

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.12.01

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
**ПРОЯВЛЕНИЕ АКСИОНОПОДОБНЫХ МОДЕЛЕЙ**

Научный руководитель  
д. ф-м. н.

\_\_\_\_\_ М. Ю. Хлопов

Студент

\_\_\_\_\_ Э. М. Ульмаскулов

Москва 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория инфляции</b>	<b>2</b>
2.1	Основание . . . . .	2
2.2	Инфлатон . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Аксион</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Рассматриваемая модель</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Анализ возмущений скалярной плотности и тензорных возмущений</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>9</b>

# 1 Введение

Инфляционная теория — один из главных кандидатов на роль теории, описывающей эволюцию ранней Вселенной. Она предполагает, что во время  $\approx 10^{-36}$ с после Большого взрыва Вселенная претерпела короткий период экспоненциального расширения, в котором ее масштаб увеличился в 40–60 e-folds. [1]

## 2 Теория инфляции

### 2.1 Основание

Модель горячего Большого Взрыва, используемая для описания Вселенной, имеет некоторые трудности. Они заключаются в несогласованности определённых теоретических предсказаний с наблюдаемыми: например проблема космологического горизонта или проблема магнитных монополей; а также необходимость задать определенные начальные условия для космологической эволюции, которые имеют определенный и специфический вид: например весьма большое  $\sim 10^{88}$  значение энтропии видимой вселенной или существование начальных возмущений плотности  $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$ .

В инфляционной теории находятся решения этих проблем. Согласно данной теории, Вселенную, на начальном этапе своего развития, сопровождала стадия экспоненциального расширения. В результате это также является объяснением однородности, изотропии и плоскостности наблюдаемой Вселенной.

Для реализации экспоненциального расширения, необходимо условие на плотность энергии во Вселенной - она должна слабо зависеть от времени. Плотность энергии для материи и для излучения таким условиям не удовлетворяют (для обоих случаев  $\rho \sim t^{-2}$ ). Поэтому для описания инфляции вводится новое поле.

### 2.2 Инфлатон

В качестве гипотетического поля, благодаря которому происходит инфляция, вводится скалярное поле, называемое инфлатоном. Действие для такого поля записывается как:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (1)$$

Считаем, что Вселенная пространственно-плоская, и соответствует метрике:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 \quad \text{где } a(t)\text{- заданная функция времени} \quad (2)$$

Тогда варьирование действия по полю  $\phi$ , получаем уравнение Эйлера — Лагранжа:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (3)$$

Это уравнение можно проинтерпретировать как скатывание частицы в потенциале  $V(\phi)$ , которому противодействует трение  $\sim H\dot{\phi}$ . Условием медленного скатывания будет являться

$$H\dot{\phi} \sim V' \quad (4)$$

За время  $H^{-1}$  значение поля изменяется на :

$$\delta\phi \sim \dot{\phi} H^{-1} \sim \frac{V'}{H^2} \ll \phi$$

$$\text{Получаем условие } \frac{V'}{\phi} \ll H^2$$

Для степенного потенциала с учетом последних 2-х неравенств получим условие:

$$\left(\dot{\phi}\right)^2 \ll V(\phi) \quad (5)$$

Для такого поля плотность энергии и давления имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}\right)^2 + V(\phi) \\ p &= \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}\right)^2 - V(\phi) \end{aligned} \quad (6)$$

И с учетом условия 5, получается уравнение состояния: В качестве 2-го уравнения для описания системы возьмем 1-е уравнение Фридмана (с учетом плоской Вселенной):

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3M_{pl}^2} = \frac{8\pi G}{3M_{pl}^2} \left( \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}\right)^2 + V(\phi) \right) \quad (7)$$

Тогда используя уравнения 3, 7, 5, получим ограничения на потенциал скалярного поля:

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \\ \eta &= \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} \ll 1 \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\epsilon$  и  $\eta$  называют параметрами медленного скатывания.

### 3 Аксион

В лагранжиане стандартной модели появляется , так называемое,  $\theta$  слогаемое (обусловленное инстантонными эффектами и квантовых эффектов, обусловленных кварками):

$$\Delta L = \frac{\alpha_s}{8\pi} \theta G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} \quad (9)$$

Этот вклад в лагранжиан является инвариантным относительно калибровочной группы стандартной модели, однако он нарушает CP-симметрию(в общем случае величина параметра может быть порядка единицы). Одно из нетривиальных следствий является оценка электрического дипольного момента нейтрона:

$$d_n \sim \theta 10^{-16} \cdot e \cdot \text{см} \quad (10)$$

На данный момент существующие данные позволяют установить верхний предел на эту величину:

$$d_n \lesssim 3 \cdot 10^{-26} \cdot e \cdot \text{см} \quad (11)$$

Соответственно появляется ограничение на  $\theta$ :

$$|\theta| \lesssim 0.3 \cdot 10^{-9}$$

Необходимость объяснить столь малую величину параметра  $\theta$  называется проблемой сильного CP-нарушения. Новое поле - аксион, является решением этой проблемы.

## 4 Рассматриваемая модель

Рассматривается модель, где аксион относится к скрытому сектору физики элементарных частиц. В данной модели он выполняет роль инфлатона, обеспечивающего инфляцию. В скрытом секторе присутствуют аналоги  $u$  и  $d$  кварков, которые не имеют зарядов, характерных  $u$  и  $d$  кваркам стандартной модели. Рассмотрим потенциал данного поля[5]:

$$V(a) = -m_\pi^2 f_\pi^2 \sqrt{1 - \frac{4m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2f_a} \right)} \quad (12)$$

где  $m_u$ - Массы  $u$  и  $d$  кварков скрытого сектора соответственно

$m_\pi$ -  
 $f_\pi$ - Параметры пионного поля

Переход к обычному аксиону осуществляется при условии  $m_u \ll m_d$ , а именно:

$$\begin{aligned} V(a) &= -m_\pi^2 f_\pi^2 \sqrt{1 - \frac{4m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2f_a} \right)} = -m_\pi^2 f_\pi^2 \sqrt{1 - \frac{4m_u}{m_d \left( \frac{m_u}{m_d} + 1 \right)^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2f_a} \right)} = \\ &= \left\| \text{Разложим } \frac{m_u}{m_d \left( \frac{m_u}{m_d} + 1 \right)^2} \text{ По малому параметру } \frac{m_u}{m_d} \text{ до первого порядка} \right\| = \\ &= -m_\pi^2 f_\pi^2 \sqrt{1 - \left( \frac{m_u}{m_d} - 2 \left( \frac{m_u}{m_d} \right)^2 \right) \sin^2 \left( \frac{a}{2f_a} \right)} = \\ &= \left\| \text{Вторым слагаемым в скобках пренебрежем по 2-му порядку малости} \right\| = \\ &= -m_\pi^2 f_\pi^2 \sqrt{1 - \frac{4m_u}{m_d} \sin^2 \left( \frac{a}{2f_a} \right)} = \left\| \text{Разложим корень до 1-го порядка} \right\| = \\ &= -m_\pi^2 f_\pi^2 \left( 1 - 2 \frac{m_u}{m_d} \sin^2 \left( \frac{a}{2f_a} \right) \right) = m_\pi^2 f_\pi^2 \left( -1 + \frac{m_u}{m_d} \left( 1 - \cos \left( \frac{a}{f_a} \right) \right) \right) = \\ &= m_\pi^2 f_\pi^2 \left( -1 + \frac{m_u}{m_d} - \frac{m_u}{m_d} \cos \left( \frac{a}{f_a} \right) \right) = -m_\pi^2 f_\pi^2 + m_\pi^2 f_\pi^2 \frac{m_u}{m_d} \left( 1 - \cos \left( \frac{a}{f_a} \right) \right) = \\ &= C + \Lambda \left( 1 - \cos \left( \frac{a}{f_a} \right) \right) \end{aligned}$$

Возвращаясь к нашему потенциалу, переопределим (для удобства) аргументы:

$$V(a) \longrightarrow \frac{V(a)}{m_\pi^2 f_\pi^2} = \tilde{V}(a), \quad a \longrightarrow \frac{a}{2f_a} = \tilde{a}, \quad R = \frac{m_u}{m_d}$$

тогда наш потенциал преобразуется следующим образом:

$$\tilde{V}(\tilde{a}) = -\sqrt{1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2(\tilde{a})} \quad (13)$$

## 5 Анализ возмущений скалярной плотности и тензорных возмущений

Инфляционные модели предсказывают генерацию скалярных возмущений в ранней Вселенной, а также существование фона первичных гравитационных волн (ПГВ). Величина этих ПГВ может быть параметризована тензорно-скалярным отношением  $r$ .

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta$$

$$r = 16\epsilon$$

где:

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V_a(a)}{V(a)} \right)^2 = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{1}{2f_a} \right)^2 \left( \frac{\tilde{V}_{\tilde{a}}(\tilde{a})}{\tilde{V}(\tilde{a})} \right)^2 < 1 \quad (14)$$

$$\eta = M_p^2 \frac{V_{aa}}{V} = M_p^2 \left( \frac{1}{2f_a} \right)^2 \frac{\tilde{V}_{\tilde{a}\tilde{a}}}{\tilde{V}}$$

Таким образом, основной задачей для оценки ПГВ и скалярных возмущений является вычисление производных от потенциала поля. Вычислим 1-ю производную:

$$\tilde{V}_{\tilde{a}} = \frac{2R}{(R+1)^2} \frac{\sin(2\tilde{a})}{\sqrt{1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}}}$$

Вычислим 2-ю производную:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\tilde{a}\tilde{a}} &= \frac{2R}{(R+1)^2} \frac{2\cos(2\tilde{a}) \sqrt{- - // - -} + \frac{2R}{(R+1)^2} \frac{\sin(2\tilde{a}) \sin(2\tilde{a})}{\sqrt{- - // - -}}}{1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}} = \\ &= \frac{2R}{(R+1)^2} \frac{2\cos(2\tilde{a}) - \frac{8R}{(R+1)^2} \cos(2\tilde{a}) \sin^2 \tilde{a} + \frac{2R}{(R+1)^2} \sin^2(2\tilde{a})}{\left(1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{2R}{(R+1)^2} \frac{2\cos(2\tilde{a}) - \frac{4R}{(R+1)^2} (2\cos(2\tilde{a}) \sin^2 \tilde{a} + \frac{1}{2} \sin^2(2\tilde{a}))}{\left(1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{2R}{(R+1)^2} \frac{2\cos(2\tilde{a}) - \frac{4R}{(R+1)^2} (\cos(2\tilde{a}) - \cos^2(2\tilde{a}) + \frac{1}{2} \sin^2(2\tilde{a}))}{\left(1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{2R}{(R+1)^2} \frac{2\cos(2\tilde{a}) + \frac{2R}{(R+1)^2} (1 - \cos(2\tilde{a}))^2}{\left(1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(a) &= \int_{a_{end}}^a \frac{d(a')}{\sqrt{2\epsilon}} = \frac{(R+1)^2}{R} \frac{f_a}{M_{pl}} \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{da}{\sin 2a} \left(1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 a\right) = \\ &= \frac{(R+1)^2}{R} \frac{f_a}{M_{pl}} \left( \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{da}{\sin 2a} - \frac{4R}{(R+1)^2} \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{\sin^2 a}{\sin 2a} da \right) \end{aligned}$$

Для удобства вычисления, обозначим первое слагаемое за  $A$ , второе за  $B$ , а внешний множитель за  $N_0$ . Тогда получим уравнение:

$$N(\tilde{a}) = N_0 (A(\tilde{a}) - B(\tilde{a})) \quad (15)$$

Теперь вычислим интегралы А и В:

$$A = \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{da}{\sin 2a} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{da}{\sin a \cos a} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a} da =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \left( \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} \right) da = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\sin \tilde{a}}{\sin \tilde{a}_{end}} - \ln \frac{\cos \tilde{a}}{\cos \tilde{a}_{end}} \right)$$

$$B = \frac{4R}{(R+1)^2} \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{\sin^2 a}{\sin 2a} da =$$

$$\left\| \text{Определим коэффициенты как } B_0 = \frac{4R}{(R+1)^2}; N_0 = \frac{4f_a}{B_0 M_{pl}} \right\|$$

$$= B_0 \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{\sin^2 a}{2 \sin a \cos a} da = \frac{B_0}{2} \int_{\tilde{a}_{end}}^{\tilde{a}} \frac{\sin a}{\cos a} da = \left( -\frac{B_0}{2} \right) \ln \frac{\cos \tilde{a}}{\cos \tilde{a}_{end}}$$

Подставим полученные интегралы в формулу (15):

$$N(\tilde{a}) = N_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\sin \tilde{a}}{\sin \tilde{a}_{end}} - \ln \frac{\cos \tilde{a}}{\cos \tilde{a}_{end}} \right) + \left( \frac{B_0}{2} \right) \ln \frac{\cos \tilde{a}}{\cos \tilde{a}_{end}} \right] =$$

$$= \frac{N_0}{2} \left( \ln \frac{\sin \tilde{a}}{\sin \tilde{a}_{end}} - (1 - B_0) \ln \frac{\cos \tilde{a}}{\cos \tilde{a}_{end}} \right) = \frac{N_0}{4} \left( \ln \frac{\sin^2 \tilde{a}}{\sin^2 \tilde{a}_{end}} - (1 - B_0) \ln \frac{\cos^2 \tilde{a}}{\cos^2 \tilde{a}_{end}} \right) =$$

$$= \frac{N_0}{4} \left( \ln \frac{\sin^2 \tilde{a}}{\sin^2 \tilde{a}_{end}} + \ln \frac{\cos^{2(B_0-1)} \tilde{a}}{\cos^{2(B_0-1)} \tilde{a}_{end}} \right) = \frac{N_0}{4} \ln \frac{\sin^2 \tilde{a} \cos^{2(B_0-1)} \tilde{a}}{\sin^2 \tilde{a}_{end} \cos^{2(B_0-1)} \tilde{a}_{end}} =$$

$$= \frac{N_0}{4} \ln \frac{\sin^2 \tilde{a}}{\sin^2 \tilde{a}_{end}} \frac{(1 - \sin^2 \tilde{a})^{B_0-1}}{(1 - \sin^2 \tilde{a}_{end})^{B_0-1}} = \frac{f_a}{B_0 M_{pl}} \ln \frac{\sin^2 \tilde{a}}{\sin^2 \tilde{a}_{end}} \frac{(1 - \sin^2 \tilde{a})^{B_0-1}}{(1 - \sin^2 \tilde{a}_{end})^{B_0-1}} \quad (16)$$

Флуктуации реликтового излучения создаются примерно в 60 e-folds до окончания инфляции[6]. Тогда

$$N_{tot} = \frac{N_0}{4} \ln \frac{\sin^2 \tilde{a}_{cmb}}{\sin^2 \tilde{a}_{end}} \frac{(1 - \sin^2 \tilde{a}_{cmb})^{B_0-1}}{(1 - \sin^2 \tilde{a}_{end})^{B_0-1}} \approx 60 \quad (17)$$

Получаем систему уравнений:

Условие окончания инфляции, получаем уравнение на  $\tilde{a}_{end}$  [6]:

$$\epsilon(\tilde{a}_{end}) = 1 = \frac{M_{pl}^2}{2f_a^2} \frac{R^2}{(R+1)^4} \frac{\sin^2 2\tilde{a}_{end}}{\left(1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}_{end}\right)^2} = \frac{1}{2N_0^2} \frac{\sin^2 2\tilde{a}_{end}}{(1 - B_0 \sin^2 \tilde{a}_{end})^2} =$$

$$= \left\| \text{Переопределим аргумент: } \sin^2 \tilde{a}_{end} = u \right\| =$$

$$= \frac{1}{2N_0^2} \frac{4u(1-u)}{(1-B_0u)^2} \quad (18)$$

$$\begin{cases} n_s|_{cmb} = 1 - 6\epsilon_{cmb} + 2\eta_{cmb} \\ r_{cmb} = 16\epsilon_{cmb} \\ \frac{N_0}{4} \ln \frac{\sin^2 \tilde{a}_{cmb}}{\sin^2 \tilde{a}_{end}} \frac{(1 - \sin^2 \tilde{a}_{cmb})^{B_0-1}}{(1 - \sin^2 \tilde{a}_{end})^{B_0-1}} \approx 60 \\ \frac{M_{pl}^2}{2f_a^2} \frac{R^2}{(R+1)^4} \frac{\sin^2 2\tilde{a}_{end}}{\left(1 - \frac{4R}{(R+1)^2} \sin^2 \tilde{a}_{end}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

Решая последние уравнение системы для  $u$  (переобозначили квадрат синуса) получается следующим:

$$\begin{aligned} 2N_0^2 - 2N_0^2 B_0 u + N_0^2 (B_0 u)^2 &= 4u - 4u^2 \\ u^2 (N_0^2 B_0^2 + 4) - 2(N_0^2 B_0 + 2)u + 2N_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Solution of the equation is following: (19)

$$u = \frac{N_0^2 B_0 + 2 \pm \sqrt{(N_0^2 B_0 + 2)^2 - (N_0^2 B_0^2 + 4)2N_0^2}}{N_0^2 B_0^2 + 4}$$

Также получаем ограничение на параметр  $R$  для того, чтобы система уравнений имела решение:

$$\begin{aligned} (N_0^2 B_0 + 2)^2 - (N_0^2 B_0^2 + 4)N_0^2 &\geq 0 \\ N_0^2 B_0 + 2 &\geq N_0 \sqrt{N_0^2 B_0^2 + 4} \\ \left(\frac{4\sqrt{2}f_a}{M_{pl}}\right)^2 \frac{1}{B_0} + 2 &\geq \frac{4\sqrt{2}f_a}{B_0 M_{pl}} \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}f_a}{M_{pl}}\right)^2 + 4} \end{aligned} \tag{20}$$

$$B_0 = \frac{4R}{(R+1)^2} \geq \frac{2\sqrt{2}f_a}{M_{pl}} \left( \sqrt{\left(\left(\frac{4\sqrt{2}f_a}{M_{pl}}\right)^2 + 4\right)} - \frac{4\sqrt{2}f_a}{M_{pl}} \right)$$



Далее из 3-го уравнения системы получены значения поля, соответствующие началу инфляционной стадии. По соответствующим данным посчитан спектральный индекс: В соответ-

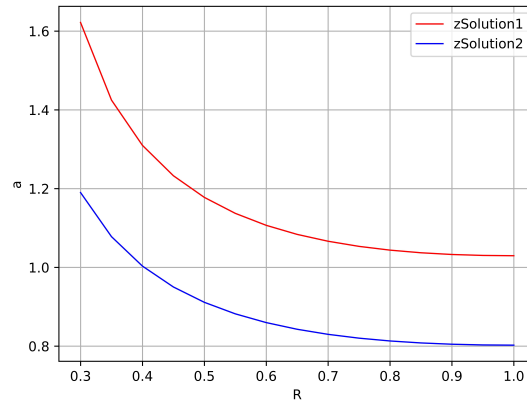


Рис. 1: Решение 3-го уравнения системы в зависимости от параметра R

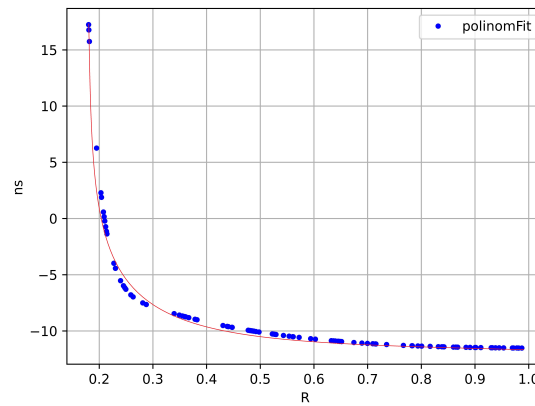


Рис. 2: Расчет для  $f_a = 0.3 M_{pl}$

ствии с экспериментальными данными на спектральный индекс  $n_s$ [7], получена оценка на параметр  $r$ :

$$r \approx 0.00154318$$

## 6 Заключение

В результате работы, изучена модель аксиона используемого в роли инфлатона, изучены основные теоретические положения, лежащие в основе данной модели; рассмотрены эксперименты, проводимые в рамках данного направления. В ходе работы проведены соответствующие расчеты и получена оценка на величину, характеризующую первичный фон гравитационных волн.

$$r \approx 0.00154318$$

## Список литературы

1. *Fuente A. de la, Saraswat P., Sundrum R.* NDetecting cosmic rays with the LOFAR radio telescope // Phys.Rev.Lett. — 2015.
2. *M. Yu. Khlopov.* Fundamentals of Cosmoparticle..M. — 2011.
3. *Д.С.Горбунов, В.А.Рубаков.* Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. — Москва : URSS, 2008.
4. *Д.С.Горбунов, В.А.Рубаков.* Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения, инфляционная теория. — Москва : URSS, 2010.
5. *Cortona G. G. di, Hardy E., Vega J. P.* The QCD axion, precisely // JHEP 01. — 2016.
6. *Baumann D.* TASI Lectures on Inflation. — 2009.
7. *Aghanim N., al. et.* Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // Astronomy & Astrophysics manuscript no. ms. — 2021.