

Бета-функция сигма-моделей с трёхмерным пространством полей в разных схемах перенормировки

Поляков Андрей Вадимович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе
Москва, 24 мая 2023 г.

Нелинейная $O(n)$ сигма-модель

В нелинейных $O(n)$ сигма-моделях поле описывается как точечная частица, движущуюся по $(n - 1)$ -мерному многообразию. Действие данной модели

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n \sigma,$$

где G_{ij} – метрический тензор, который должен удовлетворять уравнению ренорм-группы (РГ)

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G).$$

Мотивировка

Сигма-модели находят множество применений
Например она проще и точнее позволяет получить некоторые результаты в квантовой хромодинамике.

Разложение β -функции

Бета функцию можно разложить по степеням $\hbar$

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(0)}(G) + \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \dots$$

В схеме минимального вычитания (MS) известны следующие выражения

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij},$$

$$\beta_{ij}^{(2)}(G) = \frac{1}{2} R_{iklm} R_j^{klm},$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(3)}(G) = & \frac{1}{8} \nabla_k R_{ilmn} \nabla^k R_j^{lmn} - \frac{1}{16} \nabla_i R_{klmn} \nabla_j R^{klmn} - \\ & - \frac{1}{2} R_{imnk} R_{jpq}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8} R_{iklj} R^{kmnp} R^l{}_{mnp}. \end{aligned}$$

β -функция в случае трехмерного поля.

В случае, когда многообразие трехмерное тензор Римана можно выразить через тензор Риччи, метрический тензор и скалярную кривизну. Тогда бета функции можно представить как

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij},$$

$$\beta_{ij}^{(2)}(G) = \left(R_{kl} R^{kl} + \frac{1}{2} R^2 \right) G_{ij} + R_{ij} R - R_i^k R_{jk},$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(3)}(G) = & \left(\frac{3}{4} R_k^m R^{kl} R_{lm} - \frac{7}{8} R_{kl} R^{kl} R + \frac{1}{4} R^3 - \frac{1}{8} (\nabla_k R) (\nabla^k R) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (\nabla_m R_{kl}) (\nabla^m R^{kl}) \right) G_{ij} + \frac{5}{2} R_{ij} R_{kl} R^{kl} - \frac{11}{8} R_{ij} R^2 + \\ & + \frac{1}{4} (\nabla_k R_{ij}) (\nabla^k R) - 3 R_i^k R_j^l R_{kl} + \frac{19}{8} R_i^k R_{jk} R - \frac{1}{4} (\nabla_l R_{jk}) (\nabla^l R_i^k) \\ & - \frac{1}{4} (\nabla_i R^{kl}) (\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16} (\nabla_i R) (\nabla^j R). \end{aligned}$$

Возмущение метрики

Основной задачей данной исследовательской работы было определение β -функции после возмущения метрики.

$$\tilde{G}_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \dots$$

где $G_{ij}^{(L)}$ – добавка с размерной характеристикой $\hbar^L$. Тогда можно их представить, как линейную комбинацию тензоров с размерной характеристикой $\hbar$.

$$G_{ij}^{(0)} = c_1 G_{ij} R + c_2 R_{ij},$$

$$G_{ij}^{(1)} = c_3 G_{ij} R^2 + c_4 G_{ij} R_{kl} R^{kl} + c_5 G_{ij} \nabla^2 R + c_6 G_{ij} \nabla^k \nabla^l R_{kl} + c_7 R_{ij} R + c_8 \nabla^2 R_{ij} + c_9 R_{il} R_j{}^l + c_{10} \nabla_i \nabla_j R + c_{11} \nabla_i \nabla^k R_{jk} + c_{12} \nabla^k \nabla_i R_{jk}.$$

Измененная β -функция

С помощью пакетов xTensor и xPert в Wolfram Mathematica из уравнения ренорм-группы была вычислена бета функция при новой метрике

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij},$$

$$\begin{aligned}\beta_{ij}^{(2)}(G) = & -R_i^k R_{jk} + (1 + c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1 - c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \\ & - \frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2G_{ij}\nabla^2 R - c_2G_{ij}\nabla_k\nabla_l R^{kl}.\end{aligned}$$

Полученная формула для $\beta_{ij}^{(3)}(G)$ – слишком громоздкая.