Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ОТЧЁТ О
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗМЕР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Научный руководитель ________ д. ф. - м. н., проф. С.Г. Рубин

Студент ________ В.О. Юшин

Москва 2023

Содержание

1 Постановка задачи и основные формулы

Наша вселенная может иметь больше, чем обычные три пространственных измерения. Увеличивая количество измерений, можно ожидать решение некоторых нерешенных вопросов, например, проблемы иерархии в физике элементарных частиц. При рассмотрении многомерных теорий гравитации уравнения поля становятся более сложными из-за наличия дополнительных членов и геометрических величин. $f(R)$-гравитация представляет собой обобщение ОТО, в котором модификации подвергается метрическая часть действия. Теория обеспечивает математическую основу для изучения последствий дополнительных измерений для уравнений гравитационного поля и для исследования последствий таких сценариев для наблюдений.

Задача была поставлена следующая: разобраться, как выводятся обобщенные уравнения Эйнштейна для поля без материи в $f(R)$-гравитации; выяснить размер дополнительного пространства.

Имеется прямое произведение 4-мерного пространства де Ситтера и максимально симметричного n-мерного пространства постоянной кривизны. Метрика представляется в виде

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{1}{h(r)}dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 - u(r)^2 d\Omega_n^2 \tag{1}$$

с асимптотикой метрики де Ситтера:

$$h(r \to \infty) \to 1 - Lr^2, \qquad r^2 < 1/L.$$

Т.е. ищем сферически симметричные объекты (с точки зрения 4-мерного наблюдателя) с дополнительными измерениями, зависящими от радиальной координаты.

Представление функций в виде

$$h(r) = 1 - H^2 r^2, \qquad u(r) = e^{\beta(r)} \tag{2}$$

упрощает вид уравнений. Важно учесть $1/H \gg 0$, H – параметр Хаббла.

2 Вариация действия в $f(R)$-гравитации

Стандартно действие Эйнштейна-Гильберта без материи записывается следующим образом:

$$S = \int d^D x \sqrt{|g_D|} R,$$

где R – скалярная кривизна, $g_D \equiv \det(g_{\mu\nu})$, $\{\mu, \nu\} = \overline{1, D}$, $D = 4 + n$. Теория обобщается заменой скалярной кривизны R на некоторую функцию от нее – $f(R)$. В результате обобщенное действие Эйнштейна-Гильберта принимает вид

$$S = \int d^D x \sqrt{|g_D|} f(R). \tag{3}$$

Для получения обобщённых уравнений Эйнштейна без учёта материи нужно выполнить варьирование по внутренней метрике.

Вариация может быть представлена в виде

$$\delta S = \int d^D x \left[\delta\left(\sqrt{|g_D|}\right) f(R) + \sqrt{|g_D|} f_R \delta\left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right)\right],$$

где $f_R \equiv df(R)/dR$. Далее требуется вычислить вариацию внутренних частей. Для первого слагаемого вариация записана ниже:

$$\delta\sqrt{|g_D|} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g_D|} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Во втором слагаемом, после раскрытия вариации произведения,

$$\delta\left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right) = \delta\left(g^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta\left(R_{\mu\nu}\right),$$

появится слагаемое пропорциональное $\delta R_{\mu\nu}$, оно представляется в виде

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\xi \delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}.$$

Вариации символов Кристоффеля в итоге выглядят следующим образом:

$$\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda}\nabla_\nu \delta g^{\lambda\xi} + g_{\nu\eta}\nabla_\mu \delta g^{\eta\xi} - g_{\mu\lambda} g_{\eta\nu} \nabla^\xi \delta g^{\lambda\eta}\right),$$
$$\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi} = -\frac{1}{2} g_{\xi\eta} \nabla_\mu \delta g^{\eta\xi}.$$

Тогда слагаемое, пропорциональное $\delta R_{\mu\nu}$, имеет вид

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g_{\lambda\eta}\nabla^\xi\nabla_\xi \delta g^{\lambda\eta} - \nabla_\mu \nabla_\xi \delta g^{\mu\xi}.$$

Теперь для вариации действия получается следующее выражение:

$$\delta S = \int d^D x \sqrt{|g_D|} \delta g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + f_R R_{\mu\nu}\right) + \\ + \int d^D x \sqrt{|g_D|} f_R g_{\lambda\eta} \nabla^\xi \nabla_\xi \delta g^{\lambda\eta} - \int d^D x \sqrt{|g_D|} f_R \nabla_\mu \nabla_\xi \delta g^{\mu\xi}.$$

Последние два интеграла сводят к интегралам от дивергенций, вынося $\delta g^{\mu\nu}$ из под дифференцирования. Выражения приведены ниже:

$$\int d^D x\sqrt{|g_D|}f_R g_{\lambda\eta}\nabla^\xi\nabla_\xi\delta g^{\lambda\eta} = \int d^D x\sqrt{|g_D|}\nabla^\tau N_\tau + \\ + \int d^D x\sqrt{|g_D|}g_{\lambda\eta}\nabla^\xi\nabla_\xi f_R\delta g^{\lambda\eta},$$

$$\int d^D x\sqrt{|g_D|}f_R\nabla_\mu\nabla_\xi\delta g^{\mu\xi} = \int d^D x\sqrt{|g_D|}\nabla_\mu M^\mu + \\ + \int d^D x\sqrt{|g_D|}\nabla_\mu\nabla_\xi f_R\delta g^{\mu\xi}.$$

Таким образом, теперь можно записать вариацию действия:

$$\delta S = \int d^D x\sqrt{|g_D|}\delta g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f_R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla^\xi\nabla_\xi f_R - \nabla_\mu\nabla_\nu f_R\right) + \\ + \int d^D x\sqrt{|g_D|}\nabla^\tau N_\tau - \int d^D x\sqrt{|g_D|}\nabla_\mu M^\mu. \quad (4)$$

3 Система уравнений Эйнштейна при n=2

Выберем число дополнительных измерений $n = 2$, тогда метрика (1) имеет вид

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{1}{h(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2\right) - \\ - u(r)^2\left(d(x5)^2 + \sin(x5)^2 d(x6)^2\right). \quad (5)$$

Обобщённые уравнения Эйнштейна без учёта материи для краткости в тексте будут обозначены как система $eqs(\mu,\nu)$, её можно записать следующим образом:

$$eqs(\mu,\nu) : -\frac{1}{2}f(R)\delta^\mu_\nu + \left(R^\mu_\nu + \nabla^\mu\nabla_\nu - \delta^\mu_\nu\Box_D\right)f_R = 0, \quad (6)$$

где $\Box_D = \nabla^\xi\nabla_\xi$. Далее в тексте будет будут опущены аргументы r у функций. Скаляр Риччи зависит от r, он записан ниже с учётом (2):

$$R = \frac{1}{r}\left(4r\left(H^2r^2 - 1\right)\beta'' + 2re^{-2\beta} + 6r\left(H^2r^2 - 1\right)\beta'^2 + \right. \\ \left. + \left(16H^2r^2 - 8\right)\beta' + 12H^2r\right). \quad (7)$$

Уравнения Эйнштейна из системы (6) тождественны нулю для компонент $\mu \neq \nu$, при $\mu = \nu$ вид уравнений приведён ниже:

$$eqs(t,t) : -\frac{f(R)}{2} + f_R\left(2H^2r\beta' + 3H^2\right) + \\ + f_{RR}\frac{1}{2r}\left[\left(-4r\left(H^2r^2-1\right)\beta' - 6H^2r^2 + 4\right)R' - 2r\left(H^2r^2-1\right)R''\right] - \\ - f_{RRR}r\left(H^2r^2-1\right)R'^2 = 0, \quad (8)$$

$$eqs(r,r) : -\frac{f(R)}{2} + f_R\left(2\left(H^2r^2-1\right)\beta'^2 + 2H^2r\beta' + 2\left(H^2r^2-1\right)\beta'' + 3H^2\right) - \\ - f_{RR}\frac{2}{r}\left(r\left(H^2r^2-1\right)\beta' + \frac{3H^2r^2}{2} - 1\right)R' = 0,$$

$$eqs(\theta,\theta) = eqs(\varphi,\varphi) : -\frac{f(R)}{2} + f_R\frac{1}{2r}\left(4\beta'\left(H^2r^2-1\right) + 6H^2r\right) + \\ + f_{RR}\frac{1}{2r}\left[\left(-4r\left(H^2r^2-1\right)\beta' - 6H^2r^2 + 2\right)R' - 2r\left(H^2r^2-1\right)R''\right] - \\ - f_{RRR}\left(H^2r^2-1\right)R'^2 = 0,$$

$$eqs(5,5) = eqs(6,6) : -\frac{f(R)}{2} + f_R \frac{1}{2r} \Big[2re^{-2\beta} + 4r \left(H^2 r^2 - 1 \right) \beta'^2 +$$
$$+ \left(8H^2 r^2 - 4 \right) \beta' + 2\beta'' r \left(H^2 r^2 - 1 \right) \Big] +$$
$$+ f_{RR} \frac{1}{2r} \left(-2r \left(H^2 r^2 - 1 \right) R' \beta' + \left(-8H^2 r^2 + 4 \right) R' - 2rR'' \left(H^2 r^2 - 1 \right) \right) -$$
$$- f_{RRR} \left(H^2 r^2 - 1 \right) R'^2 = 0.$$

Введём явный вид функции $f(R)$:

$$f(R) = aR^2 + R + c, \tag{9}$$

где a, c – параметры модели, причём $a > 0$.

4 Зависимость размера доп. пространства от параметров модели и параметра Хаббла

Размер дополнительного пространства можно найти, решая, к примеру, первое уравнение (8) системы (6). С учётом явного вида $f(R)$ (9) уравнение (8) принимает вид

$$eqs(t,t): -\frac{aR^2+R+c}{2} + H^2\left(2r\beta'+3\right)\left(2aR+1\right) + \\ + \frac{1}{r}\left[\left(-4r\left(H^2r^2-1\right)\beta' - 6H^2r^2+4\right)R' - 2r\left(H^2r^2-1\right)R''\right]a = 0. \quad (10)$$

Подставляя явный вид скаляра Риччи (7) и полагая $\beta = const$, решаем (10) относительно β, в результате:

$$\beta_{\mp} = -\frac{\ln\left(-\dfrac{12aH^2 \mp \sqrt{144H^4a^2-4ac+1}+1}{4a}\right)}{2}.$$

Сам размер дополнительного пространства представлен ниже:

$$e^{\beta_{\mp}} = \frac{2}{\sqrt{-\dfrac{12aH^2 \mp \sqrt{144H^4a^2-4ac+1}+1}{a}}}. \quad (11)$$

Ранее были определены следующие значения для параметров:

$$a > 0, \qquad H \ll 1.$$

Для действительной величины размера дополнительного пространства из уравнения (11) вытекает требование

$$-12aH^2 \pm \sqrt{144H^4a^2-4ac+1} - 1 > 0. \quad (12)$$

При нижнем знаке перед корнем в (12) получается выражение:

$$12aH^2 + 1 < -\sqrt{\cdots},$$

что по сути собой являет утверждение $''$(полож. число) < (отриц. число)$''$; не имеет решений. При верхнем знаке перед корнем в (12), после преобразований, получается связь параметров:

$$-6H^2 > c \quad (13)$$

(т.е. параметр c может быть только отрицательным числом). Поэтому оставляем только верхний знак в уравнении (11): e^{β_-}.

На рисунках 1 и 2 приведена зависимость e^{β_-} от параметра a, варьируется параметр c. От параметра H вариация не приводит к большим изменениям (график только чуть поднимается при увеличении), поэтому графики с его вариацией не приведены.

На рисунках 3 и 4 приведена зависимость e^{β_-} от параметра c, варьируется параметр a. Как и раньше, от параметра H вариация не приводит к большим изменениям.

На рисунках 5, 6, 7 и 8 приведена зависимость e^{β_-} от параметра H, варьируются параметры a и c.

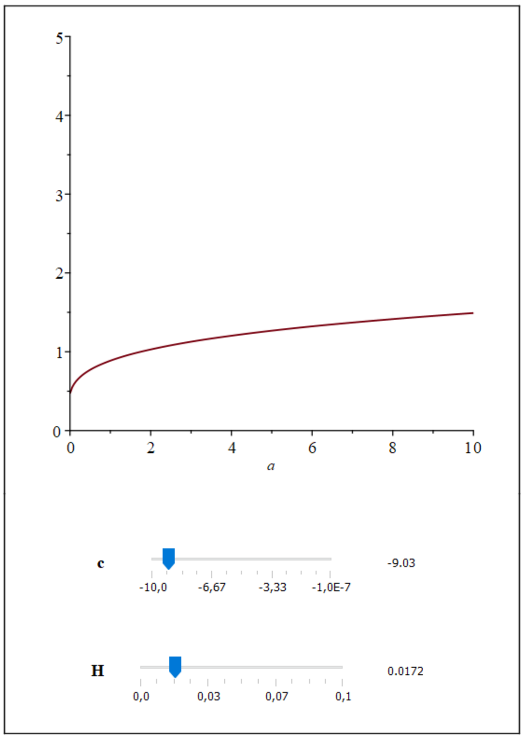

Рис. 1: Зависимость e^{β_-} от параметра a при малых значениях c

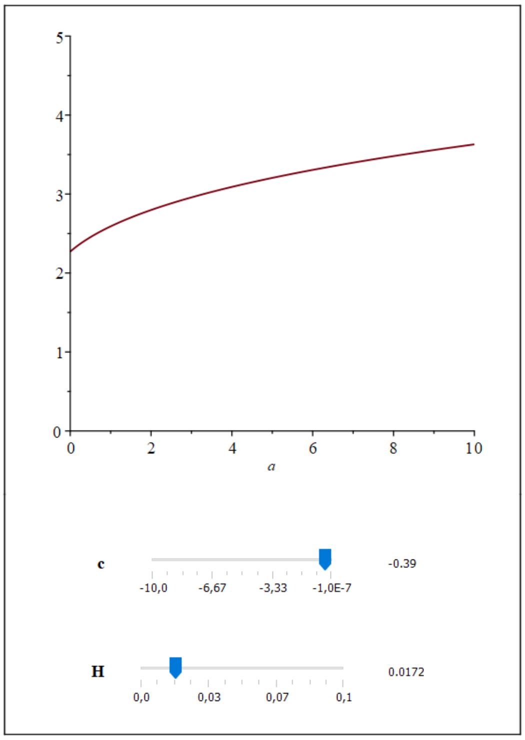

Рис. 2: Зависимость e^{β_-} от параметра a при больших значениях c

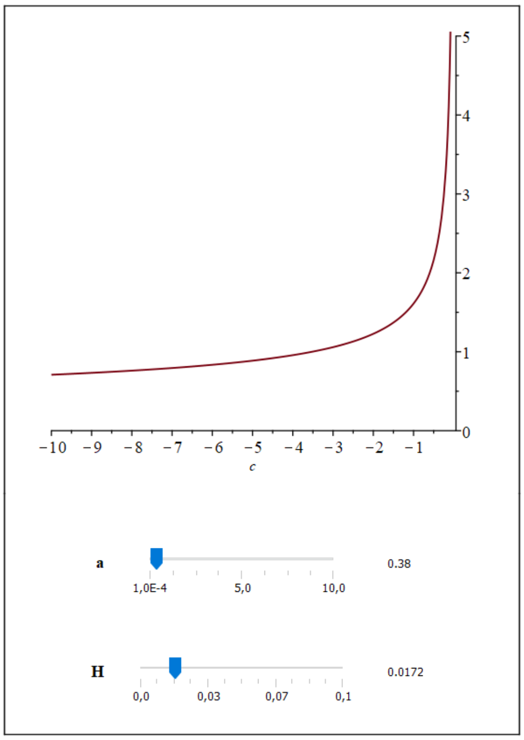

Рис. 3: Зависимость e^{β_-} от параметра c при малых значениях a

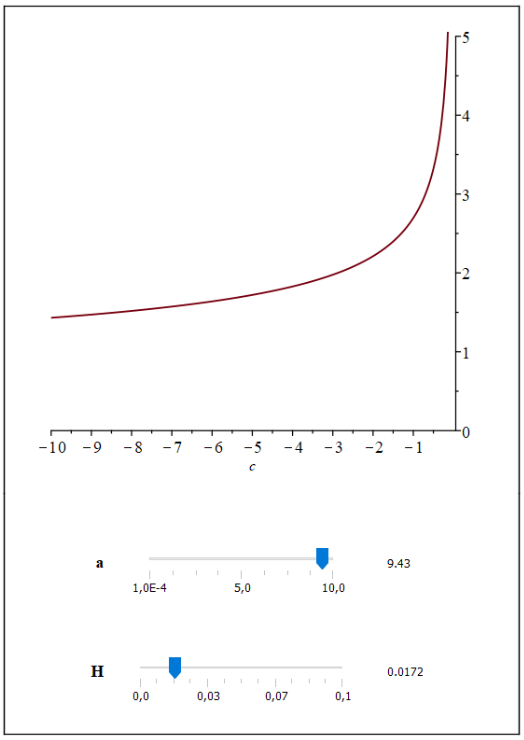

Рис. 4: Зависимость e^{β_-} от параметра c при больших значениях a

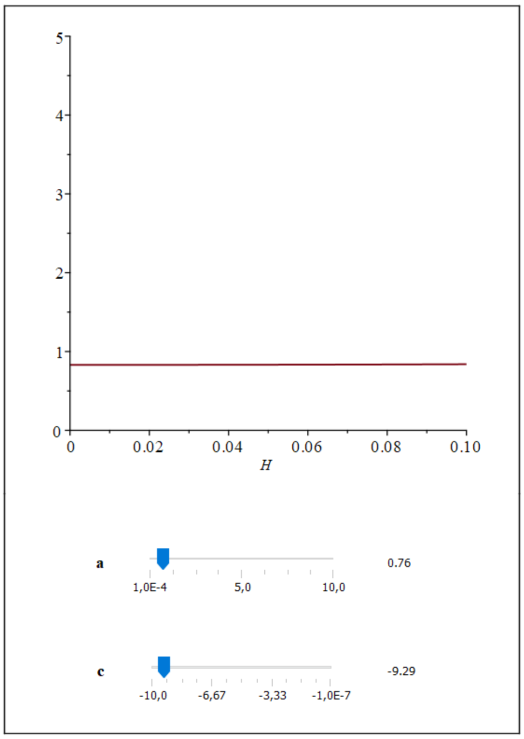

Рис. 5: Зависимость e^{β_-} от параметра H при малых значениях a и малых значениях c

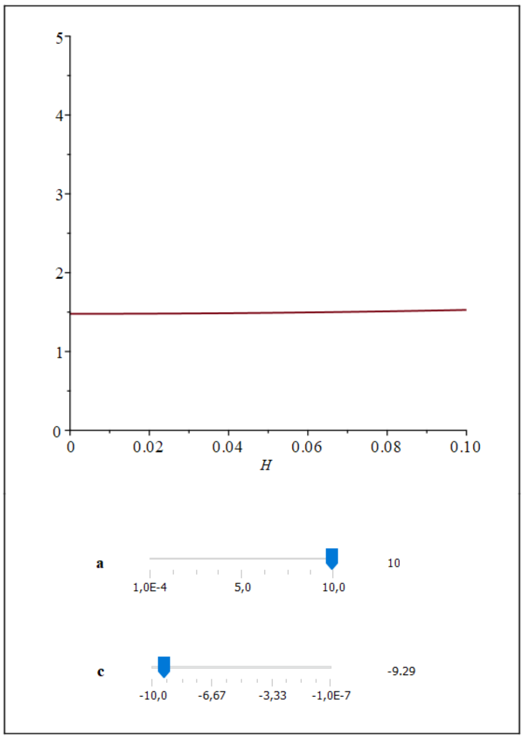

Рис. 6: Зависимость e^{β_-} от параметра H при больших значениях a и малых значениях c

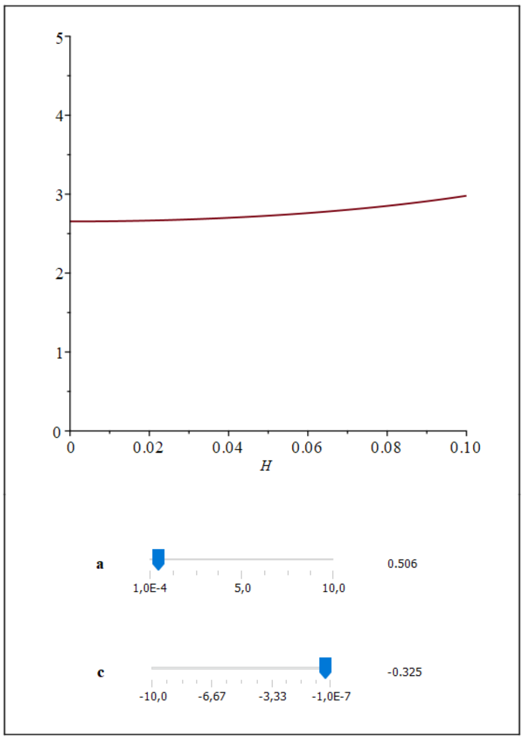

Рис. 7: Зависимость e^{β_-} от параметра H при малых значениях a и больших значениях c

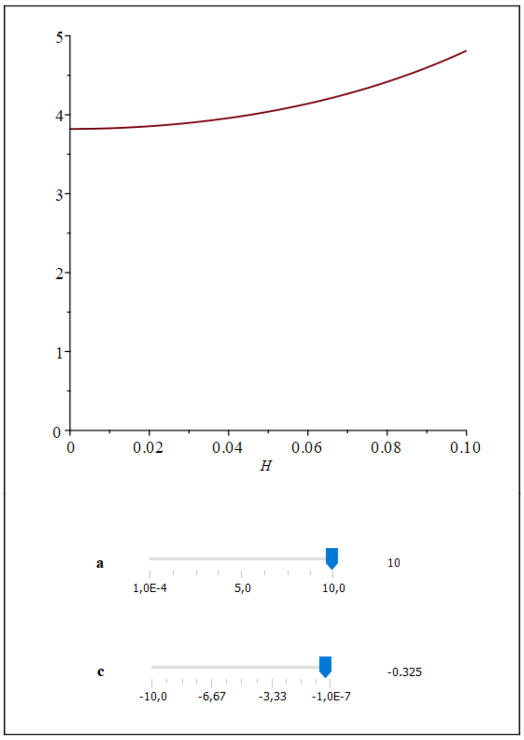

Рис. 8: Зависимость e^{β_-} от параметра H при больших значениях a и больших значениях c

5 Заключение

Была выяснена зависимость размера дополнительного пространства от параметров модели и параметра Хаббла в рамках $f(R)$-гравитации. Из графиков видно, что размер дополнительного пространства очень сильно зависит от параметра модели c при любых значениях остальных параметров: при приближении c к предельному значению $-6H^2$, размер резко увеличивается.

От параметра модели a размер также явно зависит при любых значениях параметров c и H, однако видно, чем ближе значения параметра c к предельным, тем сильнее зависимость размера от параметра a. С увеличением параметра a рост размера замедляется.

Зависимость размера доп. пространства от параметра Хаббла H начинает проявляется только при стремлении параметра c к предельному значению, в остальных случаях резкая зависимость отсутствует.