{OHe} - скорость образования OHe на единицу объема, а V - объем Вселенной на момент образования OHe.

- Подставляя $R_{\mathrm{OHe}} = 4.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-3}$ и $V = \frac{4}{3}\pi(ct)^3$, где c -е скорость света, а t - время образования OHe, получаем:

$$N_{\mathrm{OHe}} = 4.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-3} \cdot \frac{4}{3}\pi(ct)^3.$$

- Подставляя $t = 164$ s, получаем:

$$N_{\mathrm{OHe}} = 4.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-3} \cdot \frac{4}{3}\pi(c \cdot 164\ \mathrm{s})^3 \approx 1.22 \times 10^{57}.$$

$$\boxed{N_{\mathrm{OHe}} = 1.22 \times 10^{57}.}$$

Вероятность ковалентной связи между двумя *OHe* атомами

- В Теории валентных связей ковалентная связь между двумя атомами OHe описывается как перекрытие орбиталей He с O-орбиталями
- Орбиталь He - это сферически симметричная волновая функция, которая описывает вероятность нахождения частицы He на определенном расстоянии от ядра O
- Орбиталь O представляет собой более сложную волновую функцию, которая учитывает отрицательно заряженное ядро O
- Вероятность образования ковалентной связи между двумя атомами OHe определяется интегралом перекрытия орбиталей He и O: $P = S^2$ где S - интеграл перекрытия, заданный формулой: $S = \int \psi_{He(r)} \psi_{O(r)} dr$

- $\psi_{He(r)}$ представляет волновую функцию частицы He, которая является альфа-частицей, состоящей из двух протонов и двух нейтронов. Поскольку частица He действует подобно электрону в модели темного атома OHe, ее волновая функция аналогична волновой функции электрона в атоме водорода. В сферических координатах волновая функция может быть выражена как: $\psi_{He}(r) = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$
- $\psi_{O(r)}$, с другой стороны, представляет волновую функцию частицы O, которая является отрицательно заряженным ядром в модели темного атома OHe. Поскольку O-частица является ядром, ее волновая функция не так четко определена, как у электрона или альфа-частицы. Однакооно может быть аппроксимировано распределением Гаусса с центром в начале координат. В декартовых координатах волновая функция может быть выражена как:
$\psi_O(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi(2a_0)^3}} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$

- Подставляя их в интегральное выражение перекрытия, мы получаем:

$$S = \int \psi_{He}(r)\psi_X(r)dr \quad = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\pi(2a_0)^3}} \int \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) r^2 dr$$

  где a_0 - радиус Бора для системы OHe, который задается как $2 \cdot 10^{-13}$ см.

- Поскольку этот интеграл не может быть решен аналитически, мы можем оценить его численно, используя MATLAB или другие методы численного интегрирования. Эта волновая функция представляет вероятность обнаруженичастицы O в определенном положении r от начала координат. Теперь, поместив интегральное значение S в $P = S^2$, мы получаем, $P = 0.00484485 \approx 0.005$

```
% Define the wave functions for He and X
psi_He = @(r) 2*(1/a0)^(3/2)*exp(-r/a0);
psi_X = @(r) 1/sqrt(pi*(2*a0)^3)*exp(-r/(2*a0));

% Define the integration limits and step size
a = 0;
b = 100*a0;
dx = a0/100;

% Perform the numerical integration
r = a:dx:b;
integrand = psi_He(r).*psi_X(r).*r.^2;
integral_value = trapz(r, integrand);

% Display the result
disp(['Integral value: ' num2str(integral_value)]);
```

```
Integral value: 0.069605
```

Рис. 1: Код

Расчет длины ковалентной связи и радиальной плотности вероятности

Чтобы найти длину ковалентной связи и радиальную плотность вероятности между двумя атомами OHe, нам нужно решить уравнение Шредингера для системы OHe.

- Радиальная часть волновой функции для основного состояния системы OHe задается следующим образом:

$$\psi_{nl}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}e^{-Zr/na_0}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^{l}L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)$$

  где a_0 - радиус Бора, n и l - главные квантовые числа и квантовый момент импульса, Z - эффективный заряд ядра, а $L_n^m(x)$ - соответствующий полином Лагерра степени n и порядка m.

- Для системы OHe мы имеем $Z = 2$ (поскольку ядро O имеет заряд -2, а ядро He имеет заряд +2) и $l = 0$ (поскольку основное состояние имеет нулевой момент импульса).
  Следовательно,: $\psi_{n0}(r) = \frac{u_{n0}(r)}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{8Z^3}{a_0^3 n^3} \right)^{1/2} e^{-Zr/na_0}$ где мы использовали $L_0^0(x) = 1$ и условие нормализации $\int_0^\infty |\psi_{n0}(r)|^2 r^2 dr = 1$.
- Длина ковалентной связи - это значение r, которое максимизирует радиальную плотность вероятности $|\psi_{n0}(r)|^2$. Это происходит в $r = r_c = \frac{3}{2} a_0$. Следовательно, длина ковалентной связи для молекулы OHe равна:
  $r_c = \frac{3}{2} a_0 = 3 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$
- $|\psi_{n0}(r)|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{8Z^3}{,} a_0^3 n^3 \right) e^{-2Zr/na_0}$,Подключая $Z = 2$, $a_0 = 2 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$ и $n = 1$

$$\boxed{|\psi_{10}(r)|^2 = \frac{32}{\pi} \left(\frac{1}{a_0^3} \right) e^{-4r/3a_0}}$$

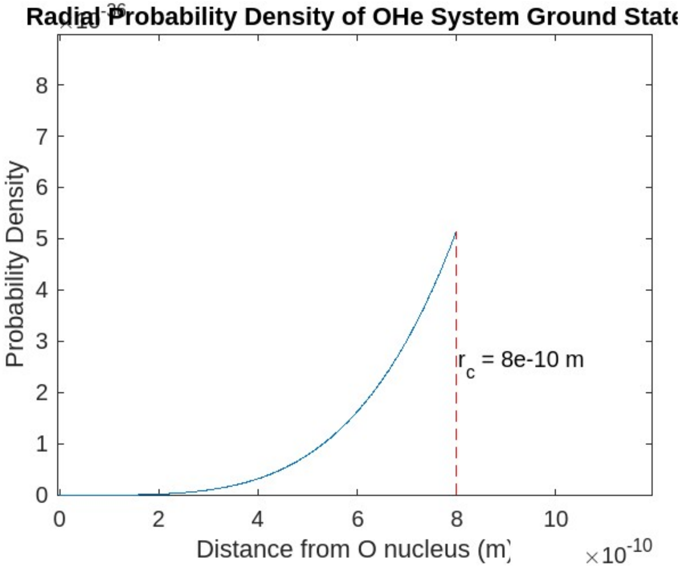

Рис. 2: радиальная плотность вероятности

Заключение

В статье рассматривается гипотеза о скорости рекомбинации OHe. Мы рассматривали темный атом OHe как структуру, подобную атому Бора, состоящую из отрицательно заряженного ядра O и альфа-частицы He, которая действует подобно электрону с положительным зарядом. Ковалентная связь между двумя атомами OHe включает совместное использование электроноподобных частиц He между ядрами O, что приводит к образованию стабильной молекулы. Вероятность образования таких молекул и их роль в эволюции темных атомов планируется исследовать в дипломной работе.

Спасибо за внимание!