РАЗМЕР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

ОТЧЁТ О
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Студент: Юшин В. О.
Руководитель: Рубин С. Г.

29 мая, 2023 г.

Постановка задачи и основные формулы

Имеется прямое произведение 4-мерного пространства де Ситтера и максимально симметричного n-мерного пространства постоянной кривизны. Метрика представляется в виде

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{1}{h(r)}dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 - u(r)^2 d\Omega_n^2 \qquad (1)$$

с асимптотикой метрики де Ситтера:

$$h(r \to \infty) \to 1 - Lr^2, \qquad r^2 < 1/L. \qquad (2)$$

Представление функций в виде

$$h(r) = 1 - H^2 r^2, \qquad u(r) = e^{\beta(r)} \qquad (3)$$

упрощает вид уравнений. Важно учесть $1/H \gg 0$, H – параметр Хаббла.

Вариация действия в $f(R)$-гравитации (1)

Стандартно действие Эйнштейна-Гильберта без материи записывается следующим образом:

$$S = \int d^D x \sqrt{|g_D|} R, \tag{4}$$

где R – скаляр Риччи, $g_D \equiv \det(g_{\mu\nu})$, $\{\mu, \nu\} = \overline{1, D}$, $D = 4 + n$. Теория обобщается заменой R на $f(R)$. В результате обобщенное действие принимает вид

$$S = \int d^D x \sqrt{|g_D|} f(R). \tag{5}$$

Вариация действия может быть представлена в виде

$$\delta S = \int d^D x \left[\delta \left(\sqrt{|g_D|} \right) f(R) + \sqrt{|g_D|} f_R \delta \left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right) \right], \tag{6}$$

где $f_R \equiv df(R)/dR$.

Вариация действия в $f(R)$-гравитации (2)

Далее требуется вычислить вариацию внутренних частей. После математических преобразований можно явно выделить вариацию метрики $\delta g^{\mu\nu}$.

Из вариационного принципа получаем обобщенные уравнения Эйнштейна без учёта материи:

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f_R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla^{\xi}\nabla_{\xi}f_R - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f_R = 0 \tag{7}$$

Система уравнений Эйнштейна при n=2 (1)

Выберем число дополнительных измерений $n = 2$, тогда метрика (1) принимает вид

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{1}{h(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2\right) - \\ - u(r)^2\left(d(x5)^2 + \sin(x5)^2 d(x6)^2\right). \quad (8)$$

Уравнения Эйнштейна из системы

$$-\frac{1}{2}f(R)\delta^\mu_\nu + \left(R^\mu_\nu + \nabla^\mu\nabla_\nu - \delta^\mu_\nu\nabla^\xi\nabla_\xi\right)f_R = 0, \quad (9)$$

тождественны нулю для компонент $\mu \neq \nu$. Интересно исследовать уравнения системы при $\mu = \nu$.

Система уравнений Эйнштейна при n=2 (2)

Скалярная кривизна записана ниже с учётом явного вида функций $h(r)$ и $u(r)$ (3):

$$R = \frac{1}{r}\left(4r\left(H^2r^2-1\right)\beta'' + 2re^{-2\beta} + 6r\left(H^2r^2-1\right)\beta'^2 + \right.$$
$$\left. + \left(16H^2r^2-8\right)\beta' + 12H^2r\right). \quad (10)$$

Введём явный вид функции $f(R)$:

$$f(R) = aR^2 + R + c, \quad (11)$$

где a, c – параметры модели, причём $a > 0$.

Размер дополнительного пространства можно найти, решая, к примеру, первое уравнение, системы (9). С учётом явного вида $f(R)$ (11) уравнение с компонентами (t,t) принимает вид

$$\frac{1}{r}\left[\left(-4r\left(H^2r^2-1\right)\beta' - 6H^2r^2+4\right)R' - 2r\left(H^2r^2-1\right)R''\right]a- \\ -\frac{aR^2+R+c}{2} + H^2\left(2r\beta'+3\right)\left(2aR+1\right)=0. \quad (12)$$

Подставляя явный вид скаляра Риччи (10) и полагая $\beta = const$, решаем (12) относительно β. Размер дополнительного пространства представлен ниже:

$$e^{\beta_{\mp}} = \frac{2}{\sqrt{-\frac{12aH^2 \mp \sqrt{144H^4a^2-4ac+1}+1}{a}}}. \quad (13)$$

Зависимость размера доп. простран. от параметров (2)

Ранее были определены следующие значения для параметров:

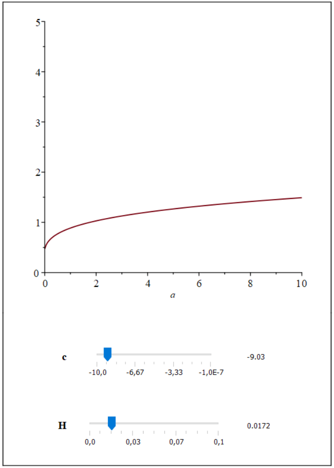
$$a > 0, \qquad H \ll 1. \tag{14}$$

Для действительной величины размера дополнительного пространства необходимо оставить только верхний знак в уравнении (13): e^{β_-}.
Также вытекает требование

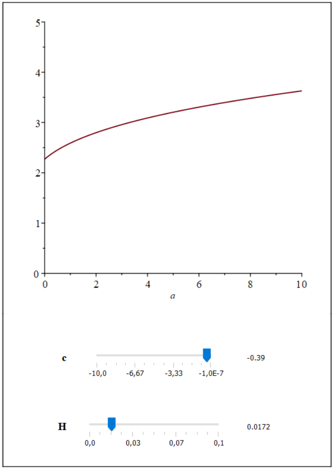
$$-6H^2 > c, \tag{15}$$

дающее связь параметра Хаббла и параметра модели.

Зависимость размера доп. простран. от параметров (3)

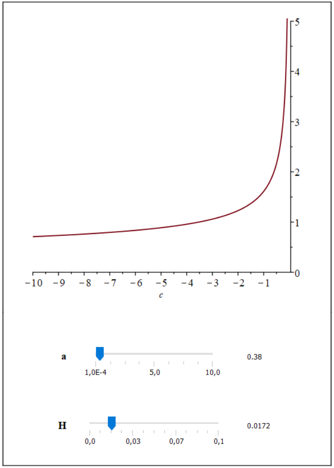


Зависимость e^{β_-} от параметра a при малых значениях c.

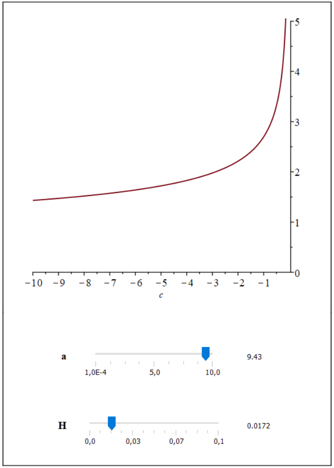


Зависимость e^{β_-} от параметра a при больших значениях c.

Зависимость размера доп. простран. от параметров (4)

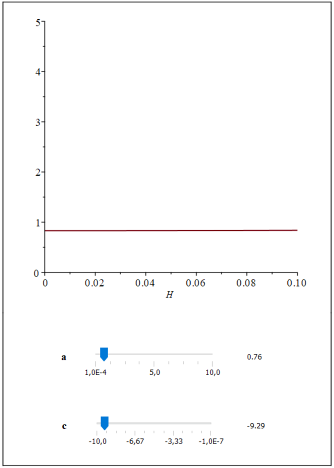


Зависимость e^{β_-} от параметра c при малых значениях a.

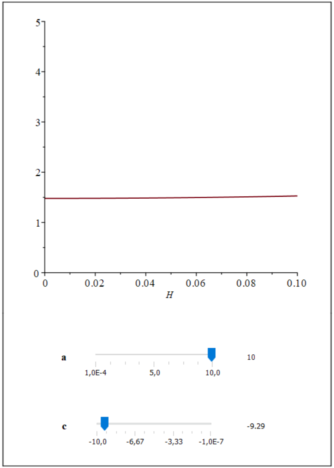


Зависимость e^{β_-} от параметра c при больших значениях a.

Зависимость размера доп. простран. от параметров (5)

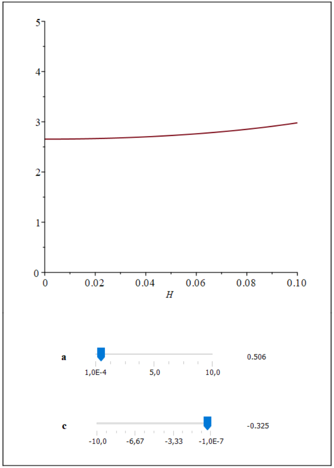


Зависимость e^{β_-} от параметра H при малых значениях a и малых значениях c.

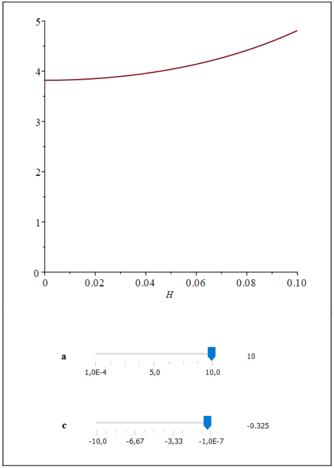


Зависимость e^{β_-} от параметра H при больших значениях a и малых значениях c.

Зависимость размера доп. простран. от параметров (6)



Зависимость e^{β_-} от параметра H при малых значениях a и больших значениях c.



Зависимость e^{β_-} от параметра H при больших значениях a и больших значениях c.

Заключение

Была выяснена зависимость размера дополнительного пространства от параметров модели и параметра Хаббла в рамках $f(R)$-гравитации.

Из графиков видно, что размер дополнительного пространства очень сильно зависит от параметра модели c при любых значениях остальных параметров: при приближении c к предельному значению $-6H^2$, размер резко увеличивается.

От параметра модели a размер также явно зависит при любых значениях параметров c и H. Зависимость размера доп. пространства от параметра Хаббла H начинает проявляется только при стремлении параметра c к предельному значению.