

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ РЕНОРМГРУППОВОГО
ПОТОКА ИНТЕГРИРУЕМОЙ $O(4)$
СИГМА-МОДЕЛИ

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доц., PhD.

_____ М. Н. Алфимов

Студент

_____ И. Д. Федоров

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Деформированная $O(4)$ сигма-модель	3
1.1 Основные определения	3
1.2 Однопетлевой случай	4
1.3 Двупетлевой случай	7
Заключение	8
Список литературы	9

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная $O(n)$ сигма-модель – скалярная теория поля, описывающая поле как некоторую точечную частицу, движущуюся по фиксированному $(n - 1)$ -мерному многообразию. В таких теориях поля наблюдается спонтанное нарушение непрерывных симметрий. Как было показано в [1], для каждой спонтанно нарушенной непрерывной симметрии в теории должна содержаться безмассовая частица – голдстоуновский бозон (теорема Голдстоуна). Таким образом, посредством сигма-моделей можно изучать взаимодействия между элементарными частицами, что может найти применение в физике элементарных частиц и физике высоких энергий. В ряде случаев сигма модели оказываются лучше некоторых теорий. Например, они проще и точнее по сравнению с распространенной киральной теорией возмущения позволяют получить некоторые результаты в квантовой хромодинамике, такие как зарядовые радиусы пионов и каонов, массы пеонов и нуклонов, и прочее, что показано в [2].

Данная работа посвящена изучению нелинейной $O(4)$ сигма-модели. Рассматривается метрика “сосиски”, а именно двупетлевой случай.

1. ДЕФОРМИРОВАННАЯ $O(4)$ СИГМА-МОДЕЛЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как правило, в $O(n)$ сигма-моделях рассматриваются римановы многообразия. Действие записывается как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n x,$$

где $\mathbf{X}$ – координата на заданном многообразии, $G = \{G_{ij}\}$ – метрический тензор. Метрика такова, что при отсутствии деформации действие инвариантно относительно преобразований

$$X^i \rightarrow A^{ij} X^j$$

с любой $n \times n$ ортогональной матрицей A , или, говоря иначе, действие инвариантно относительно действия группы $O(n)$ ортогональных преобразований.

Данные теории поля требуют перенормировки. Как известно, их можно описать при помощи уравнения ренормгруппы [3]. Уравнение ренормгруппы для метрики G выглядит следующим образом:

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G),$$

где $\dot{G}_{ij} \equiv \frac{d}{dt}G_{ij}$ – производная метрического тензора по времени, V – некоторое векторное поле. В качестве t выступает некий параметр, непрерывно связанный с масштабом энергии.

В данной работе рассматривается $O(4)$ сигма-модель. Согласно гипотезе, выдвинутой в [4], метрика деформированной трехмерной сферы (метрика “сосиски”), удовлетворяющая уравнению ренормгруппы, имеет вид

$$ds^2 = (h - 1 - \kappa^2) \left(\frac{dr^2}{(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2)} + \left(\frac{1 - \kappa^2 r^2}{1 - r^2} - \frac{2\kappa^2}{h} \right)^{-1} d\phi_1^2 + r^2 d\phi_2^2 \right), \quad (1.1)$$

где $h = h(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Параметр κ , также называемый параметром деформации, отвечает за нарушение $O(4)$ симметрии. Легко видеть, что при $\kappa = 0$ данная метрика представляет из себя метрику трехмерной сферы:

$$ds^2 = (h - 1) \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + (1 - r^2)d\phi_1^2 + r^2 d\phi_2^2 \right).$$

1.2. ОДНОПЕТЛЕВОЙ СЛУЧАЙ

Члены, пропорциональные первой степени h , должны удовлетворять однопетлевому уравнению ренормгруппы (произвольная схема перенормировки)

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -R_{ij}, \quad (1.2)$$

где V – некоторое векторное поле, R_{ij} – тензор Риччи, $\dot{G}_{ij}$ – производная первой фундаментальной формы по времени. Проверим, что предъявленная метрика (1.1) действительно удовлетворяет данному уравнению.

Результат вычисления символов Кристоффеля $\Gamma_{j\kappa}^i$ дает

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= r \frac{\kappa^2 + 1 - 2\kappa^2 r^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= -r \frac{(\kappa^2 - 1)(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2), \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = r \frac{\kappa^2 - 1}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r},\end{aligned}$$

остальные компоненты равны нулю. Отсюда через тензор Римана получаем тензор Риччи:

$$\begin{aligned}R_{11} &= R^i_{1,i1} = \frac{-2 + 2\kappa^2 r^2 - 2\kappa^4 r^2(r^2 - 1)}{(r^2 - 1)(1 - \kappa^2 r^2)^2}, \\ R_{22} &= R^i_{2,i2} = \frac{2(\kappa^2 - 1)(r^2 - 1)}{(1 - \kappa^2 r^2)^2}, \\ R_{33} &= R^i_{3,i3} = 2r^2 - 2\kappa^2 r^4,\end{aligned}$$

остальные компоненты равны нулю. Перепишем теперь уравнение (1.2) с использованием потенциала Ψ векторного поля:

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \frac{\dot{h}(1-\kappa^2 r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{h}(1-\kappa^2 r^2)(1-r^2)+2hr^2\kappa\dot{\kappa}(1-r^2)}{(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}r^2 \end{pmatrix} + 2\nabla_i \nabla_j \Psi = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2+2\kappa^2 r^2-2\kappa^4 r^2(r^2-1)}{(r^2-1)(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\kappa^2-1)(r^2-1)}{(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 - 2\kappa^2 r^4 \end{pmatrix}. \quad (1.3)\end{aligned}$$

Предположим, что поле нулевое, $\Psi = 0$. Тогда рассматривая компоненту с $i = j = 3$, находим

$$\dot{h} = 2 - 2\kappa^2 r^2.$$

В полученном уравнении фигурирует координата r , но параметры связи не должны зависеть от координат. Значит, нулевое поле не удовлетворяет уравнению ренормгруппы. Попробуем найти поле, которое подходит. Так как $\nabla_j \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \equiv \Psi_j$ — ковариантная компонента, то по общему правилу ковариантного дифференцирования имеем

$$\nabla_i \nabla_j \Psi = \nabla_i \Psi_j = \frac{\partial \Psi_j}{\partial x^i} - \Psi_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha.$$

Предположим, что Ψ не зависит от ϕ_2 . Рассмотрим компоненту с $i = j = 3$. Для неё в силу этой независимости имеем

$$\nabla_3 \nabla_3 \Psi = -\Psi_1 \Gamma_{33}^1.$$

Тогда эта же компонента уравнения (1.3) перепишется как

$$2r^2 - 2\kappa^2 r^4 - 2\Psi_1 \Gamma_{33}^1 = -\dot{h}r^2.$$

Будем искать Ψ_1 в таком виде, чтобы

$$\Psi_1 \Gamma_{33}^1 = -\kappa^2 r^4 + \beta r^2, \quad (1.4)$$

где β – некоторая достаточно гладкая функция, зависящая от координат и параметров h, κ . Подставляя это в уравнение, имеем

$$\dot{h} = 2\beta - 2,$$

откуда видно, что β от координат зависеть не должна. Выбирая $\beta = \kappa^2$, то согласно (1.4) получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} \equiv \Psi_1 = -\frac{r\kappa^2}{1 - \kappa^2 r^2},$$

откуда $\Psi = \frac{1}{2} \ln |1 - \kappa^2 r^2| + C(\phi_1)$. Теперь подставляя такой потенциал в компоненту с $i = j = 2$ уравнения (1.3) получаем, что $C(\phi_1) = 0$. Проверяя последнюю ненулевую компоненту с $i = j = 1$ того же уравнения, получим

$$\dot{\kappa} = \frac{2\kappa^3 - 2\kappa}{h},$$

что говорит о том, что полученный потенциал действительно подходит.

Таким образом, метрика (1.1) удовлетворяет однопетлевому уравнению ренормгруппы с потенциалом

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln |1 - \kappa^2 r^2|,$$

причем на параметры h и κ накладывается ограничение в виде следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 2\kappa^2 - 2, \\ \dot{\kappa} &= \frac{2\kappa^3 - 2\kappa}{h}. \end{aligned}$$

1.3. ДВУПЕТЛЕВОЙ СЛУЧАЙ

Требуется проверить, удовлетворяет ли метрика (1.1) уравнению ренормгруппы в двупетлевом случае. Оказывается, в данном случае результат будет зависеть от выбора схемы перенормировки. В связи с этим метрика претерпевает некоторое возмущение. Пусть $\tilde{\beta}_{ij}$ – бета-функция новой метрики. При разложении $\tilde{\beta}_{ij}$ в ряд по степеням $\hbar$

$$\tilde{\beta}_{ij}(G) = \tilde{\beta}_{ij}^{(1)}(G) + \tilde{\beta}_{ij}^{(2)}(G) + \tilde{\beta}_{ij}^{(3)}(G) + \dots$$

(здесь $\tilde{\beta}_{ij}^{(n)}$ имеет размерную характеристику $\hbar^{n-1}$) в общем случае выясняется, что

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{ij}^{(1)} &= R_{ij}, \\ \tilde{\beta}_{ij}^{(2)} &= -R_i^k R_{jk} + (1 + c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1 - c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}c_2\nabla_i\nabla_j R + \frac{1}{2}c_2G_{ij}\nabla_k\nabla^k R - c_2G_{ij}\nabla_k\nabla_l R^{kl}.\end{aligned}$$

При помощи пакета xAct в Wolfram Mathematica было вычислено последнее выражение:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{11}^{(2)} &= \frac{2(1 - 2\kappa^2(c_2 + r^2) + 2\kappa^6r^2(c_2 + 2r^2 + 3c_2r^2 - 3r^4 - 9c_2r^4))}{h(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2r^2)^3} + \\ &\quad + \frac{\kappa^8(r^4 - 2(1 + c_2)r^6 + (2 + 6c_2)r^8)}{h(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2r^2)^3} + \\ &\quad + \frac{\kappa^4(1 - 6r^2 + 7r^4 + 2c_2(2 - 7r^2 + 9r^4))}{h(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2r^2)^3}, \\ \tilde{\beta}_{22}^{(2)} &= \frac{2(-1 + r^2)(1 + \kappa^2(-2 + c_2(4 - 6r^2)) - 2\kappa^6r^4(1 + c_2(-2 + 7r^2)))}{h(-1 + \kappa^2r^2)^3} + \\ &\quad + \frac{\kappa^4(1 + r^4 + 2c_2r^2(-5 + 9r^2)) + \kappa^8r^4(1 + c_2(2 - 2r^2 + 4r^4))}{h(-1 + \kappa^2r^2)^3}, \\ \tilde{\beta}_{33}^{(3)} &= \frac{2r^2(1 - 2\kappa^6r^2(1 + c_2 - 2r^2 - 5c_2r^2 + 3r^4 + 2c_2r^4))}{h(-1 + \kappa^2r^2)^2} + \\ &\quad + \frac{\kappa^4(1 - 2r^2 + 7r^4 + c_2(4 - 12r^2))}{h(-1 + \kappa^2r^2)^2} + \\ &\quad + \frac{\kappa^8r^4(1 - 2r^2 + 2r^4 + 2c_2(-1 + r^2)^2) + \kappa^2(-4r^2 + c_2(-2 + 6r^2))}{h(-1 + \kappa^2r^2)^2},\end{aligned}$$

остальные компоненты равны нулю. Далее, возмущенная метрика также раскладывается в ряд по степеням постоянной Планка:

$$\tilde{G}_{ij} = G_{ij} + \tilde{G}_{ij}^{(0)} + \tilde{G}_{ij}^{(1)} + \tilde{G}_{ij}^{(2)} + \dots,$$

здесь $\tilde{G}_{ij}^{(n)}$ имеет размерную характеристику $\hbar^n$. Для дальнейшей проверки RG-уравнения и нахождения поправки к метрике также понадобятся известные выражения

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{ij}^{(0)} &= c_1 R_{ij} + c_2 R G_{ij}, \\ \tilde{G}_{ij}^{(1)} &= (c_3 R^2 + c_4 R_{kl} R^{kl} + c_5 \nabla_k \nabla^k R + c_6 \nabla^k \nabla^l R_{kl}) G_{ij} + c_7 R_{ij} R + \\ &+ c_8 \nabla_k \nabla^k R_{ij} + c_9 R_{il} R_j^l + c_{10} \nabla_i \nabla_j R + c_{11} \nabla_i \nabla^k R_{jk} + c_{12} \nabla^k \nabla_i R_{jk}.\end{aligned}$$

Дальнейшая работа заключается в анализе уравнения ренормгруппы в двухпетлевом случае и нахождения поправки к метрике (если это возможно) с использованием указанных выше выражений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данном этапе научно-исследовательской работы была выполнена проверка результатов предыдущего семестра с использованием пакета xAct в Wolfram Mathematica. Начато рассмотрение уравнения ренормгруппы в двухпетлевом случае. Вычислена поправка первого по $\hbar$ порядка к бета-функции в произвольной схеме перенормировки, что позволит грамотно выбрать схему перенормировки.

Дальнейшее изучение деформированной $O(4)$ сигма-модели состоит в анализе ренормгруппового уравнения и последующей проверки двухпетлевого случая при помощи полученных на данном этапе результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Broken symmetries*, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.
- [2] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking*

in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory, *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [[arXiv:hep-ph/0601196](#)].

- [3] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models*, *Journal of High Energy Physics* (2018) [[arXiv:1804.03399](#)].
- [4] B. Hoare, N. Levine and A.A. Tseytlin, *Integrable sigma models and 2-loop rg flow*, *Journal of High Energy Physics* (2019) [[arXiv:1910.00397](#)].