

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

На правах рукописи

ВОРОБЬЕВ ГРИГОРИЙ ИГОРЕВИЧ

**ФОРМИРОВАНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ДВОЙНЫХ
ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., в.н.с.

_____ К. Б. Белоцкий

Научный консультант

_____ В. Д. Стасенко

Москва 2023

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

**ФОРМИРОВАНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ДВОЙНЫХ
ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ**

| | |
|--------------------------------------------|-------------------------|
| Студент | _____ Г. И. Воробьев |
| Научный руководитель, д.ф.-м.н., в.н.с. | _____ К. Б. Белоцкий |
| Научный консультант | _____ В. Д. Стасенко |
| Рецензент, д.ф.-м.н. | _____ Ю. Н. Ерошенко |
| Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н. | _____ А. А. Кириллов |
| Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф. | _____ М. Д. Скорохватов |
| Рук. учеб. прог., д.ф.-м.н., проф. | _____ М. Д. Скорохватов |

Оглавление

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение | 5 |
| 1 Первичные чёрные дыры | 7 |
| 1.1 Механизмы образования | 8 |
| 1.2 Ограничения для монохроматического распределения масс первичных чёрных дыр | 10 |
| 2 Двойные системы | 13 |
| 2.1 Механизм образования двойных систем первичных чёрных дыр | 13 |
| 2.2 Характеристики двойных систем первичных чёрных дыр . . | 15 |
| 2.3 Оценка эффекта наработки углового момента | 16 |
| 2.4 Промежуточные результаты. Мотивация к работе | 18 |
| 3 Скопления первичных чёрных дыр | 19 |
| 3.1 Модели формирования и эволюция | 19 |
| 3.2 Оценка дисперсии скорости центральной чёрной дыры скоп- ления | 21 |
| 4 Моделирование двойных скоплений первичных чёрных дыр и исследование их эволюции | 23 |
| 4.1 Реализация пакета PyGRA | 23 |
| 4.2 Исследование скорости центральной чёрной дыры | 24 |
| 4.3 Эволюция двойной системы скоплений при начальном сво- бодном падении | 25 |
| 4.4 Двойная система скоплений | 28 |
| 5 Заключение | 31 |
| Список литературы | 32 |

| | |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| Приложение А N-body моделирование и библиотека PyGRA | 39 |
| А.1 Программная реализация библиотеки PyGRA | 40 |
| А.1.1 Методы N-body моделирования | 41 |
| А.1.2 Реализация классов и их методов | 43 |
| А.2 Методы оптимизации вычислений | 44 |
| Приложение В Тестовое N-body моделирование | 45 |
| В.1 Двойная система чёрных дыр | 45 |
| В.1.1 Тестирование примера | 46 |
| В.2 Скопление первичных чёрных дыр | 49 |
| В.2.1 Распределения начальных характеристик шаровых скоп- | |
| лений | 49 |
| В.2.2 Тестирование примера. Сохранение энергии внутри скоп- | |
| ления | 51 |
| Приложение С Дополнительные данные моделирования двой- | |
| ных систем и их анализа | 53 |
| С.1 Исследование скорости центральной черной дыры | 53 |
| С.2 Параметры моделирования свободно падающих двойных си- | |
| стем | 53 |
| С.3 Параметры моделирования двойных систем | 54 |
| С.4 Анализ параметров орбиты примеров | 54 |

ВВЕДЕНИЕ

Почти 8 лет прошло с первого прямого детектирования гравитационных волн (**ГВ**) и чуть больше 5-ти лет с момента присуждения Нобелевской премии за это открытие [1]. В результате, использование интерферометров для исследования ГВ, создало новую область экспериментальной космологии — гравитационно-волновую астрономию.

Первое зарегистрированное событие с ГВ сигналом **GW150914** изменило стандартные представления о возможных параметрах чёрных дыр (**ЧД**) и стало предметом широких дискуссий. В частности, массы чёрных дыр, породивших этот сигнал, оцениваются как 36 и 29 M_{\odot} [2]. Дальнейшие зарегистрированные события также показали, что вплоть до красных смещений $z = 0.8$ суммарная масса ЧД может достигать 140 M_{\odot} [3]. С другой стороны, рекордсмен среди сверхмассивных чёрных дыр с массой $1.5 \cdot 10^9 M_{\odot}$ был обнаружен на $z = 7.5$ [4]. Все эти события сложно объяснить астрофизическим путём. В результате научным сообществом были предложены новые механизмы рождения чёрных дыр масс порядка более 10 M_{\odot} (см. [5] и источники в этой работе), но окончательного ответа на вопросы природы этих тел до сих пор нет.

Одним из возможных объяснений является первичная природа чёрных дыр [6]. Механизмы образования таких первичных чёрных дыр (**ПЧД**) подробнее разобраны в разделе 1. Повышенная космологическая плотность энергии в ранние времена является весьма характерной для большинства таких моделей, что дает грубую связь между массой ПЧД и массой горизонта при формировании (см. [6]):

$$t \approx \frac{GM}{c^3} \approx \frac{30M_{\odot}}{10^{-33}M_{\odot} \cdot 10^{38}} \text{ с} \approx 10^{-4} \text{ с}.$$

Таким образом, ПЧД таких масс должны формироваться на радиационно-

доминированной (**РД**) стадии. В работах [7–9] показано, как рассматривая эволюцию двойных ПЧД в ранней Вселенной можно оценить их вклад в темп слияний, наблюдаемый гравитационно-волновыми интерферометрами коллабораций LIGO, Virgo, KaGrA ($2 - 53 \text{ Гпк}^{-3} \text{ год}^{-1}$, см. [10]). Из этих же работ можно получить ограничение на долю ПЧД в скрытой массе, которая составляет $f_{\text{РВН}} \lesssim 10^{-3}$.

В данной работе **предлагается** способ ослабления ограничений в случае кластеризации ПЧД, а также затрагиваются вопросы существования таких систем в ранней Вселенной, чёрных дыр первичной природы в целом и N-body моделирования.

1 ПЕРВИЧНЫЕ ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ

В этой главе приводится краткий литературный обзор физики первичных чёрных дыр (ПЧД). Это очень обширная область исследования, которая рассматривает возможность существования чёрных дыр, рождённых в ранней Вселенной, до образования любого другого астрофизического объекта. Их существование может пролить свет на такие явления как:

- 1) Сверхмассивные черные дыры ($10^6 - 10^{10} M_{\odot}$) в центрах галактических ядер [11–15]. Происхождение таких объектов можно объяснить накопительным эффектом за счёт долгой эволюции галактики. Однако такие объекты обнаружены и на больших красных смещениях $z > 6$, что объяснить гораздо сложнее [4; 16–19].
- 2) Сливающиеся двойные черные дыры. Гравитационно-связанная пара чёрных дыр (ЧД), которые в силу излучения гравитационных волн (ГВ) постепенно сближаются, в конечном итоге образуя новую ЧД большей массы. Такие события с 2015 года регистрируются с помощью гравитационно-волновых интерферометров коллабораций LIGO, Virgo, KaGrA. По форме ГВ сигнала можно вычислить параметры исходной пары ЧД. В некоторых обнаруженных событиях параметры исходных объектов указывают на их первичное происхождение [5; 7].
- 3) Реионизация Вселенной [20–22] может быть связана с излучением от маломассивных ПЧД с нейтральным газом [23–25] или в результате аккреции вещества на массивные ПЧД [26–29].
- 4) Формирование структур при больших красных смещениях $z > 10$ [30–33] может быть связано с влиянием ПЧД в ранней Вселенной [34–36].
- 5) Скрытая масса. ПЧД могут вносить вклад в скрытую массу Вселенной [6; 37].

После обнаружения реликтового излучения с температурой 2.7K [38] модель холодной Вселенной была опровергнута. Одним из её сторонников

был Я.Б. Зельдович. Ему и многим учёным была предложена новая модель согласующаяся с этим экспериментом — *модель горячей Вселенной* [39]. В связи с этим Я.Б. Зельдович и И.Д. Новиков пересмотрели концепцию ПЧД и аналитически доказали, что если такие объекты существуют, то аккреция вещества вокруг них должна вызывать сильное излучение [40]. Дальнейшее развитие исследования возможности существования ПЧД, в частности Хокингом, Каром, выявило связь их образования с условиями сильных неоднородностей в очень ранней Вселенной.

1.1 МЕХАНИЗМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Одними из первых и наиболее естественных являлись механизмы рождения ПЧД из **первичных неоднородностей** (флуктуаций плотности) [41; 42]. Области избыточной плотности перестают расширяться через некоторое время после того, как войдут в горизонт частиц, и схлопнутся от давления, если они превышают массу Джинса. Экспериментально при изучении анизотропии реликтового излучения были обнаружены флуктуации $\delta\rho/\rho \approx 10^{-5}$ [20]. Однако для ПЧД нужны флуктуации на 5 порядков больше. Некоторые **гибридные модели инфляции** за счёт изменения скалярного поля инфлатона получают такие неоднородности (примеры таких работ [43–45]).

В рамках **теорий великого объединения** есть модели, в которых предсказывается развитие гравитационных неустойчивостей на этапе доминирования сверхтяжелых нерелятивистских частиц [46] ведущих к образованию ПЧД. В работе [47] рассматривается **коллапс космических струн**, что также может привести к формированию ПЧД.

В ряде работ [48–53] рассматриваются скалярные поля в ранней Вселенной, имеющие так называемый «ложный вакуум» (рис. 1.1). Это локальный минимум скалярного поля, при этом отличный от глобального. Как предсказывает квантовая механика — для частиц имеющих такую конфигурацию поля характерен процесс туннелирования (вероятностного перехода частицы из состояния ложного вакуума в состояние истинного или глобального). При этом такой переход может быть как скачкообразный, так и плавный — так возникает различие между **фазовыми перехода-**

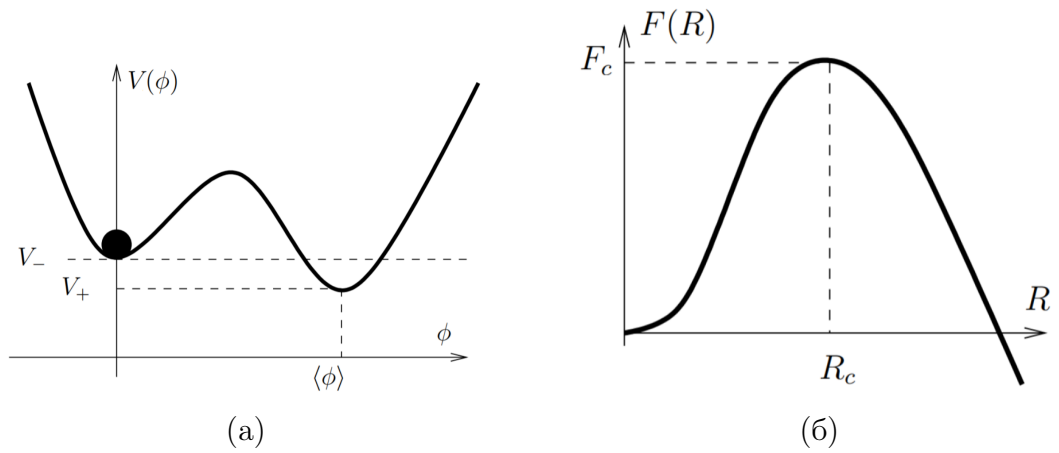


Рисунок 1.1 — (а) Вид потенциала скалярного поля, при котором может происходить ФП 1-го рода, (б) Свободная энергия пузыря новой фазы в зависимости от его радиуса

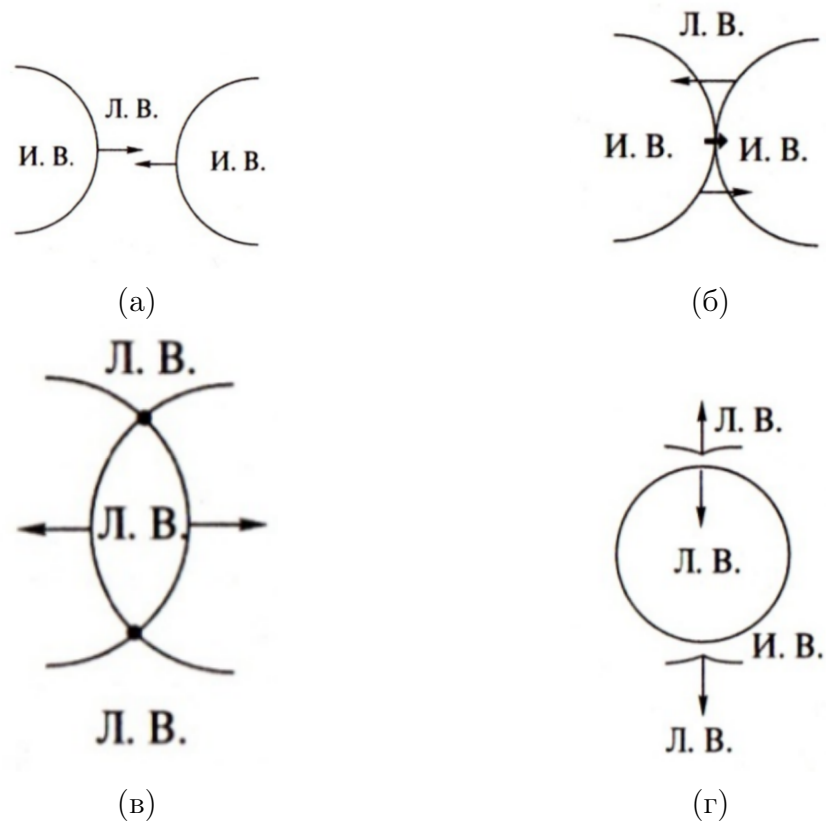


Рисунок 1.2 — Формирование мешка ложного вакуума при столкновении стенок двух пузырей

ми первого [48–50] и **второго рода** [51–53]. В результате, данные модели предполагают образование в ранней Вселенной областей с ложным и истинным вакуумом, имеющие характерные границы между друг другом (стенки пузыря или доменные стенки). Поскольку Вселенная стремится в состояние истинного вакуума, как более энерго-выгодное, то зоны истинного вакуума будут расти, вымещая зоны ложного вакуума. Как показано на рисунке 1.2, при фазовом переходе первого рода в результате эволюции таких областей могут образоваться остаточные пузыри ложного вакуума внутри истинного, которые из-за колебания своих размеров могут образовывать ЧД. Следует отметить, что механизм фазовых переходов второго рода позволяет ПЧД иметь степенной спектр масс и может приводить к образованию **скоплений ПЧД**.

Также существует модель, которая объясняет формирование ПЧД через **флуктуации барионного заряда** [54]. Эта модель основана на модифицированном механизме **бариогенеза Аффлека-Дайна** и предсказывает логарифмически нормальное распределение ПЧД по массам.

В контексте современного описания космологии основанной на инфляционной космологической модели с бариосинтезом и скрытой массой изучение ПЧД начинает приобретать всё большую актуальность. Развивающаяся гравитационно-волновая астрономия и поиски явлений гравитационного линзирования существенно расширяют экспериментальные возможности обнаружения ПЧД или подтверждения их отсутствия.

1.2 ОГРАНИЧЕНИЯ ДЛЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР

В этом разделе предоставлены ограничения на долю ПЧД $f_{\text{РВН}}$ в наблюдаемой скрытой массе, которую может объяснить гипотеза существования ПЧД с массовым распределением в виде дельта-функции. На Рис. 1.3 можно увидеть допустимые (не закрашенные) зоны, соответствующие массовой доле ПЧД в скрытой массе, и зоны ограничений (цветные), соответствующие доле, которую ПЧД таких масс объяснить не могут в силу

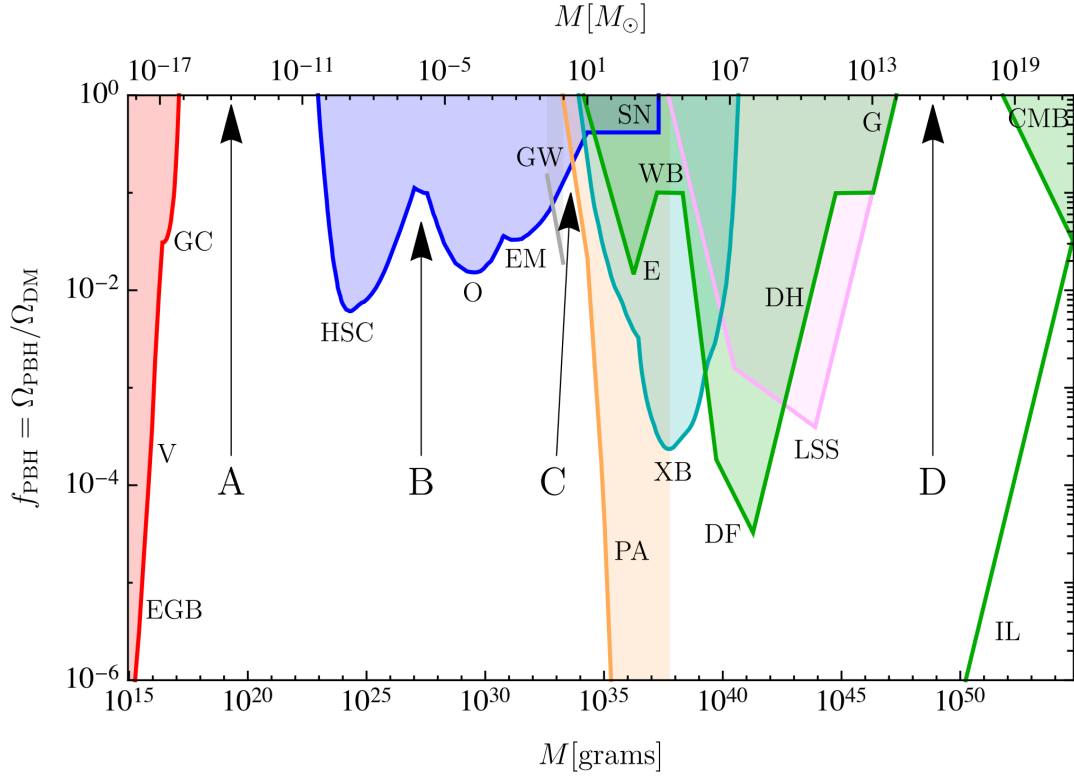


Рисунок 1.3 — Ограничения на долю ПЧД во всей скрытой массе для монохроматической функции масс, обусловленные испарением (красный), линзированием (синий), гравитационными волнами (серый), динамическими эффектами (зеленый), аккрецией (голубой), искажениями реликтового излучения (оранжевый) и крупномасштабной структурой (фиолетовый). Пределы испарения исходят из внегалактического фона γ -излучения (EGB), потока позитронов, измеренного «Вояджером» (V), и излучения линии аннигиляции от центра Галактики (GC). Пределы линзирования обусловлены микролинзированием сверхновых (SN) и звезд в M31, исследуемых с помощью телескопа Subaru (HSC), Магеллановых Облаков, исследуемых с помощью EROS и в проекте MACHO (EM), и галактической выпуклости — эксперимент OGLE (O). Динамические ограничения связаны с широкими двойными системами (WB), звездными скоплениями в Эриданус II (E), динамическим трением гало (DF), приливными искажениями галактик (G), нагревом звезд в галактическом диске (DH) и диполем реликтового излучения (CMB). Ограничения крупномасштабной структуры вытекают из требования, чтобы различные космологические структуры не формировались раньше наблюдаемого (LSS). Пределы аккреции исходят из рентгеновских двойных (XB) и планковских измерений искажений реликтового излучения (PA). Пределы недоверия (IL) соответствуют одной РВН на соответствующую среду (галактика, скопление, Вселенная). Имеется четыре массовых окна (A, B, C, D), в которых ПЧД могли иметь заметную плотность

экспериментальных ограничений, в зависимости от массы ПЧД [6].

Как можно заметить по графику — большая часть масс ограничивает возможность объяснить всю скрытую массу с помощью ПЧД. Помимо этих ограничений существует модельно зависимые. Их можно обойти выбрав другую модель или концепцию. Прогнозируемые в них ограничения являются предметом дискуссий, поэтому в этой работе [6] они не отражены. Всего можно выделить 4-е оптимальных диапазона, два из которых полностью не ограничены (A, D) и два, в которых можно объяснить лишь долю порядка 10% скрытой массы (C, B). Изучаемые в этой работе ПЧД должны соответствовать промежутку C.

2 ДВОЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Мы обсудили существование ограничений на первичные черные дыры (ПЧД), которые позволяют им одновременно находиться в массовом диапазоне от 10 до 100 M_{\odot} и составлять существенную долю в скрытой массе (см. раздел 1.2). В работах [7–9] активно исследуется этот диапазон, а также возможности образования двойных систем ПЧД в ранней Вселенной. Эти исследования также анализируют, как данные коллабораций LIGO, Virgo и KAGRA дополнительно ограничивают модели ПЧД до долей $f_{\text{РВН}} = 10^{-3}$ от всей скрытой массы. В данной главе мы рассмотрим эти вопросы и продемонстрируем возможность преодоления некоторых из этих ограничений.

2.1 МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР

Впервые механизм образования двойных систем первичных чёрных дыр и метод определения вероятностного распределения параметров для них были продемонстрированы в работе [55]. В дальнейшем, эти концепции были использованы для анализа компактных двойных систем, аналогичных системе, породившей событие GW150914 [7]. Ниже мы рассмотрим эти концепции.

Для оценки космологических параметров используется Λ CDM модель. В её рамках задаются доля ПЧД в скрытой массе $f_{\text{РВН}} = \Omega_{\text{DM}}/\Omega_{\text{РВН}}$ и соответствующая ей космологическая плотность $\Omega_{\text{РВН}}$. Используя эти статистические параметры вещества во Вселенной, можно оценить среднее расстояние \bar{x} между двумя различными первичными черными дырами. Для упрощения вычислений предполагается, что распределение первичных черных дыр является **равномерным** с этим средним расстоянием.

Тогда плотность вероятности образования двойной системы с заданными параметрами относительной орбиты — **большой полуосью** a и **эксцентриситетом** e — будет иметь вид [7]:

$$dP = \frac{3}{4} f^{3/2} \bar{x}^{-3/2} a^{1/2} e (1 - e^2)^{-3/2} da de. \quad (2.1)$$

После образования двойной системы, чёрные дыры начинают постепенно сближаться, в силу потери энергии от гравитационного излучения, и в конечном итоге сливаются в ЧД большей массы. Время слияния определяется выражением [56; 57]:

$$t = Q a^4 j^7, \quad (2.2)$$

где $Q = \frac{3c^5}{170} (GM_{BH})^{-3}$, а $j = \sqrt{1 - e^2}$ — **безразмерный угловой момент** (для простоты обращения с величинами в дальнейшем, мы будем преимущественно использовать эту величину).

Объединяя выражения 2.1 и 2.2, и проинтегрировав их, можно получить вероятность слияния пар различных параметров (a, j) к интересующему моменту времени t_0 . Далее, используя выражение 2.3 находим число образовавшихся и слившихся пар первичных черных дыр к моменту t_0 :

$$\text{Темп слияний} = n_{\text{чд}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{\text{сл.}}(t_0) - P_{\text{сл.}}(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (2.3)$$

где $n_{\text{чд}}$ — средняя плотность ПЧД. Эта величина называется темпом слияний. Современное значение темпа слияний было экспериментально определено с помощью гравитационно-волновых интерферометров коллабораций LIGO, Virgo, KaGra (в диапазоне от 2 до 53 Гпк⁻³ год⁻¹, см. [10]). Сравнивая эти значения, можно сделать выводы о соответствии или несоответствии наблюдаемого темпа слияний с предсказанным, а также о диапазоне доли первичных черных дыр в скрытой массе. В работе [7] показывается, что доля ПЧД с массой $30 M_{\odot}$ ограничена на уровне $f_{\text{РВН}} \lesssim 10^{-3}$, что незначительно для столь амбициозной модели.

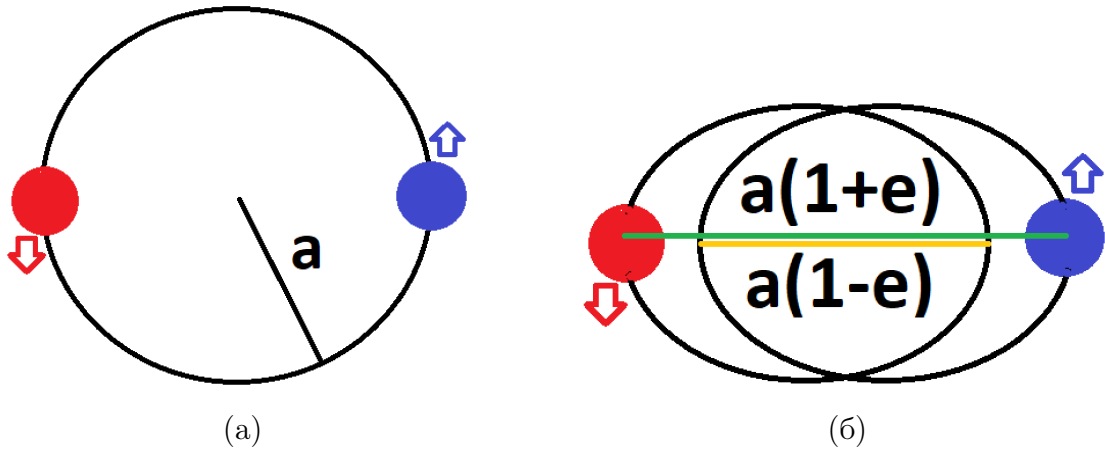


Рисунок 2.1 — (а) Орбита двойной системы при $e = 0$ ($j = 1$) представляет собой окружность. Расстояние между телами остаётся постоянным на протяжении всей орбиты и равно $2a$, где a — большая полуось. (б) Орбита двойной системы при $0 < e < 1$ ($0 < j < 1$) представляет собой эллипс. В случае эллиптической орбиты, расстояние между телами изменяется в течение одного оборота. *Зеленый отрезок* отражает расстояние между телами в *апоцентре*, то есть максимально возможное расстояние между ними. *Желтый отрезок* отражает расстояние между телами в *перигентре*, то есть минимально возможное расстояние. Стрелки показывают направление движения по орбите

2.2 ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР

Используя выражения 2.1 и 2.2, полученные в работах [7; 56; 57], можно сделать некоторые выводы о характеристиках двойных систем первичных черных дыр.

Во-первых, из выражения 2.1 можно понять, что вероятность образования двойной системы ПЧД увеличивается при приближении безразмерного углового момента j к 0 или эксцентриситета e к 1 (плотность вероятности стремится к бесконечности).

Во-вторых, выражение 2.2 показывает, что «время жизни» двойной системы (время слияния) стремится к 0, когда безразмерный угловой момент j ближе к 0 (e ближе к 1). Причём $t \propto j^7$, т.е. время жизни значительно изменяется от эксцентриситета, чем от других параметров.

Таким образом, двойные системы первичных черных дыр обычно образуются с бесконечно малыми угловыми моментами и имеют очень корот-

кое время жизни. Однако, если происходит даже незначительное увеличение безразмерного углового момента в процессе слияния, это приводит к значительному увеличению времени жизни системы.

2.3 ОЦЕНКА ЭФФЕКТА НАРАБОТКИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

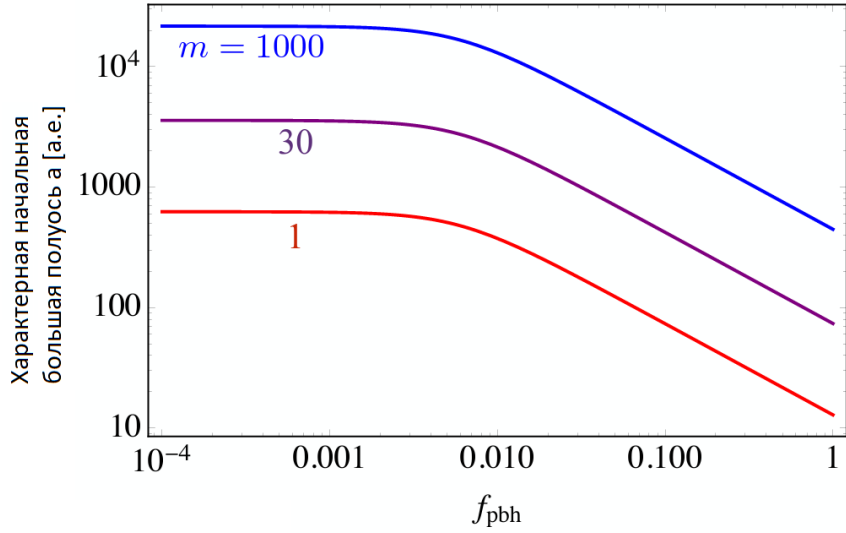
Предположим, что существует механизм, который «нарабатывает» (увеличивает) безразмерный угловой момент и оценим это увеличение. Свободное падение двух тел можно рассматривать, как двойную систему с безразмерным угловым моментом $j \approx 0$ (эксцентриситетом $e \approx 1$). Задача о движении двух гравитационно-связанных тел называется «Задачей Кеплера» и имеет однозначное решение [58; 59].

Пусть расстояние между телами в начальный момент равно r . Направим ось X через точки положения тел. Если перпендикулярная оси X составляющая относительной скорости тел (v_{\perp}) равна 0, то тела свободно падают друг на друга вплоть до момента прямого столкновения, т.е. $j = 0$ ($e = 1$). Если $v_{\perp} > 0$, то угловой момент становится больше 0 и возникает эллиптическая орбита. Численно оценим величину углового момента (вычисления проводятся для системы покоя тела 1 с использованием формул параграфа 15 источника [58]):

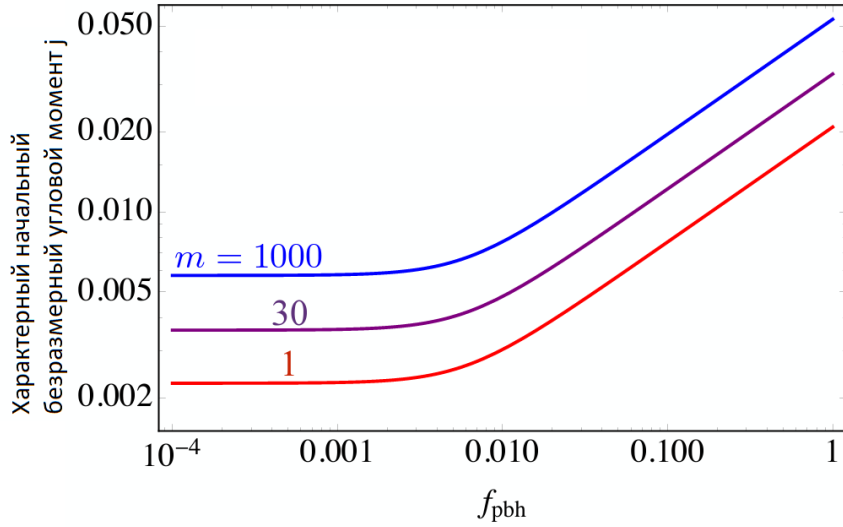
$$\begin{cases} p = \frac{L^2}{m_2^2 \alpha}, & \alpha = G(m_1 + m_2), \\ |L| = r m_2 v_{\perp}, \\ a = \frac{p}{j^2}, \end{cases} \Rightarrow j^2 = \frac{r^2 v_{\perp}^2}{a \alpha}, \quad (2.4)$$

где L — момент импульса, p — «параметр» орбиты. Поскольку мы рассматриваем ситуацию $j \rightarrow 0$ ($e \approx 1$) можно считать, что $r \approx 2a$. Тогда итоговое выражение для безразмерного углового момента выглядит следующим образом:

$$j = 2v_{\perp} \sqrt{\frac{a}{\alpha}}. \quad (2.5)$$



(a)



(б)

Рисунок 2.2 — Характерные начальные параметры орбиты двойной системы первичных чёрных дыр из работы [60]. (а) Для большой полуоси a , (б) для безразмерного углового момента j

В работе [60] были вычислены характерные начальные параметры орбит двойных систем ПЧД (a , j) в зависимости от доли ПЧД в скрытой массе (см. рис. 2.2). Используем их для оценки наработки углового момента по полученной формуле 2.5. Для наглядности примем $v_{\perp} = 1$ км/с. Рассмотрим случай $m_{1,2} = 30 M_{\odot}$, тогда, поскольку мы желаем охватить как можно большую долю $f \approx 1$, большая полуось соответствует $a = 80$ а.е., безразмерный угловой момент $j = 0.035$ и гравитационная постоянная $G = 4.3 \cdot 10^{-3} \text{пк} \cdot (\text{км/с})^2 \cdot M_{\odot}^{-1}$.

$$j = 2 \cdot 1 \text{ км/с} \sqrt{\frac{80 \text{ а.е.}}{4.3 \cdot 10^{-3} \text{ пк} (\text{км/с})^2 M_{\odot}^{-1} \cdot (30 + 30) M_{\odot}}} \approx 0.078. \quad (2.6)$$

Таким образом безразмерный угловой момент вырос на порядок при небольшом изменении скорости. Используя выражение 2.2 можно оценить, как изменилось время жизни :

$$\frac{t_{\text{new}}}{t_0} \approx \frac{10^{12} \text{ лет}}{10^{10} \text{ лет}}. \quad (2.7)$$

Время выросло на 2 порядка. Подытожим полученные результаты.

2.4 ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. МОТИВАЦИЯ К РАБОТЕ

Мы рассмотрели современные исследования в области двойных систем первичных чёрных дыр. Разобравшись в механизме образования, мы отметили характерные свойства параметров орбит таких систем, а именно для большинства систем характерно $j \rightarrow 0$ ($e \approx 1$). Однако даже незначительное увеличение перпендикулярной составляющей скорости (v_{\perp}) в двойной системе приводит к «наработке» (значительному увеличению) безразмерного углового момента и ещё более значительному увеличению «времени жизни» (времени слияния).

Темп слияний для двойных систем с долей ПЧД в скрытой массе близкой к 1, оцененный в работе [7], сильно превышает наблюдаемый. Мы же предполагаем, что реальные времена жизни сильно увеличиваются за счёт механизма наработки углового момента, что позволит понизить предсказываемый темп слияний и ослабить ограничения на долю ПЧД в скрытой массе. В главе 3 мы предлагаем один из возможных механизмов наработки углового момента.

3 СКОПЛЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР

Как отмечалось в разделе 2.1, в исследованиях темпа слияний от двойных первичных чёрных дыр (ПЧД) обычно рассматривают равномерное в пространстве распределение ПЧД [7; 8; 55]. Любая пара ПЧД из этого распределения могут образовать двойную систему. Ближайшая к паре третья первичная чёрная дыра создаёт момент импульса для этой системы, благодаря чему двойные в таких моделях могут образовываться с угловым моментом отличным от нуля (эксцентриситетом меньше 1). В ряде работ (см. [52; 61] и источники в этих работах) рассматриваются предположения об образовании ПЧД преимущественно скоплениями. В данной работе мы рассматриваем именно такие модели для объяснения механизма наработки углового момента.

3.1 МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ И ЭВОЛЮЦИЯ

Самый распространённый механизм формирования скоплений ПЧД описан в работах [52; 61]. Он основан на космологических выводах моделей

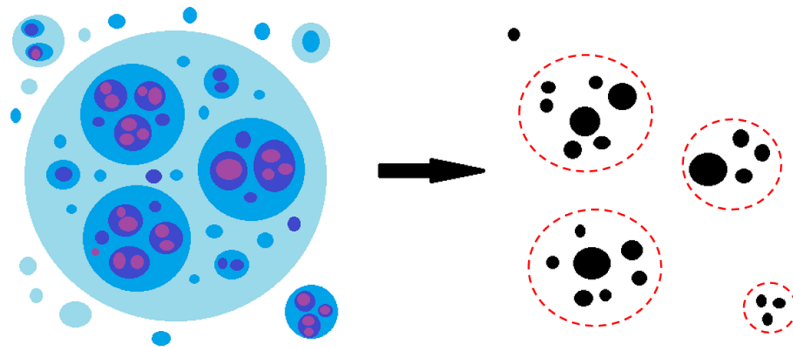


Рисунок 3.1 — Многократные флуктуации, расширяющиеся и накладывающиеся поверх друг друга естественным образом обеспечивают самоподобную структуру. Формируются скопления ПЧД самых разных масс и размеров [62]

элементарных частиц, предсказывающих неравновесный фазовый переход второго рода в период стадии инфляции и образование доменных стенок по окончании инфляции (см. главу 1). Замкнутые доменные стенки, превышающие космологический горизонт, коллапсируют в постинфляционную эпоху, образуя массивные скопления чёрных дыр. Формирующиеся скопления имеют фрактальную структуру (воспроизводящую себя на каждом временном шаге в убывающем масштабе, см рис. 3.1).

В результате аккреции данные объекты могут образовать сверхмассивные чёрные дыры, вокруг которых в процессе слияния образуются космологические структуры. С другой стороны в этой работе мы предполагаем, что близко расположенные соседние скопления могут образовать гравитационно-связанную пару. Орбита такой пары должна быть очень вытянутой (см. раздел 2.2), вплоть до $r_{\min}/2 < R_{\text{кл.}}$, где r_{\min} — наименьшее расстояние между центрами масс скопления (расстояние в *перицентре*), $R_{\text{кл.}}$ — радиус кластера. Другими словами, возникнет пересечение частей скоплений, что вызовет частные многократные *сближения* (рассеяния). Вследствие этих сближений тела скоплений будут приобретать скорости достаточные, чтобы покинуть скопления. Эта скорость по своей природе является некоторой вариацией второй космической скорости, которая зависит только от массы притягивающего тела (системы тел). А скорость, приобретаемая из-за рассеяний зависит от масс тел. Таким образом менее массивные тела, рассеивающиеся на более массивных легче приобретают достаточную скорость, для вылета из гравитационно-связанной системы. Похожее явление «выветривания» вследствие рассеяний можно наблюдать и без столкновений скоплений, что и было обнаружено в шаровых звёздных скоплениях [63]. Оставшиеся же тела, предположительно, формируют двойные системы более округлых форм, вследствие «наработки» углового момента. Причиной этого эффекта может быть дисперсия скоростей массивных тел под действием взаимодействий с телами скопления. Оценим величину этой дисперсии.

3.2 ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СКОРОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧЁРНОЙ ДЫРЫ СКОПЛЕНИЯ

Упростим задачу столкновений двух тел, рассмотренную в предыдущем разделе. Пусть скопление представляет собой шаровое скопление N тел одинаковых масс m_i и одного центрального тела (центральной чёрной дыры — ЦЧД) большей массы $m_{\text{ЦЧД}}$ (Суммарная масса скопления $M_{\text{кл}} = N \cdot m_i + m_{\text{ЦЧД}}$). Тогда два таких скопления даже при прямом падении друг на друга ($e \approx 1$ или $j \approx 0$) могут образовать двойную систему из центральных массивных тел, в силу дисперсии их скоростей.

Согласно [64] дисперсия скоростей шарового скопления можно оценить, как:

$$\sigma = \eta \sqrt{\frac{GM_{\text{кл}}}{R_{\text{кл}}}}, \quad (3.1)$$

где $\eta = \sqrt{1/2}$ — константа, $R_{\text{кл}}$ — радиус скопления, G — гравитационная постоянная. Тогда дисперсия скорости центрального тела будет определяться соотношением [65]:

$$\sigma_{\text{ЦЧД}} = \sigma \sqrt{\frac{m_i}{m_{\text{ЦЧД}}}}. \quad (3.2)$$

Пусть в начальный момент времени центры масс скоплений (совпадающие с положением центральных тел) не подвижны и находятся в апоцентре (на максимально удалённом расстоянии друг от друга). Также, пусть скорость центральных тел равна их дисперсии, вычисленной ранее. В разделе 2.3 мы отметили, что решающий вклад в эксцентриситет вносит относительная перпендикулярная составляющая скорости тел двойной системы (v_{\perp}). В таком случае направление скоростей выберем так, чтобы максимизировать v_{\perp} двух центральных тел, а именно перпендикулярно линии проходящей через точки апоцентра, в разные стороны. Тогда $v_{\perp} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ (скорость одного из тел - скорость системы) = $\sigma_{\text{ЦЧД}1} + \sigma_{\text{ЦЧД}2}$.

Оценим численно величину этой скорости. Для наглядности возьмём два одинаковых скопления, где $m_{\text{ЦЧД}} = 30 M_{\odot}$ (т.е. равную массе

тела двойной системы из раздела 2.3). А массу остальных тел возьмём такую, чтобы суммарная масса скопления $M_{\text{кл}} = N \cdot m_i + m_{\text{ЦЧД}} = 33 M_{\odot}$ ($N = 100$). Радиус скопления должен позволить скоплениям пересечься в перицентре:

$$\begin{aligned} r_{\min} &= a(1 - e) = a \left(1 - \sqrt{1 - j^2} \right) = \\ &= 80 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 0.035^2} \right) \text{ а.е.} = 0.05 \text{ а.е.}, \end{aligned}$$

где значения a , j берутся также из раздела 2.3. Расстояние между телами (ЦЧД) в перееетре сильно меньше характерных размеров скоплений. Для наглядности возьмём $R_{\text{кл}} = 10$ а.е. Тогда:

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= 2\sigma_{\text{ЦЧД}} = 2\eta \sqrt{\frac{GM_{\text{кл}}}{R_{\text{кл}}}} \cdot \sqrt{\frac{m_i}{m_{\text{ЦЧД}}}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{2 \cdot 4.3 \cdot 10^{-3} \text{ пк} \cdot (\text{км/с})^2 \cdot M_{\odot}^{-1} \cdot 33 M_{\odot}}{10 \text{ а.е.}}} \cdot \sqrt{\frac{0.03 M_{\odot}}{30 M_{\odot}}} \approx 2.4 \text{ км/с.} \quad (3.3) \end{aligned}$$

Таким образом, данный механизм по нашим грубым оценкам способен «наработать» угловой момент. В заключительной главе 4 этой работы мы получим более точные оценки описываемых этих эффектов с помощью N-body моделирования.

4 МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ СКОПЛЕНИЙ ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ЭВОЛЮЦИИ

Процессы масштабирования скоплений первичных чёрных дыр или шаровых звёздных скоплений протекают со свойственным им масштабом времени. Для экспериментальной космологии такие масштабы времени пока не достижимы. Поэтому для исследований динамики такого рода объектов используют *N-body* моделирование. В данной работе мы разработали пакет `PyGRA` (*Python Gravitation N-body simulation*) [66] на языке `Python`, чтобы проверить нашу гипотезу о «наработке» углового момента в случаях кластеризации ПЧД.

4.1 РЕАЛИЗАЦИЯ ПАКЕТА PYGRA

На данный момент существует множество пакетов для решения задачи движения многих тел. Самые известные из них `Nbody6` и `Gadget`. Для оценок в нашей работе достаточно разработать свою небольшую, но простую в использовании программу. Пакет `PyGRA` писался преимущественно для разрешения двойных систем скоплений. На данный момент он достаточно оптимизирован, чтобы разрешать системы в 200 тел с весьма малым постоянным временным шагом (до сотен секунд) на больших промежутках времени (до 1 Муг). Характерное время вычисления от пары минут до пары часов (превышение указанных параметров влечёт к сильному увеличению времени вычисления). Алгоритмы работы программы описаны в приложении А. Описание способов объявления начальных данных, а также тесты точности используемых методов приведены в приложении В.

Таблица 4.1 — Модуль скорости центральной чёрной дыры

| Величина | Значение |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\langle v_{\text{sim}} \rangle_t$ | 0.67 км/с |
| σ_{sim} | $\sqrt{\langle v_{\text{sim}}^2 \rangle_t - \langle v_{\text{sim}} \rangle_t^2}$ 0.26 км/с |
| $v_{\text{sim max}}$ | $\langle v_{\text{sim}} \rangle_t + \sigma_{\text{sim}}$ 0.93 км/с |
| $v_{\perp \text{sim}}$ | $2 \cdot v_{\text{sim max}}$ 1.86 км/с |
| $v_{\perp \text{th}}$ | 2.4 км/с |

4.2 ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧЁРНОЙ ДЫРЫ

Ранее была оценена возможная скорость ЦЧД, окружённой скоплением тел меньших масс (раздел 3.2). Для проверки оценки было смоделировано скопление аналогичное описанному в разделе 3.2 ($N_{\text{общ.}} = 101$ тело, 100 из них с массой $m_i = 0.03 M_{\odot}$ и центральное $M_{\text{ЦЧД}} = 30 M_{\odot}$). На графике 4.1 можно наглядно проследить эволюцию скорости ЦЧД. Из полученных данных можно найти математическое ожидание (среднее значение по времени) и дисперсию величины скорости.

В таблице 4.1 приведены вычисленные характеристики (*sim*) и теоретически оцененное максимально возможное значение относительной скорости (*th*). Порядок величин $v_{\perp \text{sim}}$ и $v_{\perp \text{th}}$ совпадает, следовательно можно сделать вывод в верности полученных оценок. Это значит, что даже маломассивные скопления способны создать скорость порядка 1 км/с и двойные системы центральных чёрных дыр от пар таких скоплений будут нарабатывать угловой момент.

Детали и результаты проверки точности моделирования скоплений описаны в разделе приложения В.2. Полный список параметров моделирования приведен в приложении С.1.

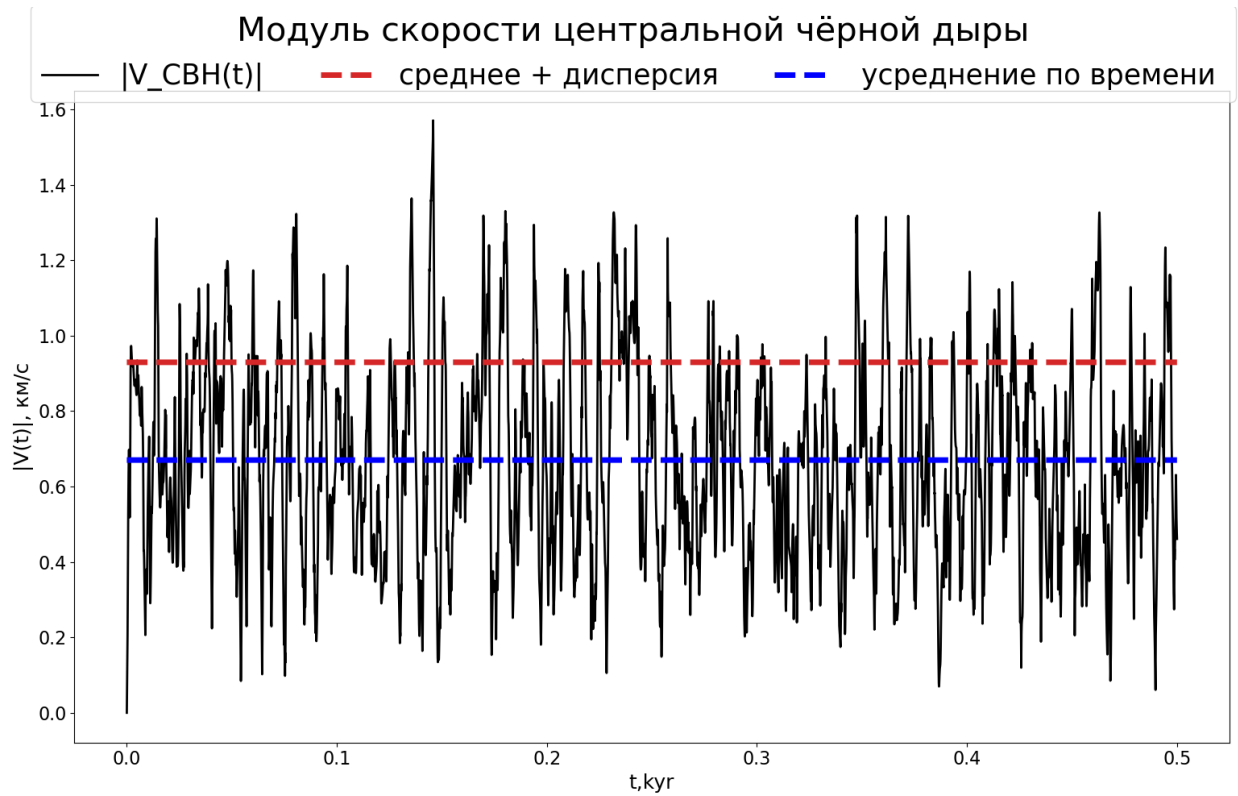


Рисунок 4.1 — Эволюция модуля скорости центральной чёрной дыры. Синей пунктирной линией отмечено среднее по времени значение, красной пунктирной линией показана оценка максимального значения модуля скорости (среднее + дисперсия)

4.3 ЭВОЛЮЦИЯ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ СКОПЛЕНИЙ ПРИ НАЧАЛЬНОМ СВОБОДНОМ ПАДЕНИИ

Исследуем эволюцию орбиты двойных систем скопления с массивной ЦЧД в случае свободного падения ($N_{\text{общ.}} = 202$ тела, центральное $M_{\text{ЦЧД}} = 30 M_{\odot}$, большая полуось $a = 80$ а.е., безразмерный угловой момент $j = 0$). Ранее было показано, что наличие скопления вокруг центральной чёрной дыры придаёт ей дисперсию скоростей (разделы 3.2 и 4.2). Зная величину этой скорости можно вычислить, как изменятся параметры орбиты. В этом разделе рассматривается динамика формирования двойной системы ЧД при лобовом столкновении кластеров ПЧД.

Стоит учесть, что при свободном падении скопления друг на друга они неизбежно пересекутся, что даст дополнительный эффект изменения параметров. В рамках данной работы качественного анализа вклада источников изменений параметров относительной орбиты не произво-

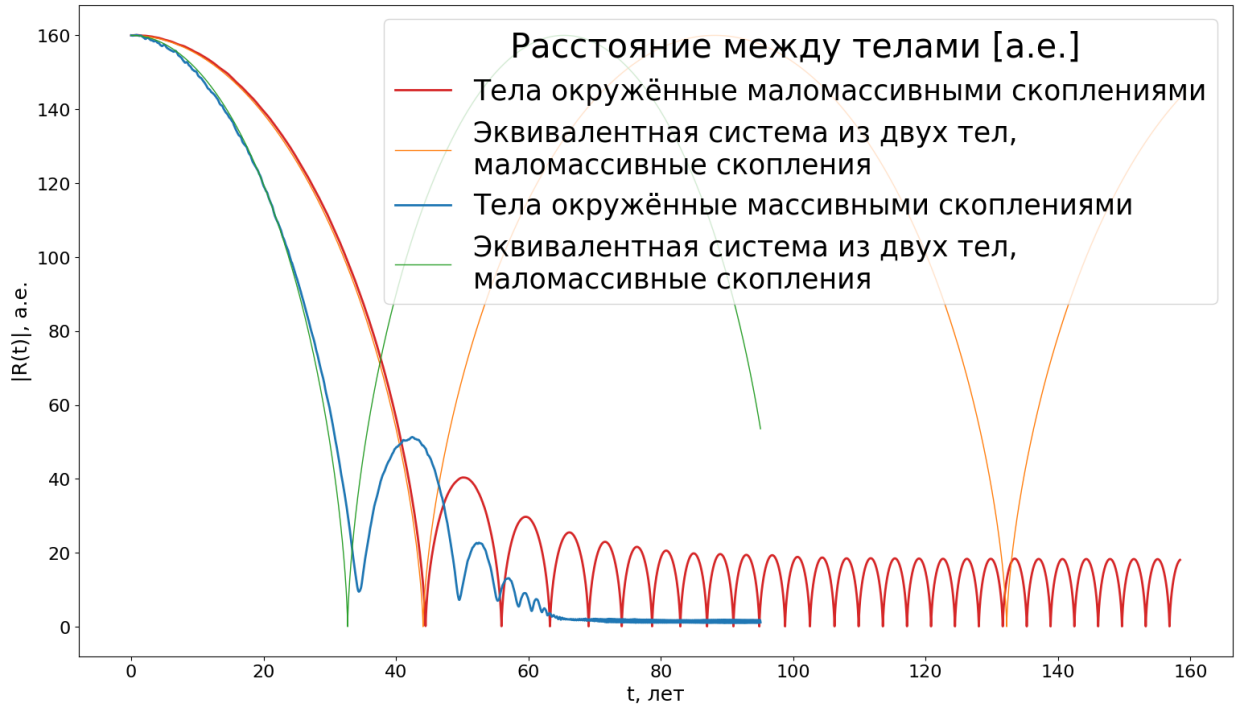
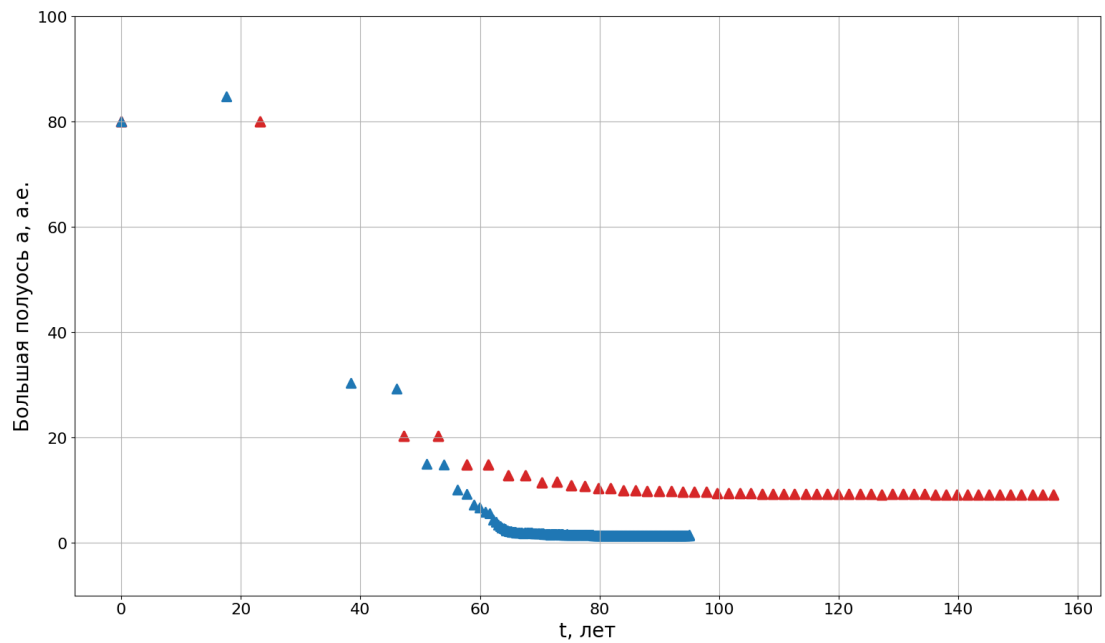


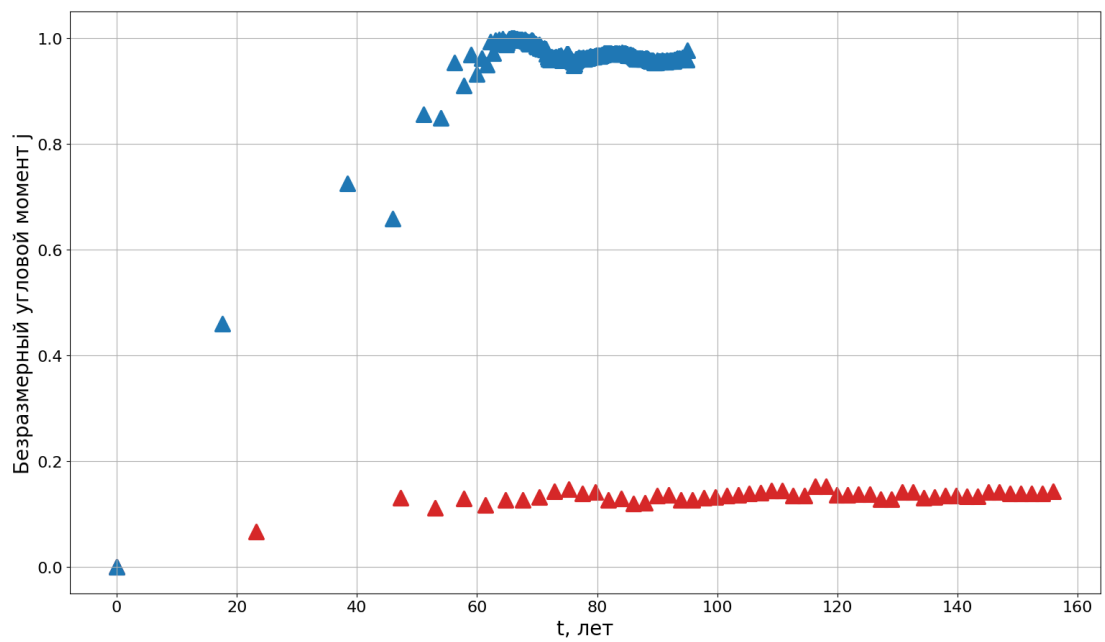
Рисунок 4.2 — Графики зависимости расстояния между телами двойных систем. Синяя и зелёная линии — $M_{\text{кл., внеш.}} \gtrsim M_{\text{ЦЧД}}$, красная и оранжевая — $M_{\text{кл., внеш.}} \ll M_{\text{ЦЧД}}$. Оранжевая и зеленая линии отражают движение двойных систем без скоплений суммарных масс (ЦЧД+скопление). Синяя и красная — смоделированная эволюция расстояния между телами двойных систем

дится. Однако чтобы пронаблюдать как можно больше эффектов, влияющих на изменение параметров, мы моделируем два разных случая: 1) Лёгкое скопление — когда суммарная масса окружающих тел скопления мала, относительно массы ЦЧД ($M_{\text{кл., внеш.}} \ll M_{\text{ЦЧД}}$, а именно $M_{\text{кл., внеш.}} = M_{\text{кл.}} - M_{\text{ЦЧД}} = 3 M_{\odot}$) и 2) Тяжёлое скопление — когда они сравнимы ($M_{\text{кл., внеш.}} \gtrsim M_{\text{ЦЧД}}$, $M_{\text{кл., внеш.}} = 30 M_{\odot}$). Таким образом, предположительно, мы минимизируем эффекты пересечения скоплений в первом случае, но сможем наблюдать их влияние во втором. Подробные характеристики моделирования указаны в приложении С.2.

Результаты моделирования продемонстрированы на рисунках 4.2, 4.3 и в таблице 4.2. Первый рисунок отражает характер сближения ЦЧД со временем — синяя и красная линии, и как могли бы сближаться тела двойной системы, будь скопление едино с ЦЧД, — оранжевая и зелёная линии. Поэтому рисунку можно наблюдать, как массивное скопление влияет на ЦЧД (флуктуацию расстояния на более мелких временных масштабах, по сравнению с периодом колебаний вдоль синей линии, в разделе 4.4 данный эффект более нагляден), а также как массивное скопление существенно



(а)



(б)

Рисунок 4.3 — Эволюция параметров двойной системы ПЧД окружённых скоплением (Синие треугольники — $M_{\text{кл., внеш.}} \gtrsim M_{\text{ПЧД}}$, красные — $M_{\text{кл., внеш.}} \ll M_{\text{ПЧД}}$): (а) большая полуось (б) безразмерный угловой момент

Таблица 4.2 — Эволюция параметров орбиты

| Величина | Было | Стало |
|------------------------------|---------|-----------------------|
| $j_{\text{тяж.}}$ | | 0.977 |
| $a_{\text{тяж.}}$ | 80 а.е. | 1.5 а.е. |
| $j_{\text{лёг.}}$ | | 0.14 |
| $a_{\text{лён.}}$ | 80 а.е. | 9.2 а.е. |
| Время жизни для тяжёлого ск. | | $1687 t_{\text{uni}}$ |
| Время жизни для лёгкого ск. | | $3 t_{\text{uni}}$ |

сближает пары ЦЧД, по сравнению с мало-массивным. В анализе проведённом в разделе приложения В.1 показано, как получить аналогичный график.

Из данных относительного расстояния (4.2) можно получить параметры орбиты (подробнее см. приложение С.4). Таким образом мы получаем точечную зависимость параметров орбиты, отражённую на рисунке 4.3. Как и ожидалось, более массивное скопление (б) оказало достаточно влияния, чтобы сделать орбиту близкой к круговой ($j \approx 1$). Мало массивное (а), напротив, изменило угловой момент не значительно, однако достаточно, чтоб превысить предсказанное нами в разделе 2.3 значение ($j_{\text{лёг., th}} = 0.078 < j_{\text{лёг., sim}} = 0.14$).

Конечные результаты изменения параметров орбиты представлены в таблице 4.2. Эти результаты показывают, что при правильном подборе параметров кластеров можно добиться «наработки» углового момента двойных систем в таких кластерах, а время жизни может быть достаточно большим, чтобы ослабить ограничения на долю ПЧД в скрытой массе $f_{\text{РВН}}$, о которой мы рассуждали в предыдущих главах. Однако этот эффект наблюдается даже при слабых предположениях.

4.4 ДВОЙНАЯ СИСТЕМА СКОПЛЕНИЙ

Для исследования более реалистичного случая эволюции системы двух скоплений, было сделано несколько дополнительных примеров моделирования, два из которых представлены в этом разделе. В данных приме-

Таблица 4.3 — Эволюция параметров орбиты. Здесь $t_{\text{uni}} = 13,799 \text{ Gyr}$ — возраст Вселенной, $j_{1,2}$ — безразмерный угловой момент для примеров 1,2 соответственно, $a_{1,2}$ — большая полуось

| Величина | Было | Стало |
|---------------|----------------------|-----------------------|
| j_1 | 0.069 | 0.883 |
| a_1 | 50 а.е. | 3.6 а.е. |
| j_2 | 0.227 | 0.536 |
| a_2 | 5.1 а.е. | 1.71 а.е. |
| Время жизни 1 | t_{uni} | $1485 t_{\text{uni}}$ |
| Время жизни 2 | $0.4 t_{\text{uni}}$ | $2.3 t_{\text{uni}}$ |

рах безразмерный угловой момент выбирается $j > 0$ (Пример 1: $N_{\text{общ.}} = 22$ тела, 20 из них с суммарной массой $m_{\Sigma i} = 20 M_{\odot}$ и два центральных по $M_{\text{ЦЧД}} = 100 M_{\odot}$, $a = 5.1 \text{ а.е.}$, $j = 0.2265$; Пример 2: $N_{\text{общ.}} = 22$ тела, 20 из них с суммарной массой $m_{\Sigma i} = 20 M_{\odot}$ и два центральных по $M_{\text{ЦЧД}} = 100 M_{\odot}$, $a = 50 \text{ а.е.}$, $j = 0.07$). Дополнительные параметры моделирования для примеров указаны в приложении С.

Исследуем зависимость параметров орбиты этих скоплений от времени. Построим зависимость относительного расстояния от времени (см. рис. 4.4, 4.5). Аналогично прошлому разделу мы наблюдаем затухание орбитальных колебаний до некоторого конечного состояния. По максимальному и минимальному отклонению кривой расстояния между телами на последних колебаниях мы получили оценку конечных параметров орбиты. Сравнения результатов представлены в таблицах 4.2, 4.3, формулы расчётов приведены в приложении С.4.

Таким образом, несмотря на сильное уменьшение большой полуоси, время слияния увеличилось, как предполагалось ранее и как уже было показано в случае начального нулевого углового момента. Основным отличием примеров 1 и 2 является масса окружающих кластеров, как и в прошлой главе.

Полученные результаты ещё раз подтверждают результаты полученные в разделе 4.3, используя отличный от нуля безразмерный угловой момент.

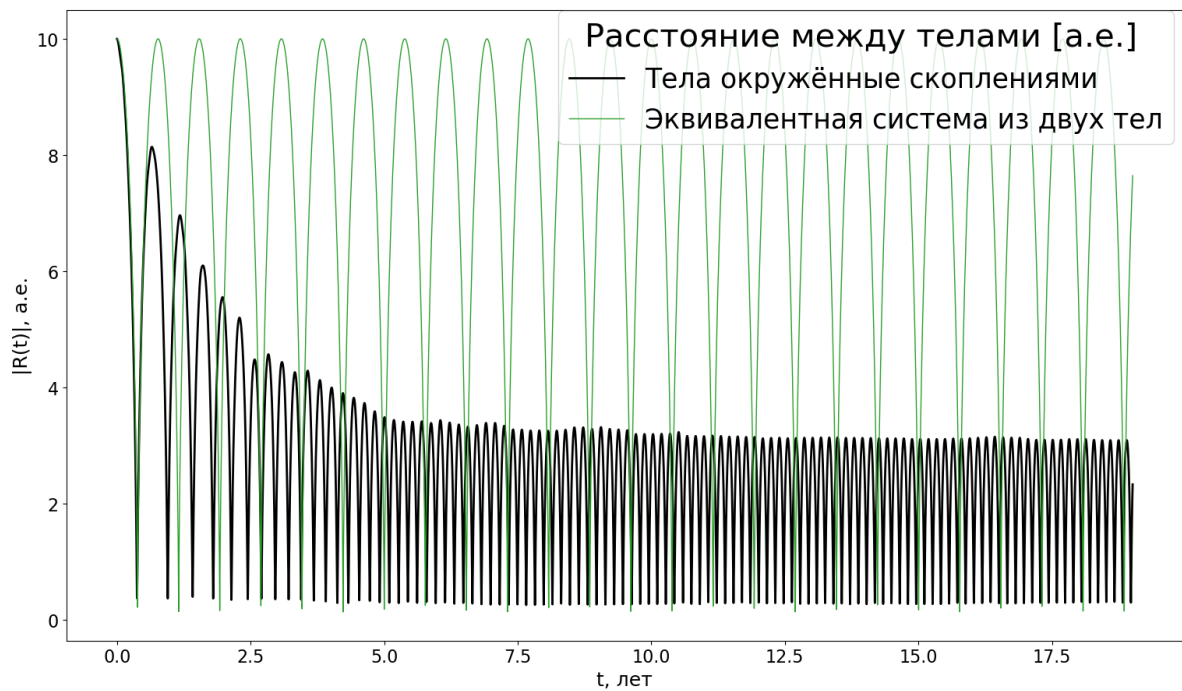


Рисунок 4.4 — Эволюция параметров орбиты двойной системы тел окружённых скоплениями для примера 1

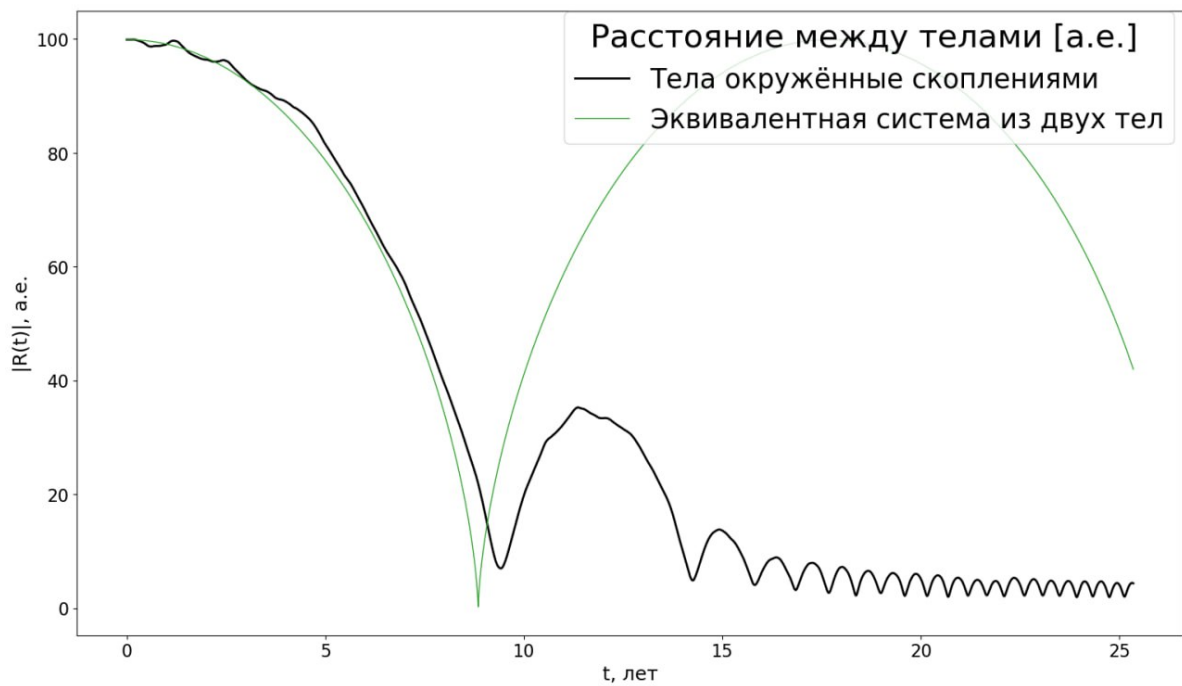


Рисунок 4.5 — Эволюция параметров орбиты двойной системы тел окружённых скоплениями для примера 2

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был проведён небольшой обзор актуальных проблем современной космологии, успехов гравитационно-волновой астрономии и концепции первичных чёрных дыр (ПЧД). Отдельно рассмотрены гравитационно-волновой сигнал GW150914 и гипотезы о природе слившихся черных дыр. Показаны механизмы рождения двойных систем ПЧД, а также современные ограничения на их долю в скрытой массе $f_{\text{РВН}}$. Отмечена особенность ПЧД — частое образование высокоэксцентричных двойных систем с малым значением безразмерного углового момента $j \ll 1$. Показано, что может существовать механизм «нарабатывающий» (увеличивающий) угловой момент. В частности, динамические эффекты при кластеризации ПЧД естественно приводят к увеличению j .

Был разработан пакет PyGRA для генерации начальных условий и моделирования N-body описанных выше явлений. С помощью этого пакета была промоделирована и исследована эволюция параметров орбиты двойной системы кластеризированных ЧД (для случаев свободного падения $j = 0$) и для более общих случаев. В нашем моделировании кластеры состоят из центральной ЧД с массой $30 M_{\odot}$ и легких ПЧД (массы которых приведены в разделе 4.3), её окружающих. В результате столкновения кластеров в конечном итоге формируется двойная система из центральных ЧД. Оценено «время жизни» получившейся двойной системы и показано, что кластеризация ПЧД приводит к его значительному увеличению по сравнению с равномерно распределёнными ПЧД. Таким образом, темп слияний двойных ПЧД в случае их кластеризации будет значительно меньше, чем предсказанный в работах [7; 8], что позволяет ПЧД занять большие доли в скрытой массе, чем $f_{\text{РВН}} = 10^{-3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 116, no. 6. — arXiv: 1602.03837 [gr-qc].
2. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration.* Properties of the Binary Black Hole Merger GW150914 // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 116, no. 24. — arXiv: 1602.03840 [gr-qc].
3. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // Physical Review Letters. — 2020. — Vol. 125, no. 10. — arXiv: 2009.01075 [gr-qc].
4. Pōniuā'ena: A Luminous $z = 7.5$ Quasar Hosting a 1.5 Billion Solar Mass Black Hole / J. Yang [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2020. — Vol. 897, no. 1. — P. L14. — arXiv: 2006.13452 [astro-ph.GA].
5. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration.* ASTROPHYSICAL IMPLICATIONS OF THE BINARY BLACK HOLE MERGER GW150914 // The Astrophysical Journal. — 2016. — Vol. 818, no. 2. — P. L22. — arXiv: 1602.03846 [astro-ph.HE].
6. *Carr B., Kuhne F.* Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments. — 2020. — arXiv: 2006.02838 [astro-ph.CO].
7. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 / M. Sasaki [et al.] // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 117, no. 6. — arXiv: 1603.08338 [astro-ph.CO].
8. *Kavanagh B. J., Gaggero D., Bertone G.* Merger rate of a subdominant population of primordial black holes // Physical Review D. — 2018. — Vol. 98, no. 2. — arXiv: 1805.09034 [astro-ph.CO].

9. *Eroshenko Y., Stasenko V.* Gravitational Waves from the Merger of Two Primordial Black Hole Clusters // Symmetry. — 2023. — Vol. 15, no. 3. — P. 637. — arXiv: 2302.05167 [astro-ph.CO].
10. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration.* THE RATE OF BINARY BLACK HOLE MERGERS INFERRED FROM ADVANCED LIGO OBSERVATIONS SURROUNDING GW150914 // The Astrophysical Journal. — 2016. — Vol. 833, no. 1. — P. L1. — arXiv: 1602.03842 [astro-ph.HE].
11. The Demography of Massive Dark Objects in Galaxy Centers / J. Magorrian [et al.] // The Astronomical Journal. — 1998. — Vol. 115, no. 6. — P. 2285–2305. — arXiv: astro-ph/9708072 [astro-ph].
12. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion / K. Gebhardt [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2000. — Vol. 539, no. 1. — P. L13–L16. — arXiv: astro-ph/0006289 [astro-ph].
13. *Ferrarese L., Merritt D.* A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies // The Astrophysical Journal. — 2000. — Vol. 539, no. 1. — P. L9–L12. — arXiv: astro-ph/0006053 [astro-ph].
14. Two ten-billion-solar-mass black holes at the centres of giant elliptical galaxies / N. J. McConnell [et al.] // Nature. — 2011. — Vol. 480, no. 7376. — P. 215–218. — arXiv: 1112.1078 [astro-ph.CO].
15. Supermassive Black Holes and Their Host Spheroids. II. The Red and Blue Sequence in the $M_{BH} - M_{*,sph}$ Diagram / G. A. D. Savorgnan [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2016. — Vol. 817, no. 1. — P. 21. — arXiv: 1511.07437 [astro-ph.GA].
16. The Final SDSS High-redshift Quasar Sample of 52 Quasars at $z > 5.7$ / L. Jiang [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2016. — Vol. 833, no. 2. — P. 222. — arXiv: 1610.05369 [astro-ph.GA].
17. Physical Properties of 15 Quasars at $z \gtrsim 6.5$ / C. Mazzucchelli [et al.] // The Astrophysical Journal. — 2017. — Vol. 849, no. 2. — P. 91. — arXiv: 1710.01251 [astro-ph.GA].

18. An 800-million-solar-mass black hole in a significantly neutral Universe at a redshift of 7.5 / E. Bañados [et al.] // *Nature*. — 2018. — Vol. 553, no. 7689. — P. 473–476. — arXiv: 1712.01860 [astro-ph.GA].
19. Discovery of the First Low-luminosity Quasar at $z > 7$ / Y. Matsuoka [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 2019. — Vol. 872, no. 1. — P. L2. — arXiv: 1901.10487 [astro-ph.GA].
20. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / Planck Collaboration [et al.] // *Astron. & Astrophys.* — 2020. — Vol. 641. — A6. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
21. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology / D. N. Spergel [et al.] // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2007. — Vol. 170, no. 2. — P. 377–408. — arXiv: astro-ph/0603449 [astro-ph].
22. Evidence for Reionization at $z \approx 6$: Detection of a Gunn-Peterson Trough in a $z = 6.28$ Quasar / R. H. Becker [et al.] // *The Astronomical Journal*. — 2001. — Vol. 122, no. 6. — P. 2850–2857. — arXiv: astro-ph/0108097.
23. *Belotsky K. M., Kirillov A. A.* Primordial black holes with mass $10^{16} - 10^{17}$ g and reionization of the Universe // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2015. — Vol. 2015, no. 1. — P. 041–041. — arXiv: 1409.8601 [astro-ph.CO].
24. *Belotsky K. M., Kirillov A. A., Rubin S. G.* Clusters of primordial black holes and reionization problem // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2015. — Vol. 78, no. 3. — P. 387–393. — URL: <https://doi.org/10.1134/S1063778815020088>.
25. *Belotsky K. M., al. et.* Reionization effect enhancement due to primordial black holes // *International Journal of Modern Physics D*. — 2017. — Vol. 26, no. 9. — P. 1750102. — arXiv: 1702.06338 [astro-ph.CO].
26. *Ricotti M., Ostriker J. P.* Reionization, chemical enrichment and seed black holes from the first stars: is Population III important? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2004. — Vol. 350, no. 2. — P. 539–551. — arXiv: astro-ph/0310331 [astro-ph].

27. *Dijkstra M., Haiman Z., Loeb A.* A Limit from the X-Ray Background on the Contribution of Quasars to Reionization // *The Astrophysical Journal*. — 2004. — Vol. 613, no. 2. — P. 646–654. — arXiv: [astro-ph/0403078](#) [[astro-ph](#)].
28. *Djorgovski S. G.* Black Holes from the Dark Ages: Exploring the Reionization ERA and Early Structure Formation with Quasars and Gamma-Ray Bursts // *The Tenth Marcel Grossmann Meeting. On recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories*. — 2006. — P. 422. — arXiv: [astro-ph/0409378](#) [[astro-ph](#)].
29. *Ricotti M., Ostriker J. P., Mack K. J.* Effect of Primordial Black Holes on the Cosmic Microwave Background and Cosmological Parameter Estimates // *The Astrophysical Journal*. — 2008. — Vol. 680, no. 2. — P. 829–845. — arXiv: [0709.0524](#) [[astro-ph](#)].
30. *Kashlinsky A.* LIGO Gravitational Wave Detection, Primordial Black Holes, and the Near-IR Cosmic Infrared Background Anisotropies // *The Astrophysical Journal*. — 2016. — Vol. 823, no. 2. — P. L25. — arXiv: [1605.04023](#) [[astro-ph.CO](#)].
31. Evidence for GN-z11 as a luminous galaxy at redshift 10.957 / L. Jiang [et al.] // *Nature Astronomy*. — 2021. — Vol. 5. — P. 256–261. — arXiv: [2012.06936](#) [[astro-ph.HE](#)].
32. Detecting Population III Stars through Observations of Near-Infrared Cosmic Infrared Background Anisotropies / A. Kashlinsky [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 2004. — Vol. 608, no. 1. — P. 1–9. — arXiv: [astro-ph/0401401](#) [[astro-ph](#)].
33. First Star Signature in Infrared Background Anisotropies / A. Cooray [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 2004. — Vol. 606, no. 2. — P. 611–624. — arXiv: [astro-ph/0308407](#) [[astro-ph](#)].
34. *Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N., Rubin S. G.* Early formation of galaxies induced by clusters of black holes // *Astronomy Reports*. — 2008. — Vol. 52, no. 10. — P. 779–789. — arXiv: [0801.0885](#) [[astro-ph](#)].

35. *Inman D., Ali-Haïmoud Y.* Early structure formation in primordial black hole cosmologies // *Physical Review D*. — 2019. — Vol. 100, no. 8. — P. 083528. — arXiv: 1907.08129 [astro-ph.CO].
36. *Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N.* A Stochastic Model for Correlations between Central Black Hole Masses and Galactic Bulge Velocity Dispersions // *Astronomy Letters*. — 2001. — Vol. 27, no. 12. — P. 759–764. — arXiv: astro-ph/0202019 [astro-ph].
37. *Carr B., Kühnel F., Sandstad M.* Primordial black holes as dark matter // *Physical Review D*. — 2016. — Vol. 94, no. 8. — P. 083504. — arXiv: 1607.06077 [astro-ph.CO].
38. *Penzias A. A., Wilson R. W.* A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. // *Astrophysical Journal*. — 1965. — Vol. 142. — P. 419–421. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1965ApJ...142..419P>.
39. *Gamow G.* Half an hour of creation... // *Physics Today*. — 1950. — Vol. 3 (8). — P. 16–21. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.3066969>.
40. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Astronomicheskii Zhurnal*. — 1967. — Vol. 10. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1967SvA....10..602Z/abstract>.
41. *Hawking S.* Gravitationally collapsed objects of very low mass // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1971. — Vol. 152. — P. 75.
42. *Carr B. J., Hawking S. W.* Black holes in the early Universe // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1974. — Vol. 168. — P. 399–416.
43. *Chul-Moon Yoo.* The basics of primordial black hole formation and abundance estimation. — 2022. — arXiv: 2211.13512 [astro-ph.CO].
44. *Mishra S. S., Sahni V.* Primordial Black Holes from a tiny bump/dip in the Inflaton potential. — 2020. — arXiv: 1911.00057 [gr-qc].
45. *Garcia-Bellido J., Linde A. D., Wands D.* Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation // *Phys. Rev. D*. — 1996. — Vol. 54. — P. 6040–6058. — arXiv: astro-ph/9605094.

46. *Khlopov M. Y., Polnarev A. G.* Primordial black holes as a cosmological test of grand unification // *Physics Letters B.* — 1980. — Vol. 97, no. 3/4. — P. 383–387. — URL: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90624-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90624-3).
47. *Hawking S. W.* Black holes from cosmic strings // *Physics Letters B.* — 1989. — Vol. 231, no. 3. — P. 237–239.
48. *Hawking S. W., Moss I. G., Stewart J. M.* Bubble collisions in the very early universe // *Phys. Rev. D.* — 1982. — Vol. 26, no. 10. — P. 2681–2693.
49. Formation of Black Holes in First Order Phase Transitions / M. Y. Khlopov [et al.]. — 1998. — arXiv: [hep-ph/9807343](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9807343) [hep-ph].
50. First Order Phase Transitions as a Source of Black Holes in the Early Universe / M. Y. Khlopov [et al.]. — 1999. — arXiv: [hep-ph/9912422](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9912422) [hep-ph].
51. *Rubin S. G., Khlopov M. Y., Sakharov A. S.* Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition. — 2000. — arXiv: [hep-ph/0005271](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0005271) [hep-ph].
52. *Rubin S. G., Sakharov A. S., Khlopov M. Y.* The formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 2001. — Vol. 92, no. 6. — P. 921–929. — arXiv: [hep-ph/0106187](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0106187).
53. *Khlopov M. Y., Rubin S. G., Sakharov A. S.* Primordial structure of massive black hole clusters // *Astroparticle Physics.* — 2005. — Vol. 23, no. 2. — P. 265–277. — arXiv: [astro-ph/0401532](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0401532) [astro-ph].
54. *Dolgov A., Silk J.* Baryon isocurvature fluctuations at small scales and baryonic dark matter // *Phys. Rev. D.* — 1993. — Vol. 47, no. 10. — P. 4244–4255. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.4244>.
55. Gravitational Waves from Coalescing Black Hole MACHO Binaries / T. Nakamura [et al.] // *The Astrophysical Journal.* — 1997. — Vol. 487, no. 2. — P. L139–L142. — arXiv: [astro-ph/9708060](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9708060).
56. *Peters P. C., Mathews J.* Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit // *Phys. Rev.* — 1963. — Vol. 131. — P. 435–439.

57. *Peters P. C.* Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses // *Phys. Rev.* — 1964. — Vol. 136. — B1224–B1232.
58. *Л.Л Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика: Механика. — Москва, 2004. — URL: <https://ia801703.us.archive.org/29/items/Teor-fizika-10-tomov-1-tom-2004/>.
59. *А. Рой, В. Сарычев.* Движение по орбитам. — Москва : Мир, 1981.
60. *Ali-Haïmoud Y., Kovetz E. D., Kamionkowski M.* Merger rate of primordial black-hole binaries // *Physical Review D.* — 2017. — Vol. 96, no. 12. — arXiv: 1709.06576 [astro-ph.CO].
61. Clusters of Primordial Black Holes / *К. М. Belotsky [et al.]* // *The European Physical Journal C.* — 2019. — Vol. 79, no. 3. — arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].
62. *Никулин В.* Космологические эффекты в теориях с неоднородными дополнительными измерениями. — Москва, 2022. — URL: <https://indico.particle.mephi.ru/event/292/>.
63. A supra-massive population of stellar-mass black holes in the globular cluster Palomar 5 / *М. Gieles [et al.]* // *Nature Astronomy.* — 2021. — Vol. 5. — P. 957–966. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41550-021-01392-2>.
64. *Айвен.Р Кинг.* Введение в классическую звёздную динамику. — ISBN 5-354-00163-3, 2002.
65. *David Merritt.* Dynamics and Evolution of Galactic Nuclei. — Princeton University Press, 2013. — P. 551. — URL: https://openlibrary.org/works/OL16802359W/Dynamics_and_Evolution_of_Galactic_Nuclei.
66. *Vorobyev G. I.* Python Gravitation N-body simulation. — 2023. — URL: <https://gitlab.com/MirumeYato/pygra>.
67. *The SciPy community.* SciPy – integrate.solve_ivp. — 2008. — URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html.
68. *Nick Wogan.* Nicholaswogan numbalsoda. — 2014. — URL: <https://github.com/Nicholaswogan/numbalsoda>.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

N-BODY МОДЕЛИРОВАНИЕ И БИБЛИОТЕКА PYGRA

В настоящее время, с развитием современной науки и технологий, наблюдается неоспоримый прогресс в области компьютерного моделирования различных физических и астрономических явлений. Одной из ключевых областей, в которой моделирование играет важную роль, является исследование взаимодействия множества тел в гравитационных системах. Такие системы включают в себя звезды, планеты, галактики и другие астрономические объекты, и их поведение может быть крайне сложным и динамичным.

Для изучения таких систем и предсказания их будущего развития были разработаны методы N-body моделирования. Они представляют собой метод численного решения уравнений движения, описывающих взаимодействие между каждой парой тел в системе. Основная идея заключается в том, что каждое тело в системе взаимодействует с каждым другим телом через гравитационную силу, что приводит к изменению их траекторий и пространственной конфигурации системы в целом.

Применение N-body моделирования охватывает широкий спектр научных областей, включая астрофизику, космологию, галактическую динамику, формирование звезд и планет, а также динамику многих других физических систем. Благодаря возможности учета большого числа тел и их взаимодействия, учёные получают уникальную на текущий день возможность исследования различных сценариев эволюции гравитационно-связанных систем и установления их характерных особенностей.

Уникальность такого решения состоит в том, что существует часть задач, не поддающихся аналитическому решению и не наблюдаемых экспериментально из-за длительности процессов или сложности их обнаружения. N-body моделирование позволяет тестировать и верифицировать теоретические модели, а также для интерпретации наблюдательных данных.

В этом примечании рассматривается программная реализация пакета N-body моделирования PyGRA (*Python Gravitation N-body simulation*) [66].

А.1 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БИБЛИОТЕКИ PYGRA

В данном разделе представлено описание программы PyGRA, разработанной в рамках этой работы. PyGRA представляет собой высокоэффективную программу для выполнения N -body моделирования в астрофизических и физических исследованиях. Репозиторий с кодом и документацией по использованию программы указан в источнике [66].

PyGRA реализована на языке программирования Python и предлагает широкий набор функциональных возможностей для моделирования взаимодействия множества тел в гравитационных системах. Она основана на численном решении уравнений движения, которые описывают гравитационное взаимодействие между каждой парой тел в системе. Одной из главных особенностей PyGRA является её простота использования. Программа предоставляет интуитивно понятный и легко настраиваемый набор классов, что делает ее доступной даже для исследователей, не имеющих глубоких знаний в программировании. Кроме того, PyGRA поддерживает различные настраиваемые параметры моделирования, позволяя исследователям адаптировать программу под свои конкретные потребности.

PyGRA также предоставляет возможность визуализации результатов моделирования. Она содержит встроенные инструменты для создания графических представлений динамики системы, таких как трехмерные графики, графики траекторий и энергетические диаграммы. Это позволяет исследователям наглядно представлять и анализировать результаты своих моделирований.

Одним из значимых преимуществ PyGRA является его высокая производительность. Программа оптимизирована для работы с большими наборами данных и способна проводить моделирование систем с умеренным числом тел (существенно меньшим, чем её прямые конкуренты Nbody6 и Gadget). Благодаря использованию многопоточного вычисления и структур данных, PyGRA обеспечивает эффективность и точность результатов моделирования.

А.1.1 МЕТОДЫ N-BODY МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сложность классического гравитационного N-body можно характеризовать как

$$O(N^2/2 \cdot t),$$

где N — это количество объектов, а t — время эволюции. Отсюда сразу видны и минусы данной модели — сложность растёт как квадрат количества объектов, из-за чего многочастичные объекты (вроде шаровых скоплений) очень сложно и долго обсчитывать. С другой стороны время эволюции для некоторых объектов может быть весьма продолжительным. Процессы рассеяния (тесных сближений) тел друг на друге обычно очень быстрые и требуют определённого достаточно малого временного шага. Динамический временной шаг очень сложен в реализации, при этом не даёт большого преимущества по скорости. Таким образом, при изучении очень масштабных процессов, состоящих из процессов существенно меньших масштабов, мы сталкиваемся с проблемой очень большого количества последовательных расчётных итераций, которые, ввиду их последовательности, нельзя делать параллельно (подробнее см. А.2).

Альтернативные методы подразумевают использование моделей обобщающих гравитационные явления.

В частности, можно упрощать задачу для случая очень больших N (например, когда есть газ и т.д.) создавая решётку в точках которой будет вычисляться значения гравитационной силы или потенциал, а потом сшивать решения получая в каждый момент времени полную конфигурацию гравитационного поля. Для таких расчётов часто используют *быстрые преобразования Фурье*. Поскольку вычисление всех компонент поля происходит единожды, то сложность уменьшается до $O(Nt)$, но сами вычисления относительно усложняются.

Как альтернативу для решения некоторых конкретных задач в крупных шаровых скоплениях используют *Монте-Карло моделирование* для выбора орбит объектов, что также упрощает вычисления до N сложности. однако ТАКИЕ задачи требуют задания специфических условий и сферической симметрии.

В некоторых ситуациях удобно разделять задачу на маленькие взаи-

модействующие между собой части с использованием метода «`tree code`».

Современные пакеты `N-body` моделирования ориентируются на использование разных моделей в разных условиях, оптимизацию временного шага для локальных явлений и пр. Их сложность требует глубокого понимания внутренней структуры программы и физики космологических процессов. Примеры таких программ `N-body6`, `Gadget`. Подробнее о моделировании в космологии можно прочитать в источнике [64].

В `PyGRA` было реализовано два метода решения системы задач движения тел: классическое решение методом Эйлера и РК4 (метод Рунге-Кутты 4-ого порядка). Также использованы и интерпретированы под решение уравнений движения тел внешние методы библиотек `SciPy` (методы `integrate.solve_ivp`) [67] и `NumbaLsoda` [68]. `Integrate.solve_ivp` содержит в себе методы:

- 1) ‘`RK45`’ (используется по умолчанию): Явный метод Рунге-Кутты порядка 5(4). Ошибка контролируется с учетом точности метода четвертого порядка, но шаги выполняются с использованием формулы пятого порядка (производится локальная экстраполяция). Для плотного вывода используется интерполяционный полином четвертого порядка. Может быть применен в комплексной области.
- 2) ‘`RK23`’: Явный метод Рунге-Кутты третьего(второго) порядка. Ошибка контролируется с учетом точности метода второго порядка, но шаги выполняются с использованием формулы третьего порядка (производится локальная экстраполяция). Для плотного вывода используется кубический полином Эрмита. Может быть применен в комплексной области.
- 3) ‘`DOP853`’: Явный метод Рунге-Кутты восьмого порядка. Реализация на языке `Python` алгоритма "`DOP853` исходно написанного на `Fortran`. Для плотного вывода используется интерполяционный полином седьмого порядка, обеспечивающий точность седьмого порядка. Может быть применен в комплексной области.
- 4) ‘`Radau`’: Неявный метод Рунге-Кутты из семейства `Radau IIA` пятого порядка. Ошибка контролируется с использованием формулы встроеного третьего порядка. Для плотного вывода используется кубический полином, удовлетворяющий условиям коллокации.

- 5) ‘BDF’: Неявный многошаговый переменного порядка (от 1 до 5) метод, основанный на формуле обратной дифференциации для аппроксимации производной. Используется практически постоянная схема шага, а точность повышается с помощью модификации NDF. Может быть применен в комплексной области.
- 6) ‘LSODA’: Метод Адамса/БДФ с автоматическим обнаружением и переключением жесткости. Это оболочка для Fortran из пакета ODEPACK.

Из выше представленных методов оригиналы методов DOP853 и LSODA используются в библиотеке NumbaLsoda, но оптимизированы для многопоточных вычислений, что ставит их выше в рекомендации использования.

A.1.2 РЕАЛИЗАЦИЯ КЛАССОВ И ИХ МЕТОДОВ

PyGRA является объектно ориентированной программой (ООП). Для определения тела используется класс `G_body`, описанный в файле расположенном в `pygra/G_body.py`. Он обладает стандартными атрибутами 3-ёх пространственных и 3-ёх скоростных декартовых координат, а также параметрами масс, гравитационной постоянной и постоянной смягчения (*softening*), являющейся необходимой константой ограничивающее гравитационное взаимодействие близ проходящих тел. В нашей задаче на данный момент не рассматриваются явления слияний тел внутри скоплений, поэтому постоянная смягчения позволяет оставить алгоритм без слияний и снизить эффект притяжения, при очень близких взаимодействиях.

Для описания системы тел используется класс `G_bodies`, который обладает такими же параметрами, но объединёнными в массив (для каждого тела). Этот класс можно объявить, сложив два и более объектов `G_body`. Для более комфортного задания скоплений, в PyGRA реализован класс `G_cluster`, наследующий `G_bodies`. В нём реализованы алгоритмы для различных распределений параметров (см. подробнее В.2.1).

В этом же файле реализованы функции для определения скоростей тел в двойных системах (см. подробнее В.1).

Файл `pygra/G_solver.py` содержит реализацию методов описанных в А.1.1. `pygra/G_evolution.py` — самый важный файл объединяющий все классы воедино для решения задачи N-body. Он связывает объекты «тел»

(body/bodies/cluster), отвечающих за генерацию начальных данных, с методами «решатель» (solver), запускающими алгоритмы решения уравнений движения тел. В данном файле реализовано сохранение данных в файловую систему с учётом лимитов оперативной памяти. Когда объём данных заполняет существенную часть оперативной памяти — программа сохраняет все текущие данные в файл и удаляет их из оперативной памяти для продолжения моделирования. Для считывания данных из файлов объект `G_evolution` использует путь к сохранённым файлам и позволяет методами этого класса загружать смоделированные данные (или какую-то их часть) для дальнейшего анализа.

А.2 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Язык программирования `Python` в международном сообществе считается «медленным» языком. Существуют много проектов, пытающихся решить эту проблему. Это связано с тем, что удобство разработки и использования стали важнее в продуктах ориентированных на большую потребительскую базу, нежели скорость работы отдельных её частей. Современное вычислительное оборудование также способствует достаточно быстрому исполнению задач, даже при не оптимальном написании алгоритмов. Однако, это не отменяет факт того, что в некоторых задачах без низкоуровневых языков не обойтись.

За последние 20 лет были разработаны наибольшим успехом пользуются следующие методы оптимизации языка: многопоточное вычисление и «перевод» на низкоуровневые языки при компиляции или в бинарные операции. Технологии «перевода» называются `jit` — «just in time», что подразумевает компиляцию кода программы на более низкий уровень в момент выполнения. Поскольку проблема с вычислительными возможностями частично решена, то использование многопоточных вычислений и `cpu/gpu` памяти стало доступным способом ускорить любой программный продукт в десятки раз. Одним из самых перспективных является пакет `numba`. Он автоматически ищет возможность `jit`-компиляции, в тоже время оптимизирует функции для многопоточных вычислений и позволяет использовать `cpu/gpu` память.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ТЕСТОВОЕ N-BODY МОДЕЛИРОВАНИЕ

В этом примечании рассматриваются примеры N-body моделирования частных задач реализованных в пакете PyGRA. В частности, рассматриваются их согласованность с классическими решениями и погрешности решения. Объекты, рассмотренные в этих примерах, будут использоваться в дальнейшем моделировании в главе 4.

Каждый пример представляет собой файл типа Jupyter Notebook, что весьма удобно для проведения анализа одновременно с разработкой скрипта.

В.1 ДВОЙНАЯ СИСТЕМА ЧЁРНЫХ ДЫР

Самым простым и проверяемым примером является случай двойной системы тел. Этот пример в пакете PyGRA именуется как «`pygra/scripts/Binary_sim.ipynb`». С помощью класса `G_body` создаются два отдельных объекта с параметрами «*mass*» — масса, «*pos*» — массив из 3-ёх координат, обозначающих положение, и «*vel*» — массив 3-ёх координат скорости.

Скорость тел в классической задаче Кеплера — величина, которую можно вычислить, зная эксцентриситет и большую полуось. В относительной системе отсчёта выражение для скорости вычисляется по формуле [59]:

$$v^2(t) = G \cdot (M_1 + M_2) \cdot \left(\frac{2}{r(t)} - \frac{1}{a} \right), \quad (\text{B.1})$$

где v — Модуль скорости тела, M_i — массы тел, $r(t)$ — относительное расстояние между телами, a — большая полуось. Возвращаясь в исходную систему координат (покоя центра масс) формула преобразуется как:

$$v_{1,2} = \frac{M_{2,1}}{M_1 + M_2} \cdot \sqrt{G \cdot (M_1 + M_2) \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (\text{B.2})$$

На практике легче изначально задавать относительное расстояние между

тeлaми, a выбиpая интepecующий эkcцeнтpиситeт нaхoдить бoльшyю пoлy-ocь. Длa oблeгчeния этиx pacчeтoв мoмeнт вpeмeни t выбиpaeтcя, кaк тoчкa aпoцeнтpа или aпoaпcисa (кoгдa pacстoяниe мeждy тeлaми мaксимaльнo и pавнo $a \cdot (1 + e)$).

Иcпoльзyя фoрмyлy B.3 мoжнo тaкжe paccчитaть пepиoд oднoгo пoлнoгo oбoрoтa. Дaннaя фoрмyлa нeoбxoдимa длa пpaвильнoгo выбoрa вpeмeннoгo шaгa и кoнeчнoгo вpeмeни мoдeлиpoвaния.

$$T_{\text{orb}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot (M_1 + M_2)}}. \quad (\text{B.3})$$

B.1.1 ТЕСТИРОВАНИЕ ПРИМЕРА

Рассмотрим частный сгенерированный случай, с параметрами:

- Мaссa тeл 50 и 100 M_{\odot}
- Бoльшaя пoлyocь $1 \cdot 10^{-3}$ пк и эkcцeнтpиситeт 0.8 \Rightarrow oтнoсительнoe pacстoяниe $1.8 \cdot 10^{-3}$ пк
- Oжидaeмый пepиoд 242 гoдa
- Bpeмeннoй шaг 10^6 cекyнд или пpимepнo 0.032 гoдa
- Bpeмя кoнцa cимyляции пpимepнo 1 тьcячa лeт

Этoт пpимep нyжeн длa oзнaкoмлeния c пpинципaми pacчeтoв пapaмeтpoв oрбиты, a тaкжe сaмoй пpocтoй пpoвepкe тoчнoсти peшeния pазных мeтoдoв, oписaнных в A.1.1.

Зaдaчa Кeплepa являeтcя pазpeшeннoй зaдaчeй двyx тeл и ee peшeниe oбычнo длa пpocтoты пpoиcхoдит в cистeмe пoкoя oднoгo из тeл. Длa cлyчaeв эллиптичecкoй oрбиты peшeниe зaвиcимocти pадиyс вeктoрa oт вpeмeни выглядит кaк cистeмa [58]:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = a \cdot (1 - e \cdot \cos \xi) \\ t = \sqrt{\frac{ma^3}{\mu}} \cdot (\xi - e \sin \xi), \text{ гдe } \mu = G \cdot (M_1 + M_2) \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

Рeшaeм дaннyю cистeмy числeннo c пoмoщью мeтoдa «*fsolve*» из библioтeки *scipy.optimize*. Cмoдeлиpoвaннe дaннe тaкжe пpивoдим к видy

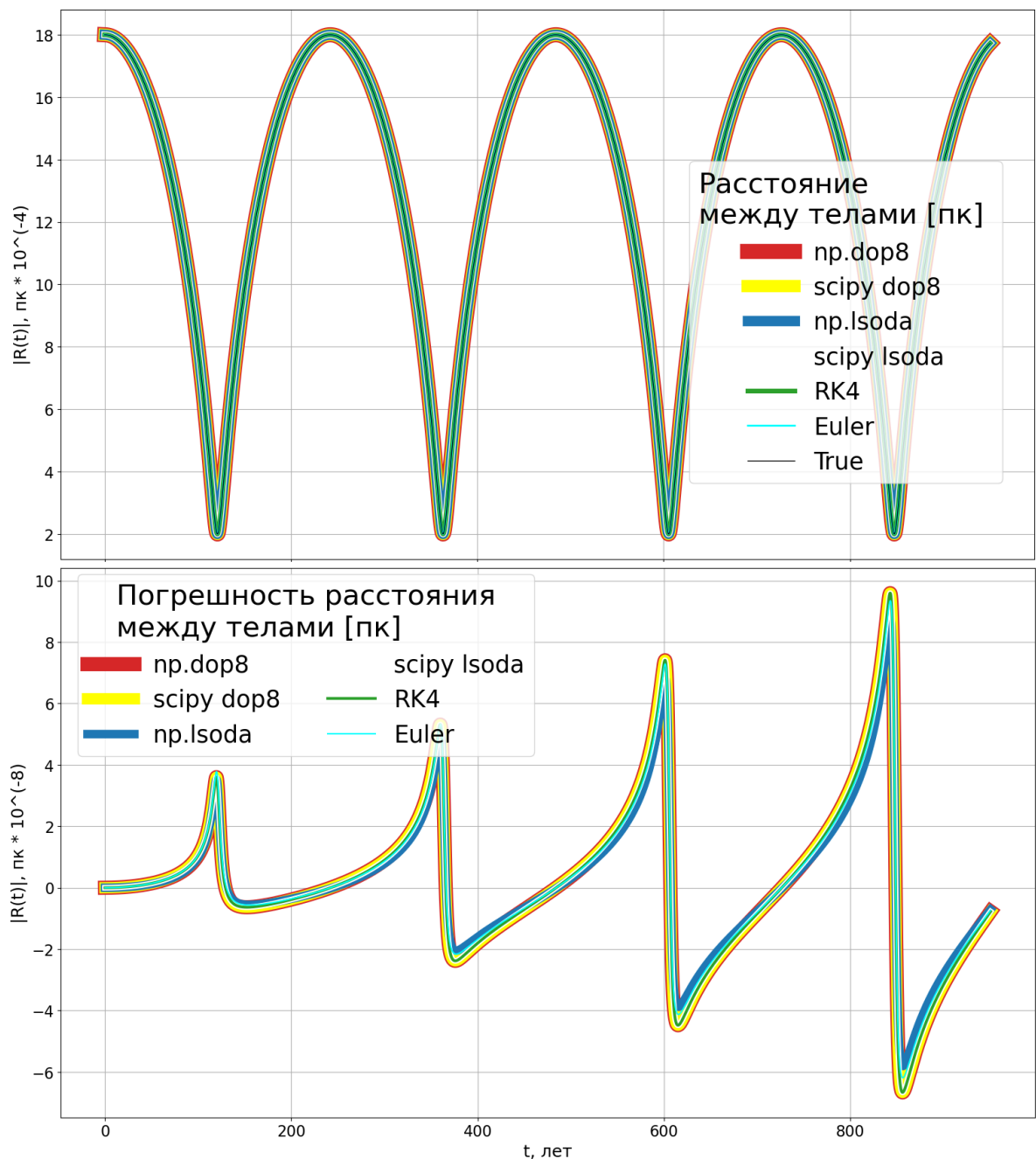


Рисунок В.1 — *Сверху*: График зависимости расстояния между телами при моделировании двойной системы тел в зависимости от времени для разных методов. *Снизу*: График зависимости погрешности расстояния между двумя телами от времени для разных методов, вычисляемая путём вычитания из расстояния между телами, для каждого отдельного метода, точного решения задачи Кеплера (отмеченного на верхнем графике, как *True*). Используемые методы: *dop8(53)* — явный метод Рунге-Кутты порядка 8 (*np.* - реализации библиотеки NumbaLsoda [68], *scipy.* - библиотеки SciPy [67]), *lsoda* — метод Адамса/BDF с автоматическим определением жесткости и переключением (*np./scipy.* - аналогично), *RK4* — явный метод Рунге-Кутты порядка 4, реализованный самостоятельно, *Euler* — явный метод Эйлера, реализованный самостоятельно, *True* — численное решение задачи Кеплера В.4

зависимости относительной дистанции между телами от времени и получаем следующий график (см. рис В.1). Если из результатов каждого метода вычесть полученную ранее «истинную» зависимость, то можно получить график зависимости ошибок метода от времени. Для выбранного в этом примере шага все методы показывают хороший непротиворечивый результат. Если увеличивать шаг то можно будет заметить, как некоторые методы начинают существенно расходиться. Это связано с *жесткостью* нашей задачи — увеличивая эксцентриситет ближе к единице мы получаем резкое увеличение значений сил между телами, при постоянном шаге ошибки в этой области будут нарастать очень существенно. Для решений жестких задач есть более подходящие методы, на данный момент в нашей программе они не представлены.

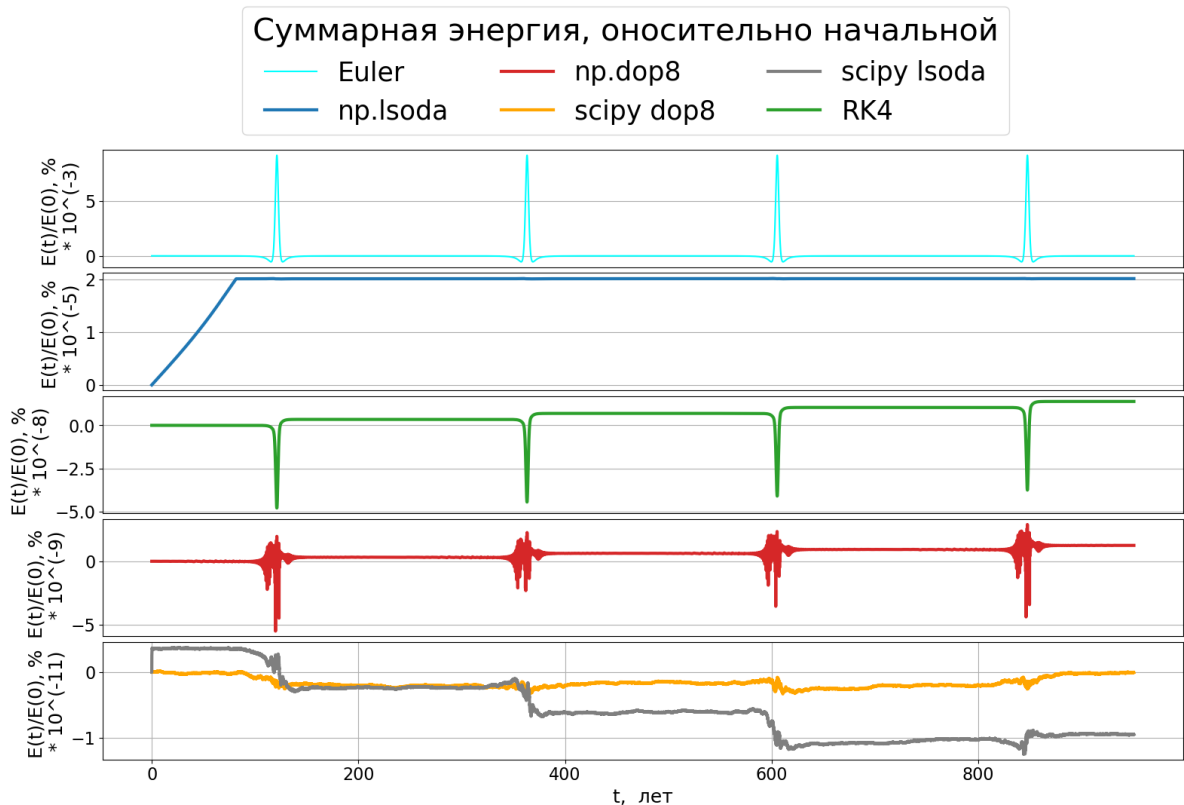


Рисунок В.2 — Графики зависимости нормированной суммарной энергии системы от времени для разных методов. Нормировка происходит на значение суммарной энергии в начальный момент времени, значение указано в процентах

Альтернативное исследование точности вычислений можно провести построив график зависимости энергии от времени. Суммарная энергия замкнутой системы должна сохраняться, соответственно мы должны наблюдать прямую, однако из-за ошибок вычисления можно наблюдать отклоне-

ния от постоянной зависимости (рис. В.2). Также это означает, что методы вычисляющие вторые и более производные будут давать более точные результаты соответствующих величин. Из графика можно сделать вывод, что методы библиотеки SciPy лучше всего справляются с этой задачей. Объяснением этого является то, что методы библиотеки SciPy используют динамическое время, что существенно увеличивает точность расчётов, но и существенно увеличивает затрачиваемое время.

Исследовав наши методы на точность и скорость вычисления (подробная аналитика скорости вычисления описана в главе А.1.1) можно перейти к более сложным примерам.

В.2 СКОПЛЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР

В данном разделе мы рассмотрим другой пример – симуляция шарового скопления (**ШС**) тел масс порядка солнечных (далее ШЗС – шаровое звёздное скопление). Здесь есть пара важных аспектов: распределение тел в скоплении (по массам, по скоростям и по координатам) и проверка закона сохранения энергии (аналогично В.1).

В.2.1 РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ

Начальные данные в такой задаче — это положение объектов в пространстве, массы и скорости. Для создание единичных объектов их данные можно самостоятельно добавить в общий массив, однако для скоплений, где частиц очень много, прописывать начальные условия достаточно проблемно, поэтому для этой задачи используется выбор псевдослучайных параметров. Для положения частиц в скоплении можно использовать метод Монте-Карло:

```
### Monte-carlo generator of position coordinat distribution of
    ↪ objects in ball-shaped cluster
def MCC1Pos(n, pos0, R = 1., p = np.random.uniform(0, 1, (0, 3)
    ↪ ), soft = softening):
    ip = np.append(p, np.random.uniform(soft, R, (n - len(p), 3))
    ↪ * 2 - R, axis = 0)
```

```

fp = np.delete(ip, np.where(np.sum(ip**2, axis = 1) > R**2),
    ↪ axis = 0)
if not len(fp) - n == 0:
    return MCC1Pos(n, pos0, R, fp)
else:
    return fp + pos0

```

Эта функция случайно с равномерным распределением выбирает n точек на отрезке от 0 до 1 по каждой координате, растягивает этот отрезок до $(-R, R)$, а после перебором убирает те точки, сумма квадратов координат которых больше R .

Распределение масс является одномерным массивом. На данный момент используется равномерное распределение, где каждое тело имеет массу (в этом примере $1 M_{\odot}$).

Для определения скоростей тел необходимо выполнить условие удержания этих тел в скоплении. Изначально это было реализовано теоремой Вириала. Из неё определялась дисперсия скоростей и, соответственно, каждому телу давалось случайное значение скорости с полученной дисперсией и нулевым средним. Однако тела приобретали большую кинетическую энергию и вылетали из скопления. Данная проблема была решена следующим образом: Вместо использования теоремы Вириала каждому отдельному телу выбирался псевдослучайный модуль скорости, такой что кинетическая энергия этого тела была равна половине потенциальной энергии массы всего скопления (за исключением массы этого тела) в точке положения тела. Таким образом суммарная энергия каждого тела всегда меньше 0, что гарантирует «привязанность» каждого отдельного тела к скоплению. Направление этой также случайно разыгрывалось равномерно по 2π .

Реализация функции определения скоростей:

```

def set_vel_delta_dist(self) -> None:
    """ Set velocities of bodies. Main idea is choosing
    ↪ velocities propotional G(M_cl-m_i)/R """
    n : int = len(self)
    self.vel = np.random.randn(n, 3)
    # Norm calculation
    Norm = 1 / np.sqrt(np.sum(self.vel**2, axis = 1))
    # Distances array
    distances = np.sqrt(np.sum(self.pos**2, axis = 1))

```

```

distances[distances < 1.* 10**8] = 1. # avoid ZeroDivizion
↪ error
# Calculate Amplitude as G(M_cl - m_i) / R
Amplitude = np.sqrt((self.mass_cl - self.mass.T) * self.__G
↪ / distances)
# Normalization
Amplitude = Amplitude * Norm
# Reshape
Amplitude = np.ones((n, 3)) * (Amplitude).T
Amplitude[distances < 1.* 10**8] = np.array([[0., 0., 0.]])
↪ # Declare no movement for bodies in center
self.vel = self.vel * Amplitude
pass

```

В.2.2 ТЕСТИРОВАНИЕ ПРИМЕРА. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ ВНУТРИ СКОПЛЕНИЯ

Аналогично методике описанной в В.1 рассмотрим сохранение энергии для скопления в 101 тело, суммарной массой $200 M_{\odot}$ (100 тел общей массой $100 M_{\odot}$ и одно, расположенное в центре, массой $100 M_{\odot}$), радиусом скопления 0.01 пк и временным шагом в 10^6 секунд (см. рис В.3).

По графику можно так же заметить, что некоторые методы лучше сохраняют энергию. Метод RK4 достаточно резко расходится, в связи с чем его ошибки не умещаются на графике и выделены отдельно. Такие ошибки возникают из-за сближений – это явление, когда два тела проходят достаточно близко друг другу, тем самым возникает жёсткая задача и пик кинетической и потенциальной энергии. Из-за постоянного шага в таких местах происходят потери, которые и вызывают резкий рост ошибок. Метод RK4 не может использоваться в дальнейшем исследовании, поскольку его ошибки могут достигать тысяч %. Методы пакета `NumbaLsoda` используют немного более устойчивые схемы, а также имеют встроенные критерии точности (что способствует уменьшению ошибок от сближения, но в некоторых случаях их не хватает и вычисления заканчиваются с ошибкой. Алгоритм их описан в документации [68]), благодаря чему потери составляют порядка $10^{-9}\%$ и меньше.

Несмотря на достижение хороших результатов точности сохранения

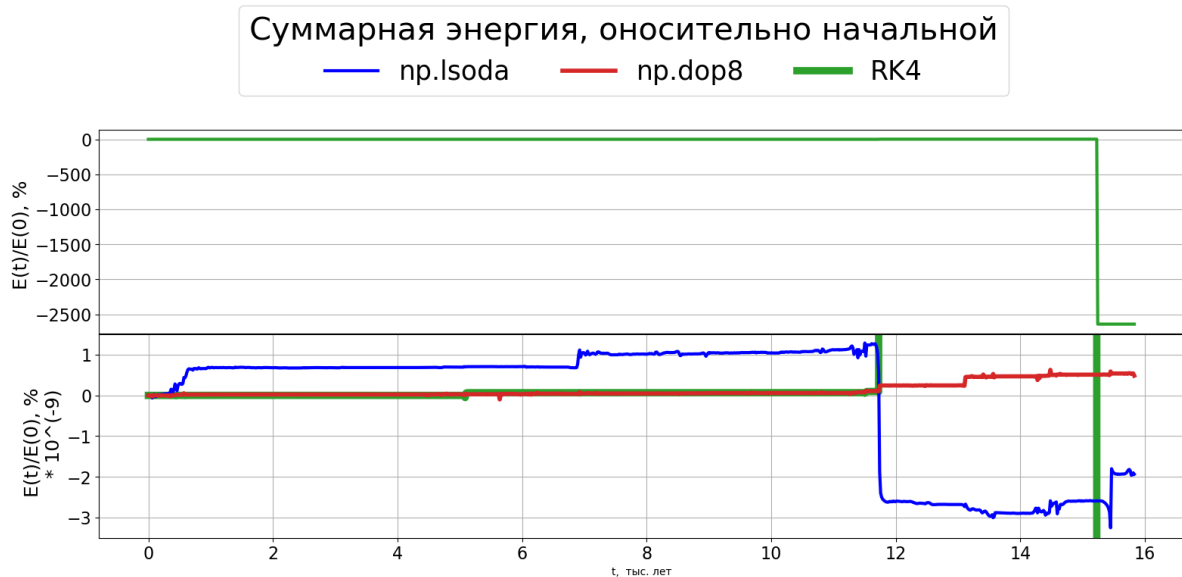


Рисунок В.3 — Графики зависимости нормированной суммарной энергии системы от времени для разных методов. Нормировка происходит на значение суммарной энергии в начальный момент времени, значение указано в процентах. График с методом *RK4* также вынесен отдельно, поскольку существенно выпадает из масштаба из-за тесного сближения

закона сохранения энергии в дальнейшей работе будут предприниматься новые попытки использовать более уместные методы для решения такого рода задач.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ И ИХ АНАЛИЗА

В разделах ниже, а также в главе 4 рассматриваются шаровые скопления N тел одинаковых масс m_i и одного центрального тела большей массы $m_{\text{ЦЧД}}$ (Суммарная масса скопления $M_{\text{кл., общ.}} = N \cdot m_i + m_{\text{ЦЧД}}$), а также двойные системы таких скоплений.

С.1 ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Параметры, используемые для моделирования скопления аналогичного описанному в разделе 3.2:

- 101 тело.
- Суммарная масса $33 M_{\odot}$ (100 тел общей массой $3 M_{\odot}$ и одно центральное тело, массой $30 M_{\odot}$). Масса мало-массивных тел скопления одинакова.
- Радиус скопления 10 а.е.
- Временной шаг 10^3 секунд.

С.2 ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВОБОДНО ПАДАЮЩИХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

Параметры моделирования для системы свободно падающих тел:

- 202 тела.
- Массы:
 - **Легкое скопление:** Суммарная масса $66 M_{\odot}$ (200 тел общей массой $6 M_{\odot}$ и два центральных тела, массой $30 M_{\odot}$ каждое).
 - **Тяжёлое скопление:** Суммарная масса $120 M_{\odot}$ (200 тел общей массой $60 M_{\odot}$ и два центральных тела, массой $30 M_{\odot}$ каждое).
- Большая полуось 80 а.е. и эксцентриситет 1 (безразмерный угловой момент 0).

- Радиус скопления 10 а.е.
- Расстояние в апоцентре 80 а.е.
- Временной шаг 10^3 секунд.

С.3 ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

Пример 1:

- 22 тела.
- Суммарная масса $220 M_{\odot}$ (20 тел общей массой $20 M_{\odot}$ и два центральных тела, массой $100 M_{\odot}$).
- Большая полуось 5.1 а.е. и эксцентриситет 0.974 (безразмерный угловой момент 0.2265).
- Радиус скопления 1 а.е.
- Расстояние в апоцентре 10 а.е.
- Временной шаг 20 секунд.

Пример 2:

- 102 тела.
- Суммарная масса $400 M_{\odot}$ (100 тел общей массой $200 M_{\odot}$ и два центральных тела, массой $100 M_{\odot}$).
- Большая полуось 50 а.е. и эксцентриситет 0.9976 (безразмерный угловой момент 0.06924)
- Радиус скопления 20 а.е.
- Расстояние в апоцентре 99.88 а.е.
- Временной шаг 1000 секунд.

С.4 АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТЫ ПРИМЕРОВ

Для оценки параметров использовалось значение максимума (расстояние между телами в апоцентре) и минимума (перецентр) расстояния между телами для отрезка времени симуляции, когда эти значения стали изменяться слабо (на последних колебаниях). Данные вычисления можно

произвести следующим образом:

$$\begin{cases} \text{separation}_{\max} = a(1 + e) \\ \text{separation}_{\min} = a(1 - e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \frac{\text{separation}_{\max} - \text{separation}_{\min}}{2a} \\ a = \frac{\text{separation}_{\min} + \text{separation}_{\max}}{2} \end{cases} .$$

Используя формулу для времени слияния приведённую в [7] можно оценить «время жизни» (время до конечного слияния в одно тело) системы с такими орбитальными параметрами:

$$t = Qa^4 j^7, \quad Q = \frac{3c^5}{170}(GM_{BH})^{-3}.$$