

Исследование ренормгруппового потока интегрируемой $O(4)$ сигма-модели

Федоров Иван Денисович

НИЯУ «МИФИ»

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе
Москва, 24 мая 2023 г.

$O(n)$ сигма-модель

$O(n)$ сигма-модель – скалярная теория поля, описывающая поле как точечную частицу, движущуюся по данному $(n - 1)$ -мерному многообразию. Действие модели:

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n \sigma,$$

где G_{ij} – метрический тензор, $\mathbf{X}$ – координаты на многообразии.

Мотивировка

Сигма-модели находят множество применений. Например, она позволяет проще и точнее чем киральная теория возмущений получить некоторые результаты в квантовой хромодинамике.

Об интегрируемой $O(4)$ сигма-модели

Предполагается, что метрика имеет вид

$$ds^2 = (h - 1 - \kappa^2) \left(\frac{dr^2}{(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2)} + \left(\frac{1 - \kappa^2 r^2}{1 - r^2} - \frac{2\kappa^2}{h} \right)^{-1} d\phi_1^2 + r^2 d\phi_2^2 \right),$$

причем она должна удовлетворять уравнению ренормгруппы

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G).$$

Возмущенная бета-функция

$$\tilde{\beta}_{ij}(G) = \tilde{\beta}_{ij}^{(1)}(G) + \tilde{\beta}_{ij}^{(2)}(G) + \tilde{\beta}_{ij}^{(3)}(G) + \dots$$

Известно, как выглядят первые слагаемые:

$$\tilde{\beta}_{ij}^{(1)} = R_{ij},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ij}^{(2)} = & -R_i^k R_{jk} + (1 + c_2) G_{ij} R_{kl} R^{kl} + (1 - c_2) R_{ij} R - \frac{1}{2} G_{ij} R^2 - \\ & - \frac{1}{2} c_2 \nabla_i \nabla_j R + \frac{1}{2} c_2 G_{ij} \nabla_k \nabla^k R - c_2 G_{ij} \nabla_k \nabla_l R^{kl} \end{aligned}$$

О наборе пакетов xAct

Официальный сайт: <http://xact.es/>

Представляет набор пакетов для тензорной компьютерной алгебры

- xCoba предоставляет возможности работы с многообразиями и тензорами на них
- xTensor расширяет возможности абстрактных тензорных вычислений. Пакет может вычислять ковариантные производные, что является очень важным в данной работе

Второе слагаемое

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{11}^{(2)} &= \frac{2(1 - 2\kappa^2(c_2 + r^2) + 2\kappa^6 r^2(c_2 + 2r^2 + 3c_2 r^2 - 3r^4 - 9c_2 r^4))}{h(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2 r^2)^3} + \\ &+ \frac{\kappa^8(r^4 - 2(1 + c_2)r^6 + (2 + 6c_2)r^8)}{h(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2 r^2)^3} + \\ &+ \frac{\kappa^4(1 - 6r^2 + 7r^4 + 2c_2(2 - 7r^2 + 9r^4))}{h(-1 + r^2)(-1 + \kappa^2 r^2)^3}, \\ \tilde{\beta}_{22}^{(2)} &= \frac{2(-1 + r^2)(1 + \kappa^2(-2 + c_2(4 - 6r^2)) - 2\kappa^6 r^4(1 + c_2(-2 + 7r^2)))}{h(-1 + \kappa^2 r^2)^3} + \\ &+ \frac{\kappa^4(1 + r^4 + 2c_2 r^2(-5 + 9r^2)) + \kappa^8 r^4(1 + c_2(2 - 2r^2 + 4r^4))}{h(-1 + \kappa^2 r^2)^3}, \\ \tilde{\beta}_{33}^{(2)} &= \frac{2r^2(1 - 2\kappa^6 r^2(1 + c_2 - 2r^2 - 5c_2 r^2 + 3r^4 + 2c_2 r^4))}{h(-1 + \kappa^2 r^2)^2} + \\ &+ \frac{\kappa^4(1 - 2r^2 + 7r^4 + c_2(4 - 12r^2))}{h(-1 + \kappa^2 r^2)^2} + \\ &+ \frac{\kappa^8 r^4(1 - 2r^2 + 2r^4 + 2c_2(-1 + r^2)^2) + \kappa^2(-4r^2 + c_2(-2 + 6r^2))}{h(-1 + \kappa^2 r^2)^2}.\end{aligned}$$

Спасибо за внимание!

Результаты для однопетлевого случая

RG уравнение имеет вид

$$\dot{G}_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j \Psi = -R_{ij}.$$

Потенциал, удовлетворяющий однопетлевому RG уравнению:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln |1 - \kappa^2 r^2|.$$

Ограничения на h и κ :

$$\begin{aligned}\dot{h} &= 2\kappa^2 - 2, \\ \dot{\kappa} &= \frac{2\kappa^3 - 2\kappa}{h}.\end{aligned}$$

О тензорах

Символы Кристоффеля

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} G^{il} \left(\frac{\partial G_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial G_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

Тензор Римана

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i$$

Тензор Риччи

$$R_{ij} = R_{ikj}^k$$