

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

На правах рукописи

КРАСНОВ МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**МНОГОМЕРНАЯ $F(R)$ -ГРАВИТАЦИЯ В КАЧЕСТВЕ
ИСТОЧНИКА ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,

д.ф.-м.н.

_____ К. М. Белоцкий

Научный консультант,

к.ф.-м.н.

_____ В. В. Никулин

Москва 2023

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

МНОГОМЕРНАЯ $F(R)$ -ГРАВИТАЦИЯ В КАЧЕСТВЕ
ИСТОЧНИКА ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Студент	_____ М. А. Краснов
Научный руководитель, д.ф.-м.н.	_____ К. М. Белоцкий
Научный консультант, к.ф.-м.н.	_____ В. В. Никулин
Рецензент, д.ф.-м.н.	_____ В. Д. Иващук
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов
Рук. учеб. прог., д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов

Оглавление

Введение	4
1 $f(R)$–гравитация как источник ПЧД	6
1.1 Квадратичная $f(R)$ –гравитация	6
1.2 Эффективное скалярное поле	7
1.3 Доменные стенки	10
1.4 Инфляционная генерация доменных стенок	13
1.5 Образование первичных черных дыр	15
2 Спектр масс ПЧД	18
2.1 Суперкритические доменные стенки	18
2.2 Постинфляционный спектр масс ПЧД	21
3 Эволюция ПЧД после радиационной стадии	26
3.1 Аккреция нерелятивистского вещества	26
3.1.1 Аккреция в рамках Ньютоновской механики	27
3.1.2 Аккреция в метрике МакВитти	28
3.1.3 Аккреция в Эддингтоновском режиме	32
3.2 Современный спектр масс ПЧД и ограничения на него	33
Заключение	39
Список литературы	41
Приложение А Процедура перевода физических величин из картины Эйнштейна в картину Йордана	47
Приложение В Ограничения на параметры модели	49
В.1 Ограничения на энергетический масштаб параметров модели . .	49
В.2 Ограничения на минимальную массу чёрных дыр	50

ВВЕДЕНИЕ

Дополнительные измерения обычно изучаются в рамках физики элементарных частиц [1], например в контексте объединения взаимодействий [2; 3], объяснения природы полей Стандартной Модели [4], поиска их проявлений в ускорительных экспериментах [5; 6]. В данной работе исследуется одно из возможных космологических последствий — показывается, что компактные дополнительные измерения могут быть причиной образования первичных черных дыр после окончания космологической инфляции.

Известно, что одной из центральных задач теорий с компактными дополнительными измерениями является обеспечение их компактификации и стабилизации [7] в процессе космологической эволюции. Это возможно сделать, например, $f(R)$ -модификацией гравитации [8; 9] или введением дополнительных скалярных полей [10]. Последний подход особенно многообещающий, поскольку квадратичная $f(R)$ -гравитация Старобинского [11; 12] даёт наиболее хорошее соответствие наблюдательным ограничениям на параметры космологической инфляции [13]. Кроме того, в многомерной $f(R)$ -гравитации, процессы космологической инфляции и компактификации являются проявлением общей гравитационной динамики в различных подпространствах [14].

Возможности $f(R)$ -гравитации широко изучаются [15; 16], они предлагают решение многих космологических проблем [17–20]. Одна из проблем, которую может решить $f(R)$ -гравитация — существование первичных черных дыр. Сегодня первичное происхождение некоторых открытых черных дыр (квазаров при малых z [21; 22], ЧД промежуточных масс, обнаруженных гравитационно-волновыми обсерваториями [23]) горячо обсуждается [24; 25]. В данной работе демонстрируется, как в моделях $f(R)$ -гравитации, в результате инфляционной динамики, могут возникать первичные черные дыры.

Идея предлагаемого механизма основывается на известной возможности образования доменных стенок в процессе космологической инфляции с последующим коллапсом их в первичные черные дыры [26; 27]. Образование таких

доменных стенок требует наличия скалярного поля с нетривиальным потенциалом, содержащим несколько вакуумов. Именно такое эффективное скалярное поле возникает в многомерных $f(R)$ –моделях в картине Эйнштейна [9; 14; 28]. Это поле управляет размером компактного дополнительного пространства, а различные его вакуумы отвечают разным Вселенным. В работе рассчитываются параметры образуемых полем доменных стенок и мы приходим к заключению, что, появившись на стадии инфляции, во время рехиттинга они будут коллапсировать в первичные чёрные дыры (ПЧД). Для удаленного наблюдателя в картине Йордана появление таких ПЧД интерпретируется как проявление нетривиальной $f(R)$ –гравитационной динамики многомерного пространства. Также вычисляется спектр масс ПЧД и показывается, что он может объяснить значительную часть скрытой массы.

1 $f(R)$ –ГРАВИТАЦИЯ КАК ИСТОЧНИК ПЧД

В данной главе показано, что модели многомерной модифицированной гравитации содержат в себе механизм гравитационной генерации чёрных дыр путём формирования доменных стенок без вовлечения полей материи. Итогом данной главы является разработка нового механизма генерации чёрных дыр.

1.1 КВАДРАТИЧНАЯ $f(R)$ –ГРАВИТАЦИЯ

Рассмотрим теорию модифицированной гравитации — $f(R)$, включающую квадратичные поправки (в том числе тензорные) к скаляру Риччи и содержащую $D = 4 + n$ измерений. Она описывается действием¹

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{m_D^{D-2}}{2} \int d^{4+n}x \sqrt{|g_D|} [f(R) + c_1 R_{AB} R^{AB} + c_2 R_{ABCD} R^{ABCD}] ,$$

$$f(R) = a_2 R^2 + R - 2\Lambda_D , \quad (1.1)$$

где m_D — многомерная масса Планка, далее мы будем везде работать в единицах $m_D \equiv 1$. При этом многомерное пространство представим как прямое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{M}_4 \times \mathbb{M}_n$, где \mathbb{M}_4 — четырехмерное пространство, \mathbb{M}_n — компактное дополнительное пространство с n измерениями:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{2\beta(t)} d\Omega_n^2 , \quad (1.2)$$

где в $g_{\mu\nu}$ — 4-мерная метрика \mathbb{M}_4 , β — функция размера, а $d\Omega_n^2$ — объем максимально симметричного компактного доп. пространства с положительной кривизной \mathbb{M}_n .

Различные варианты космологических сценариев, возникающих в данной теории модифицированной гравитации рассмотрены в работах [14; 28; 29]. Все они в итоге сводятся к получению некоторой эффективной теории поля, ко-

¹В этой работе мы используем следующие соглашения для тензора кривизны Римана $R_{\mu\nu\alpha}^\beta = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta + \Gamma_{\sigma\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma$, а тензор Риччи определен следующим образом: $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$

тору видит 4-мерный наблюдатель. Её свойства определяются параметрами лагранжиана (1.1). Процедура получения такой теории описана в [9].

Следуя этой процедуре, мы предполагаем максимальную симметричность дополнительного пространства \mathbb{M}_n , что приводит к скаляру Риччи дополнительного пространства $R_n = n(n-1)/e^{2\beta}$, где $e^\beta \equiv \rho$ — его радиус. Кроме того, приближение данной эффективной теории работает в области, где дополнительное пространство мало по сравнению с 4-мерным и медленно меняется:

$$R = R_4 + R_n + P_k, \quad P_k = 2n \partial^2 \beta + n(n+1)(\partial\beta)^2, \\ R_4, P_k \ll R_n. \quad (1.3)$$

где R_4, R_n — скаляры Риччи для $\mathbb{M}_4, \mathbb{M}_n$. Далее, при переходе к 4-мерию в (1.1), возникнет неминимальная связь между наблюдаемой 4-мерной гравитацией R_4 и 4-мерной метрикой [9], поэтому полученная теория будет записана в картине Йордана — будем использовать эту картину в качестве наблюдаемой [30] (в конце мы приведем все результаты к ней).

1.2 ЭФФЕКТИВНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Минимальная связь между наблюдаемой 4-мерной гравитацией и 4-мерной метрикой достигается переходом к картине Эйнштейна, поэтому все вычисления будем проводить в ней. Тогда теория (1.1) сведется к эффективному лагранжиану, определяющему наблюдаемую 4-мерную физику при низких энергиях [14]:

$$S = \frac{m_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} \operatorname{sign}(f') [R_4 + K(\phi)(\partial\phi)^2 - 2V(\phi)], \quad (1.4)$$

где эффективная масса Планка в картине Эйнштейна: $m_4 = \sqrt{2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})}$, а $g_4^{\mu\nu}$ — наблюдаемая 4-мерная метрика. При этом появившееся скалярное поле имеет смысл скаляра Риччи под пространства $\phi \equiv R_n$ для исходной теории (1.1).

Из (1.3) следует, что переход к эффективной теории справедлив только для значений поля $\phi \gg \phi_0 \sim R_4$, далее мы обсудим, какие параметры исходного лагранжиана (1.1) для этого требуются. Действие (1.4) содержит потенциал и

нетривиальный кинетический член, которые выражаются через исходные параметры лагранжиана (1.1) (см. [14]):

$$K(\phi) = \frac{1}{4\phi^2} \left[6\phi^2 \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - 2n\phi \left(\frac{f''}{f'} \right) + \frac{n(n+2)}{2} \right] + \frac{c_1 + c_2}{f'\phi}, \quad (1.5)$$

$$V(\phi) = -\frac{\text{sign}(f')}{2(f')^2} \left[\frac{|\phi|}{n(n-1)} \right]^{n/2} \left[f(\phi) + \frac{c_1 + 2c_2/(n-1)}{n} \phi^2 \right]. \quad (1.6)$$

Для целей данной работы рассмотрим случай 6-мерного дополнительного пространства $n = 6$ и выберем параметры $c_1 = -8000$, $c_2 = -5000$, $a_2 = -500$. При этих параметрах потенциальный член имеет два минимума, отвечающих различным вакуумам Вселенной. Значение потенциала в этих минимумах должно быть равно нулю для зануления 4-мерной космологической постоянной, что приводит к тонкой настройке параметра $\Lambda = -1/8(a + c_v/n) = 3/52000$, где $c_v = c_1 + 2c_2/(n-1)$, что составляет известную проблему [9]. В следующих разделах мы обсудим справедливость такого выбора параметров. Следует отметить, что известные ограничения на размеры дополнительных измерений (например, [31]) также накладывают ограничения на параметры лагранжиана (1.1), допустимый энергетический масштаб параметров получен в приложении В.

Скатывание поля $\phi \equiv R_n$ в правый минимум потенциала (1.6) соответствует стабилизации компактного дополнительного пространства $R_n \neq 0$ (доп. пространство компактифицировано и имеет некоторый радиус ρ_0), и приводит к наблюдаемой космологии [14]. Наличие левого минимума $R_n \approx 0$ говорит о возможности реализации другого сценария (он исследуется в работе [29]), в котором дополнительное пространство нестабильно и расширяется вместе с основным до макроскопических размеров.

Нетривиальный кинетический множитель (1.5) существенно модифицирует характер эволюции поля $\phi(t)$ по сравнению со стандартной скалярно-полевой теорией, обеспечивая возрастающее торможение при скатывании в левый минимум (1.6). Можно упростить лагранжиан, сделав замену

$$\psi = m_4 \int_{\phi_0}^{\phi} \sqrt{K(\phi')} d\phi', \quad V(\psi) = m_4^2 V(\phi(\psi)), \quad (1.7)$$

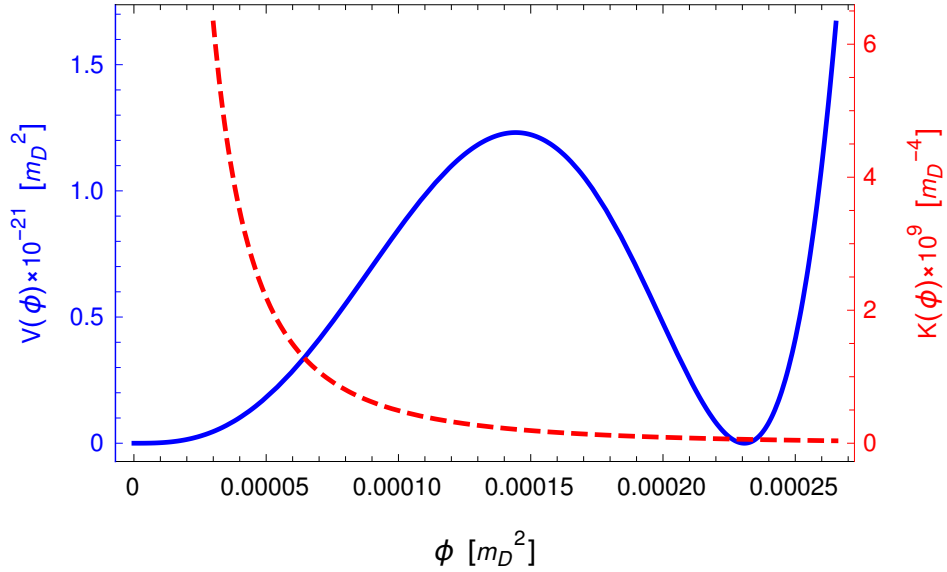


Рисунок 1.1 — Графики потенциального члена и кинетического множителя (1.5), (1.6) для выбранных параметров: $n = 6$, $c_1 = -8000$, $c_2 = -5000$, $a_2 = -500$. Левый минимум потенциала находится в точке $\phi = 0$, однако скапывание к нему за конечное время невозможно из-за возрастающего тормозного действия кинетического множителя, правый минимум находится в точке $\phi_{min} = 3/13000$.

в таком случае $d\phi/d\psi = 1/m_4\sqrt{K(\phi)}$ и лагранжиан приводится к стандартной форме:

$$S = \frac{m_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} R_4 + \int d^4x \sqrt{-g_4} \left[\frac{1}{2} (\partial\psi)^2 - V(\psi) \right], \quad (1.8)$$

где при $m_4^2 = 16\pi^3/15$ при выбранном $n = 6$. Условием для работы замены (1.7) является положительность $K(\phi)$ на исследуемом промежутке $\phi_0 < \phi < \phi_{min}$. В таком случае $\psi(\phi)$ монотонна и обратима (что требуется для нахождения потенциала в выражении (1.8)).

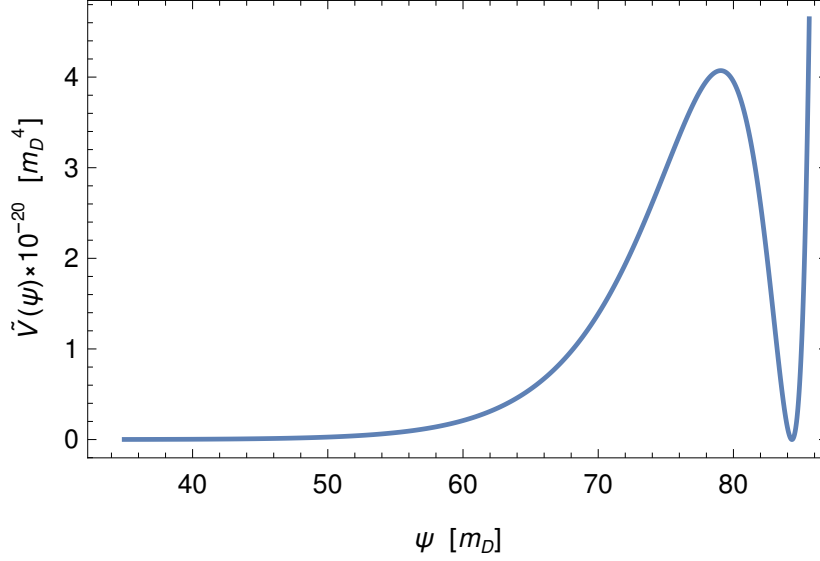


Рисунок 1.2 — График потенциального члена $V(\psi)$ для эффективной 4-мерной теории (1.8). Правый минимум находится в точке $\psi_{min} = 84.3$. При этом, строго говоря, левый минимум находится в точке $\psi = -\infty$, однако для наших целей достаточно очень точного приближения $\psi = 0$ (соответствующего $\phi = \phi_0$), до которого всё ещё работает эффективная теория (1.4). Максимальное значение потенциала в области перехода между вакуумами $V_{max} \approx 4.07 \cdot 10^{-20}$

1.3 ДОМЕННЫЕ СТЕНКИ

Хорошо известно, что потенциалы наподобие (1.2), содержащие несколько минимумов (вакуумов), могут приводить к формированию нетривиальных полевых конфигураций [32] — «пузырей» одного вакуума внутри другого, окруженных доменной стенкой.

Исследуем такую конфигурацию, получив полевое уравнение для ψ из эффективного действия (1.8). Для простоты считаем её сферически симметричной и статической, что дает уравнение:

$$\psi_{uu} + \frac{2\psi_u}{u} - V'(\psi) = 0, \quad (1.9)$$

которое при рассмотрении достаточно большого «пузыря» (так, чтобы его радиус был много больше характерной толщины доменной стенки $\psi_{uu} \gg 2\psi_u/u$)

можно легко свести к уравнению первого порядка:

$$\partial_u \psi = \pm \sqrt{2V(\psi)}. \quad (1.10)$$

Характерное решение уравнения (1.10), соединяющее левый вакуум потенциала $V(\psi)$ с правым (Рис. 1.2), показано на Рис. 1.3 (синяя линия).

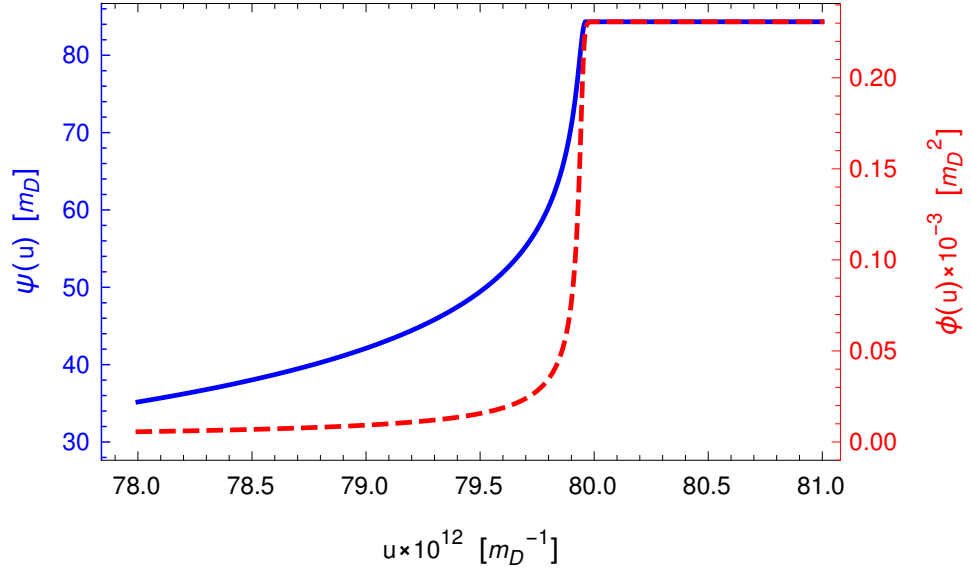


Рисунок 1.3 — Численное решение (1.9) при граничных условиях: $\psi(0) = 0$ — левый минимум $V(\psi)$ достигается внутри пузыря, $\psi(u \rightarrow \infty) = \psi_{min}$ — правый минимум $V(\psi)$ достигается для удаленного наблюдателя $u \rightarrow \infty$ (и формирует нашу Вселенную). На графиках: синяя линия — непосредственное решение $\psi(u)$; красная линия — соответствующая ему функция $\phi(u)$. В данном примере радиус «пузыря» $u_0 \approx 79.9 \cdot 10^{12}$.

Плотность энергии доменной стенки ε_ψ мы можем вычислить как компоненту T^{00} тензора энергии-импульса для лагранжиана скалярного поля ψ :

$$\varepsilon_\psi(u) = T^{00}(u) = \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial^0 \psi - \mathcal{L}_\psi g^{00} = \frac{1}{2} (\partial_u \psi)^2 + V(\psi) = 2V(\psi(u)). \quad (1.11)$$

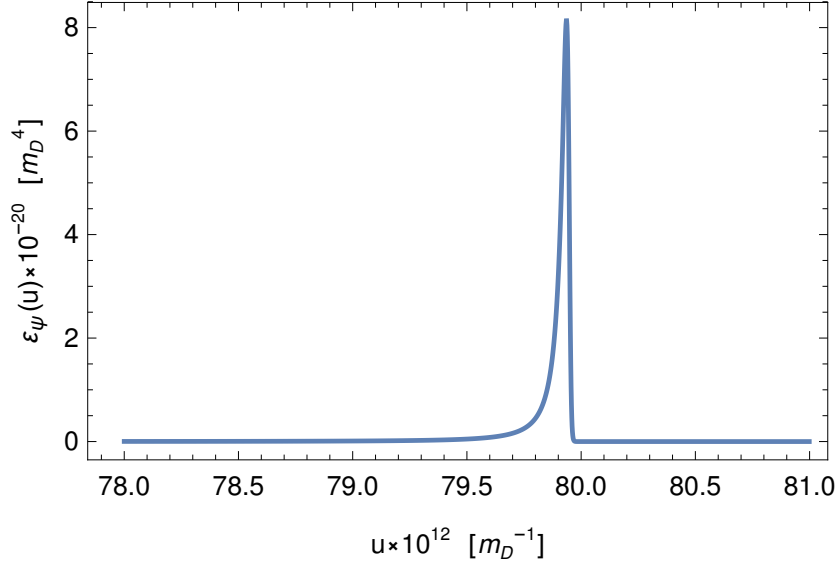


Рисунок 1.4 — Плотность энергии (1.11) для решения, представленного на Рис. 1.3. Толщина доменной стенки $\delta \sim 10^{11}$.

Интегрирование по радиальной координате (1.11) для полученного численного решения (Рис. 1.3) дает поверхностную плотность энергии доменной стенки в многомерных планковских единицах:

$$\sigma = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\psi}(u) du = \int_0^{\psi_{min}} \frac{2V(\psi)}{\psi_u} d\psi = \int_0^{\psi_{min}} \sqrt{2V(\psi)} d\psi = 5 \cdot 10^{-9} \quad (1.12)$$

Мы также можем оценить характерную толщину стенки δ , зная поверхностную плотность энергии:

$$\sigma = \int_0^{\infty} 2V(\psi) du \approx 2 \frac{V_{max}}{2} \delta \quad \Rightarrow \quad \delta \approx \frac{\sigma}{V_{max}} \approx 1.2 \cdot 10^{11}. \quad (1.13)$$

Доменные стенки, рассмотренные в данной работе, являются очень массивными, в результате чего они будут являться источником первичных черных дыр. Механизм образования и коллапса таких структур хорошо изучен в работах [26; 27] и приводит к возникновению первичных черных дыр широкого спектра масс в ранней Вселенной, что позволяет решить некоторые проблемы современной космологии.

1.4 ИНФЛЯЦИОННАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ДОМЕННЫХ СТЕНОК

Как было указано выше, скатывание поля ψ в правый минимум Рис. 1.2, создает наблюдаемую Вселенную. Для её образования требуется механизм космологической инфляции. В работе [14], показано, что само поле ψ может выступать в качестве инфлатона, удовлетворяя всем наблюдаемым ограничениям на него и делая механизм образования Вселенной чисто гравитационным (1.1) (без привлечения дополнительных полей материи). Дабы не усложнять наше рассмотрение, мы, тем не менее, будем считать космологическую инфляцию внешним процессом с характерным параметром Хаббла H_{inf} .

Механизм инфляционного производства вышеописанных «пузырей» альтернативного вакуума, хорошо известен [26]. В результате многократных квантовых флуктуаций, поле ψ может быть перекинуто из области скатывания в правый минимум в область скатывания в левый минимум, в некотором регионе инфляционной Вселенной. Этот регион продолжает расти во время инфляции, пока поле ψ «заморожено» и его конечный размер определяется временем возникновения. После окончания инфляции и «разморозки» поля, в этом регионе Вселенной должен возникнуть пространственный «пузырь» (Рис. 1.3), окруженный эффективной доменной стенкой (в рассматриваемой модели (1.1) он на самом деле он является чисто гравитационным топологическим дефектом).

Несколько ограничений должны быть наложены на рабочую модель производства доменных стенок в рассмотренной $f(R)$ –гравитации:

- Во время космологической инфляции 4-мерное пространство $g_{\mu\nu}$ описывается метрикой де Ситтера с кривизной $R_4 = 12H_{\text{inf}}^2$, где H_{inf} — параметр Хаббла. Поэтому приближение (1.3) применимо только для значений поля $\phi \gg 12H_{\text{inf}}^2$.
- Для генерации стенок посредством квантовых флуктуаций поля ψ (вблизи максимума потенциала 1.2) требуется его медленное скатывание: $m_\psi = \sqrt{V''(\psi_{\text{vac}})} \ll H_{\text{inf}}$.
- Доменные стенки не должны быть слишком плотными, чтобы не доминировать над инфлатоном: $\varepsilon_\psi \ll \varepsilon_{\text{inf}} \sim H_{\text{inf}}^2 m_4^2$.
- Флуктуации поля ψ во время инфляции должны быть малыми, чтобы не

допустить перепроизводства доменных стенок: $\delta\psi = \frac{H_{\text{inf}}}{2\pi} \ll \psi$.

При выбранных нами ранее параметрах $a_2 = -500$, $c_1 = -8000$, $c_2 = -5000$ лагранжиана (1.1), все вышеуказанные ограничения выполняются для космологической инфляции с характерным масштабом $H_{\text{inf}} \gg 10^{-11}$:

$$\begin{aligned}\phi &\sim 10^{-6} - 10^{-4} \gg 12H_{\text{inf}}^2 \sim 10^{-19}, \\ m_\psi &\sim 10^{-11} \ll H_{\text{inf}} \sim 10^{-10}, \\ \varepsilon_\psi &\sim 10^{-20} \ll \varepsilon_{\text{inf}} \sim 10^{-19}, \\ \delta\psi &\sim 10^{-11} \ll \psi \sim 1.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Все оценки приведены для картины Эйнштейна при $n = 6$, для которой $m_4 = 5.75$, при этом там, где размерность не указана явно, все расчеты ведутся в системе $m_D \equiv 1$. Параметры a_2, c_1, c_2 лагранжиана (1.1) имеют размерность $[m_D^{-2}]$, космологическая постоянная Λ имеет размерность $[m_D^2]$.

В предыдущих секциях все расчеты были выполнены в картине Эйнштейна. В качестве физически наблюдаемой картины часто принято брать картину Йордана, в которой возможно управлять 4-мерным планковским масштабом $M_4 = \Omega(\phi_{\text{min}})m_4$, регулируя размер доп. пространства. Космологическая инфляция должна описываться в физически наблюдаемой картине — то есть в картине Йордана (обозначим её индексом J):

$$S_{\text{inf}}^J = \int d^4x \sqrt{-g_4^J} \left[\frac{1}{2} (\partial\chi^J)^2 - U^J(\chi^J) \right],\tag{1.15}$$

где χ — инфлатон, потенциал которого определяет параметр Хаббла во время инфляции $H_{\text{inf}} \sim \sqrt{GU(\chi)}$. Условия (1.14) были проверены для инфляции в картине Эйнштейна (обозначим её индексом E). Переход к ней из (1.15) известен [14; 33]:

$$g_{\mu\nu}^J = \Omega^{-2} g_{\mu\nu}^E, \quad \text{где} \quad \Omega^2 = e^{n\beta(\phi)} |f'(\phi)|.\tag{1.16}$$

Подставляя (1.16) в (1.15), получим действие, записанное в картине Эйн-

штейна:

$$\begin{aligned} S_{\text{inf}}^J &= \int d^4x \sqrt{-g_4^E} \left[\frac{1}{2} \Omega^{-2} (\partial\chi^J)^2 - \Omega^{-4} U^J (\chi^J) \right] \approx \\ &\approx \int d^4x \sqrt{-g_4^E} \left[\frac{1}{2} (\partial\chi^E)^2 - U^E (\chi^E) \right] = S_{\text{inf}}^E, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где сделаны преобразования инфлатона $\chi^E = \Omega^{-1}\chi^J$ и его потенциала $U^E = \Omega^{-4}U^J$ к картине Эйнштейна. Здесь использован тот факт, что во время инфляции поле ϕ практически заморожено (1.14) и находится в области максимума потенциала, поэтому коэффициент $\Omega(\phi)$ можно считать постоянным и равным, $\Omega \approx \Omega(\phi_{\text{max}}) \sim \Omega(\phi_{\text{min}}) \sim 10^8$ для выбранных параметров.

Параметр Хаббла для инфлатона χ^E , наблюдаемого в картине в картине Эйнштейна, связан с параметром Хаббла для инфлатона χ^J , наблюдаемого в картине в картине Йордана следующим образом:

$$H_{\text{inf}}^E \sim \sqrt{G^E U^E(\chi)} = \sqrt{G^J \Omega^{-4} U^J(\chi)} \sim \Omega^{-1} H_{\text{inf}}^J. \quad (1.18)$$

Из этого, в соответствии с результатом, полученным выше (1.14) для картины Эйнштейна, следует, что $H_{\text{inf}}^J > 10^{-3} \sim 10^{-11} [M_4] \sim 10^7 [\text{GeV}]$ при выбранных параметрах, что согласуется с наблюдательными данными [13].

Грубо оценим, как выбор параметров исходной модели влияет на нижнюю границу параметра Хаббла H_{inf}^J , при котором работает вышеописанный механизм появления доменных стенок. В силу размерности, параметры $a, c_1, c_2 \sim \lambda^{-2}$, где λ — некоторый энергетический масштаб. Из (1.14) видно, что самое сильное ограничение на H_{inf}^E даёт масса поля $H_{\text{inf}}^E \gg m_\psi = \sqrt{V_{\psi\psi}(\psi_{\text{vac}})} = \sqrt{V_{\phi\phi}(\phi_{\text{vac}})/K(\phi_{\text{vac}})}$. Учитывая зависимость (1.5), (1.6) от параметров модели, получим $m_\psi \propto m_D^{-n/2} \lambda^{n/2+1}$, а для $\Omega \propto m_D^{n/2} \lambda^{-n/2}$. Тогда нижняя граница параметра Хаббла (при $n = 6$, в нашем случае) $H_{\text{inf}}^J = \Omega H_{\text{inf}}^E \propto m_D^3 \lambda^{-2} \propto \lambda [M_4]$, где последний результат приведён к единицам $M_4 = \Omega m_4$.

1.5 ОБРАЗОВАНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Во время инфляционной стадии классическое движение скалярного поля ψ заморожено — это определяется неравенством 2 в (1.14). Если в процессе квантовых флуктуаций возникает заготовка для будущей доменной стенки (по-

ле перепрыгивает на левый склон потенциала на Рис. 1.2), то в этом месте значения поля ψ должны лежать вблизи максимума потенциала, так как флуктуации малы (неравенство 4 в (1.14)). По окончании инфляции плотность энергии инфлатона падает (а, следовательно, и параметр Хаббла) — поле ψ размораживается и начинает быстро скатываться с максимума в минимумы потенциала (в левый минимум, для внутренней области и в правый для внешней). В процессе этого скатывания плотность энергии в области перехода постепенно растет $\sigma(t)$ до величины σ , вычисленной в предыдущих разделах. Кроме того, из-за постинфляционного расширения радиус области также растет $u_w(t) = u_0 a(t)$, где u_0 — радиус на конец инфляции, $a(t)$ — масштабный фактор. Из-за этого увеличивается масса образующейся доменной стенки $m_w(t) = 4\pi u_w(t)^2 \sigma(t)$ — растет её гравитационный радиус $u_g(t) = 2Gm_w(t)$. В определенный момент времени гравитационный радиус охватит всю доменную стенку $u_g(t_*) = u_w(t_*)$ и для внешнего наблюдателя образуется первичная черная дыра с массой $m_w(t_*)$.

Момент t_* охвата стенки гравитационным радиусом в нашей модели наступит задолго до достижения ею в результате скатывания окончательной плотности энергии σ . Это видно из отношения гравитационного радиуса к размеру стенки, если принять, что стенка имеет окончательную плотность энергии σ :

$$\frac{u_g}{u_w} = 8\pi G\sigma u_w > m_4^{-2} \sigma \delta \approx 16, \quad (1.19)$$

где использован тот факт, что радиус стенки всегда больше её толщины $u_w(t) > u_0 > \delta$. Отношение (1.19) остается много большим единицы при любых параметрах модели (1.1), удовлетворяющих ограничениям (1.14).

Чёрная дыра формируется, когда радиус стенки пересекает Хаббловский горизонт. Тогда масса чёрной дыры может быть оценена как

$$M_{PBH} \simeq m_w(t_*) \simeq u_g(t_*)/2G \simeq u_w(t_*)/2G \equiv u_0 a(t_*)/2G. \quad (1.20)$$

Вычисление изначального спектра масс $N(M)$ описанных выше ПЧД сводится к вычислению спектра размеров генерируемых на инфляционной стадии флуктуаций поля ψ . Способ получения этого спектра $N(r)$ известен и получен в таких работах как [27; 34; 35]. В них исследовалась зависимость данного спектра от параметров инфляции и начального значения поля ψ_0 , с которым появляется современный горизонт. В этих работах было показано, что ширина

спектра, характерные массы и общее число ПЧД сильно зависят от выбора ψ_0 . Однако условие (1.19) модифицирует этот процесс, что будет описано далее.

2 СПЕКТР МАСС ПЧД

В данной главе описаны свойства доменных стенок, генерируемых в данной модели (1.1). Суперкритичность стенок приводит к модификации спектра масс, по отношению к случаю субкритических стенок.

В главе также получен спектр масс ПЧД, возникающих в результате коллапса доменных стенок к концу стадии радиационного доминирования (RD) с учётом аккреции на ней.

2.1 СУПЕРКРИТИЧЕСКИЕ ДОМЕННЫЕ СТЕНКИ

Судьба доменной стенки, образованной в результате квантовых флуктуаций на стадии космологической инфляции, зависит от её поверхностной плотности энергии σ . Существует характерный временной масштаб, на котором гравитационное поле стенки начинает доминировать во Вселенной — t_σ , который даётся выражением:

$$t_\sigma = \frac{1}{2\pi G\sigma}. \quad (2.1)$$

Образующиеся в результате инфляционной динамики доменные стенки изначально превосходят по своим размерам Хаббловский радиус. Изначальный радиус стенки лежит в следующем интервале:

$$H_{\text{inf}}^{-1} \lesssim u_0 \lesssim H_{\text{inf}}^{-1} \cdot e^{N_{\text{inf}}}, \quad (2.2)$$

где N_{inf} — число e -фолдов космологической инфляции. Изначально доменная стенка находится в покое с Хаббловским расширением, то есть её радиус растёт как масштабный фактор до того, как она пересечёт Хаббловский горизонт. Время пересечения доменной стенкой космологического горизонта определяется, разумеется, параметром уравнения состояния ω стадии космологической эволюции, на которой стенка образовалась.

Для стадии доминирования излучения этот момент $t_H = H_{\text{inf}} u_0^2/4$, а для стадии доминирования нерелятивистского вещества $t_H = 8H_{\text{inf}}^2 u_0^3/27$.

Соотношение между t_σ и t_H среди параметров доменной стенки определяется поверхностной плотностью энергии стенки. Возможно два случая:

- Субкритические стенки с $t_\sigma > t_H$.

В этом случае гравитацией стенки можно пренебречь. Стенка заходит под горизонт и затем под действием поверхностного натяжения становится сферически симметричной и начинает сжиматься. Условием образования чёрной дыры в данном случае является $r_g > \delta$, то есть радиус Шварцшильда для данной массы доменной стенки должен быть больше, чем толщина стенки. Такие стенки рассмотрены, например, в [26; 27; 36].

- Суперкритические стенки с $t_\sigma < t_H$.

В данном случае гравитация доменной стенки становится локально доминирующей до того, как стенка могла бы пересечь космологический горизонт. В пионерских работах по исследованию гравитационного поля доменных стенок [37; 38] утверждается, что в данном случае доменная стенка начинает доминировать во Вселенной и соответственно масштабный фактор в такой Вселенной начинает вести как $a(t) \propto t^2$. Соответственно, при таком рассмотрении возникают ограничения на поверхностную плотность энергии стенки. Современный возраст Вселенной t_0 даёт ограничение $t_\sigma \gtrsim t_0$ на поверхностную плотность энергии $\sigma \lesssim 1/Gt_0 \sim (100 \text{ MeV})^3$, однако более сильное ограничение следует из анизотропии реликтового фона — $\sigma \lesssim (1 \text{ MeV})^3$ [39].

Можно переформулировать соотношение t_σ и t_H — вместо соотношения времён можно перейти к соотношениям масс, где масса, соответствующая t_σ :

$$M_{cr} = \frac{t_\sigma}{2G}, \quad (2.3)$$

а t_H соответствует

$$M_{bh} = \frac{t_H}{2G}. \quad (2.4)$$

Соотношение между начальной массой чёрной дыры и массой, данной выражением (2.3) определяет «критичность» стенки. Это значит, что если масса образующейся чёрной дыры больше некоторого порога, то доменная стенка яв-

ляется суперкритической:

$$M_{bh} > M_{cr} \quad (2.5)$$

Рассмотрим выражение (2.5). Размер чёрной дыры не может быть меньше характерной толщины стенки, ведь такие стенки просто не образуются, тогда имеем:

$$M_{bh} \gtrsim M_{min} \approx \frac{\delta}{2G}. \quad (2.6)$$

Критическую или пороговую массу в соответствии с (2.3) можно выразить через параметр стенки — поверхностную плотность энергии:

$$M_{cr} = \frac{1}{4\pi G^2 \sigma}. \quad (2.7)$$

Если стенка суперкритическая, то масса образующейся чёрной дыры больше пороговой. Предположим, что даже минимальная масса чёрной дыры, соответствующая толщине доменной стенки, всё равно больше чем пороговое критическое значение, тогда получаем, что:

$$\frac{\delta}{2G} > \frac{1}{4\pi G^2 \sigma}. \quad (2.8)$$

После переноса всех множителей в одну сторону, имеем:

$$2\pi G \delta \sigma > 1, \quad (2.9)$$

что совпадает с условием того, что доменные стенки находятся под радиусом Шварцшильда изначально. Таким образом, полученные в представленной выше модели стенки являются суперкритическими. Суперкритическими являются вообще все стенки, возникающие в данной модели.

Динамика суперкритических доменных стенок рассмотрена в таких работах как [40; 41]. Утверждается, что в момент времени t_σ стенка создаёт кротовую нору, через которую она переходит в дочернюю Вселенную. Кротовая нора прекрывается на масштабе времени сопоставимым со временем прохождения света через неё.

Причину, по которой в данном случае не возникает проблемы доменных стенок можно легко понять. Субкритические стенки образуют чёрные дыры

задолго до того, как их вклад в плотность энергии на Хаббловском масштабе станет существенным. После этого они ведут себя как холодная скрытая масса. С другой стороны, для суперкритических стенок их отталкивающее гравитационное поле становится значительным за время t_σ , когда их плотность энергии становится доминирующей на Хаббловском масштабе (во всех причинно связанных областях, в которых находится хотя бы часть стенки). Как только это происходит, доменная стенка образует кротовую нору, с помощью которой проблема доменных стенок «экспортирована» в дочернюю вселенную. На торцах кротовой норы образуются черные дыры, возможно, различных масс, которые и останутся единственным следом от суперкритической доменной стенки.

2.2 ПОСТИНФЛЯЦИОННЫЙ СПЕКТР МАСС ПЧД

Спектр масс ПЧД будет определяться спектром размеров флуктуаций скалярного поля во время процесса космологической инфляции, поскольку, как было показано в (1.20), массы ПЧД определяются размером образующих их скалярно-полевых доменных стенок. Для вычисления этого спектра в разделе использован подход, развитый у Линде [42], в котором квантовые флуктуации скалярного поля в метрике космологической инфляции описываются как случайные блуждания [43]. При этом плотность распределения значений этого поля $f(\psi, t)$ является решением уравнения Фоккера-Планка. Далее мы следуем этому подходу.

Согласно ограничениям на эффективную теорию поля, представленную выше, во время инфляции поле ψ эволюционирует в режиме медленного скатывания, поэтому, пренебрегая формой потенциала, плотность вероятности того, что поле примет значение ψ в момент времени t на стадии космологической инфляции даётся выражением [42; 44–47]:

$$f(\psi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left(-\frac{(\psi - \psi_u)^2}{2\sigma^2(t)}\right), \quad \sigma(t) = \frac{H_{\text{inf}}}{2\pi} \sqrt{H_{\text{inf}} t}. \quad (2.10)$$

В данном выражении ψ_u — начальное значение поля.

Формально выражение (2.10) соответствует случаю $m_\psi = 0$, для случая, когда масса поля сопоставима с параметром Хаббла во время инфляции фор-

мула выглядит иначе [22; 36]:

$$\bar{f}(\psi, t) = \sqrt{\frac{a}{\pi(e^{2\mu t} - 1)}} \exp\left(-\frac{a(\psi - \psi_u e^{\mu t})^2}{e^{2\mu t} - 1}\right), \quad (2.11)$$

$$\sigma = \frac{H_{\text{inf}}}{2\pi} \sqrt{H_{\text{inf}}}, \quad \mu = \frac{m_\psi^2}{3H_{\text{inf}}}, \quad a = \frac{\mu}{\sigma^2}. \quad (2.12)$$

В пределе $m_\psi \rightarrow 0$, формула (2.11) переходит в (2.10).

Количество флуктуаций, приводящих к образованию чёрных дыр очень чувствительно к выбору начальных данных. Вероятность такой флуктуации — это вероятность того, что поле ψ попадёт в альтернативный (левый) вакуум потенциала. Она даётся выражением:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\psi_{cr}} f(\psi, t) d\psi, \quad (2.13)$$

где ψ_{cr} соответствует максимуму потенциала.

Положим $\psi_{cr} = \psi_u - \Delta$, $\Delta > 0$, тогда получим число критических флуктуаций в виде (после некоторых преобразований):

$$n_c(t) = P(t)e^{3H_{\text{inf}}t} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}\sigma(t)}\right) e^{3H_{\text{inf}}t}. \quad (2.14)$$

Единственным наблюдательным следствием коллапса доменных стенок или же перекрытия червоточин является спектр масс образующихся чёрных дыр. В случае существования суперкритических доменных стенок, конечная масса чёрной дыры определяется начальным размером стенки, а именно сопутствующим объёмом, соответствующим радиусу стенки.

При возникновении червоточины, один из её торцов направлен в нашу Вселенную, а другой в дочернюю. Регион нашей Вселенной, в которой образуется чёрная дыра будет в данном случае являться внешним для доменной стенки, так как она перешла в дочернюю Вселенную.

В работах [40; 41] получены начальные и конечные массы с учётом аккреции на релятивистской стадии чёрных дыр, возникающих в случае нахождения во Вселенной суперкритических доменных стенок. Следуя результатам [41], по-

лучаем, что образующиеся на радиационной стадии чёрные дыры, с учётом аккреции на этом этапе, имеют массу:

$$M_{bh} = 5.6t_H/G. \quad (2.15)$$

Согласно [40; 41], масса чёрной дыры за счёт аккреции радиации увеличивается не более, чем в два раза.

Предполагая, что инфлатон практически мгновенно распадается, то есть, считая, что стадия рехитинга, следующая за инфляцией, происходит за время значительно меньшее, чем космологическая инфляция, мы можем положить параметр уравнения состояния вещества во Вселенной $\omega = 1/3$ во время растяжения стенки. Выражение для радиуса сопутствующего объёма в момент пересечения им горизонта на стадии доминирования излучения [27] (для стенки, образовавшейся в момент t во время инфляции):

$$r(t) = \frac{e^{2(N_{\text{inf}} - H_{\text{inf}}t)}}{2H_{\text{inf}}N_{\text{inf}}}. \quad (2.16)$$

По определению, этот радиус равен Хаббловскому на момент t_H . Хаббловский радиус на RD стадии со временем меняется следующим образом:

$$r_H = 2t_H. \quad (2.17)$$

Момент времени t_H связан с конечной массой чёрной дыры (с учётом аккреции) на RD стадии только через гравитационную постоянную и численный коэффициент (2.15):

$$t_H = \frac{GM_{bh}}{5.6} \rightarrow r_H = \frac{GM_{bh}}{2.8}. \quad (2.18)$$

Из (2.16) выразим время и подставим (2.18):

$$t = \frac{N_{\text{inf}}}{H_{\text{inf}}} - \frac{\ln(\sqrt{2N_{\text{inf}}H_{\text{inf}}r_H})}{H_{\text{inf}}} = \frac{N_{\text{inf}}}{H_{\text{inf}}} - \frac{\ln(\sqrt{N_{\text{inf}}H_{\text{inf}}GM_{bh}/1.4})}{H_{\text{inf}}}. \quad (2.19)$$

Теперь получаем спектр масс ПЧД подстановкой (2.19) в (2.14):

$$n_c(M_{bh}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{2\pi}\Delta}{H_{\text{inf}} \sqrt{N_{\text{inf}} - \ln(\sqrt{N_{\text{inf}} H_{\text{inf}} G M_{bh}/1.4})}} \right) \frac{1.4^{3/2} e^{3N_{\text{inf}}}}{(N_{\text{inf}} G H_{\text{inf}} M_{bh})^{3/2}}. \quad (2.20)$$

Заметим, что выражение (2.20) не содержит в себе явно параметры исходной модели многомерной модифицированной гравитации — ни одна величина, входящая в выражение спектра масс не зависит от параметров модели (1.1).

От параметров модели (1.1) зависит нижняя (левая) граница спектра, то есть минимальная масса чёрных дыр, которая дана выражением (2.6), потому как определяется толщиной доменных стенок. Зависимость толщины стенок от параметров модели обсуждается в приложении В.

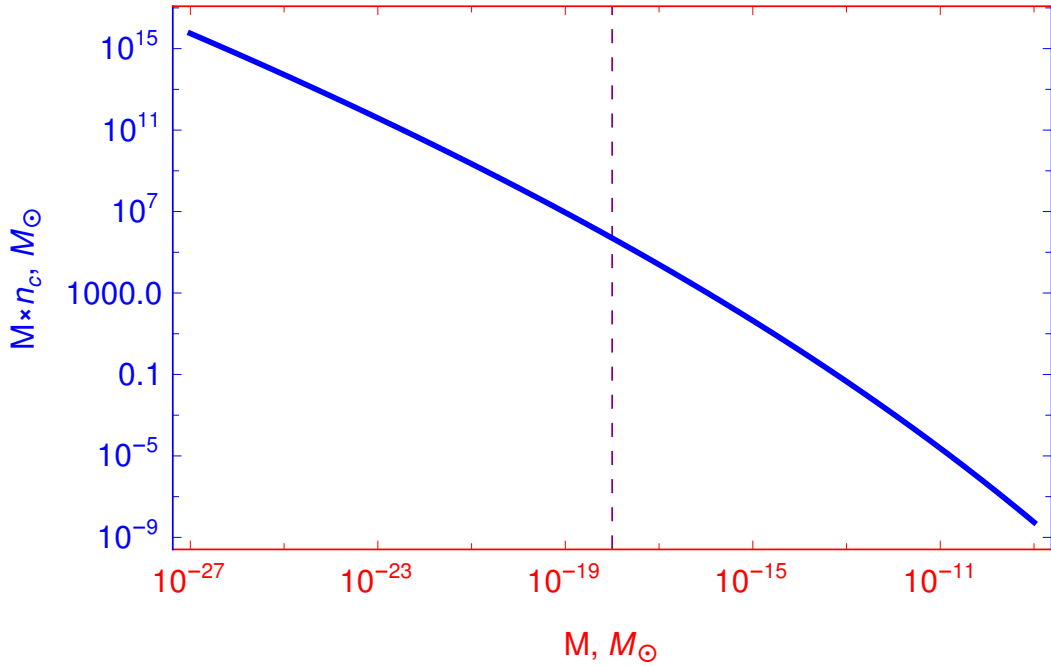


Рисунок 2.1 — Пример интегрального спектра масс по формуле (2.20) на конец RD стадии без учёта испарения чёрных дыр. Сдвиг начального значения поля относительно положения максимума потенциала $\Delta = 9\sigma(t_{\text{inf}})$, выбор начального значения поля будет обсуждаться далее. Нижняя (левая) граница спектра определяется толщиной доменной стенки: $M_{\text{min}} = \delta/2G \sim 10^{-27} M_{\odot}$. Пунктирная линия показывает массу чёрных дыр, для которой время испарения равно возрасту Вселенной.

Число чёрных дыр, которое даётся выражением (2.20) следует восприни-

мать как число чёрных дыр в пределах одного порядка по массе.

Выражение (2.20) даёт спектр масс чёрных дыр (с учётом аккреции на RD стадии), возникших путём динамики суперкритических доменных стенок на RD стадии. Нижняя граница спектра определяется толщиной доменной стенки δ , а верхняя граница определяется выбором начального сдвига поля относительно максимума. Следует отметить, что полученный спектр, разумеется, не должен противоречить известным на сегодняшний день ограничениям [24].

Так же следует обратить внимание, что выражение (2.20) даёт интегрально распределение чёрных дыр по массе, то есть количество чёрных дыр с массой больше M_{bh} . Дифференциальное распределение dn_c/dM_{bh} получается путём дифференцирования по массе.

3 ЭВОЛЮЦИЯ ПЧД ПОСЛЕ РАДИАЦИОННОЙ СТАДИИ

В данной главе рассмотрена аккреция на стадии доминирования нерелятивистского вещества (MD) и получены оценки изменения массы чёрной дыры на этой стадии. С использованием этих оценок были определены:

- Спектр масс ПЧД, возникающих в развиваемом механизме, для современной Вселенной, с учётом эффекта испарения чёрных дыр.
- Спектр масс на красном смещении $z = 6$ с аккрецией в Эддингтоновском режиме для сравнения получаемых масс чёрных дыр с наблюдаемыми на данном красном смещении квазарами.

Завершает главу проверка соответствия конечного спектра масс ПЧД известным космологическим ограничениям на чёрные дыры.

3.1 АККРЕЦИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ВЕЩЕСТВА

Аккреция — это процесс захвата аккретором вещества вокруг неё, в результате чего увеличивается его масса, а также, возможно, угловой момент и заряд [48]. Существует множество подходов к оценке аккреции вещества. Наиболее частым предположением при рассмотрении аккреции является сферическая симметрия аккретора.

В работах [40; 41] получены массы чёрных дыр с учётом аккреции на RD стадии, однако современную Вселенную и раннюю, где доминировало излучение, разделяет этап доминирования нерелятивистского вещества. В данной работе для оценки аккреции на стадии доминирования нерелятивистского вещества использованы две модели:

- Подход к оценке аккреции вещества в рамках Ньютоновской механики, дающий предельную оценку изменения массы аккретора.
- Подход в рамках общей теории относительности (ОТО) с использованием

метрики МакВитти, дающий консервативную оценку аккреции вещества. Полученные оценки следует воспринимать как минимальный рост массы чёрных дыр, чем, например в [49], где масса рассматриваемых чёрных дыр увеличивается в $\sim 10^7$ раз.

3.1.1 АККРЕЦИЯ В РАМКАХ НЬУТОНОВСКОЙ МЕХАНИКИ

В работе [50] рассматривается аккреция скрытой массы на чёрную дыру, а именно аккреция вещества из гало скрытой массы, окружающего чёрную дыру. Авторы рассматривают движение ячейки скрытой массы в поле чёрной дыры.

На стадии доминирования нерелятивистского вещества с учётом космологической постоянной имеем усреднённое уравнение движения для ячейки скрытой массы:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_i}{r^2} + \frac{\Lambda r}{3}, \quad (3.1)$$

где M_i — масса внутри начального радиуса r_i — расстояние, на котором находится ячейка скрытой массы от чёрной дыры.

$$M_i = \frac{4}{3}\pi\rho_{m,i}r_i^3 + M_{bh}. \quad (3.2)$$

В последнем выражении $\rho_{m,i}$, соответственно, является начальной плотностью материи.

После множества преобразований, авторы получают оценку для прироста массы:

$$\frac{m_\lambda}{M_{bh}} = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - \Omega_{\Lambda,i}}{\Omega_{\Lambda,i}} \right)^{1/3}. \quad (3.3)$$

Если аккреция начинается примерно на переходе с доминирования излучения на доминирование нерелятивистского вещества, то, согласно (3.3), масса чёрной дыры может увеличиться примерно в 1500 раз. Это возможно только если гало скрытой массы и чёрная дыра полностью изолированы от любых других объектов во Вселенной, в особенности, от других чёрных дыр.

3.1.2 АККРЕЦИЯ В МЕТРИКЕ МАКВИТТИ

Известно, что флуктуации плотности на стадии доминирования нерелятивистского вещества растут как масштабный фактор. Чёрные дыры можно рассматривать как флуктуации плотности, соответственно, можно ожидать их рост как масштабный фактор. В связи с этим интересно рассмотреть модель аккреции в метрике МакВитти, которая для стадии доминирования нерелятивистского вещества даёт рост массы чёрной дыры как масштабный фактор.

В работах [51; 52] рассмотрены точные решения задачи аккреции. В частности, решение с метрикой МакВитти и тензором энергии-импульса (ТЭИ) неидеальной жидкости с радиальным потоком. В данной модели можно вычислить во сколько раз изменится масса ПЧД, масса ПЧД растет вместе со Вселенной, в зависимости от параметра состояния ω .

В [51] рассматривают метрику

$$ds^2 = -\frac{B^2}{A^2} dt^2 + a^2(t) A^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2), \quad (3.4)$$

где $A = 1 + \frac{Gm(t)}{2\bar{r}}$, $B = 1 - \frac{Gm(t)}{2\bar{r}}$. Эта метрика асимптотически фридмановская, а при «остановке» расширения Вселенной переходит в метрику Шварцшильда с помощью замены радиальной координаты. Очевидно, она описывает сильногравитирующий объект. В данном пространстве-времени физически релевантной [53–55] массой будет являться квази-локальная масса $m_H(t) = m(t)a(t)$, а $m(t)$ является лишь коэффициентом метрики.

ТЭИ вещества вокруг черной дыры:

$$T_{ab} = (p + \rho)u_a u_b + p g_{ab} + q_a u_b + q_b u_a, \quad (3.5)$$

в котором

$$u^a = \left(\frac{A}{B} \sqrt{1 + a^2 A^4 u^2}, u, 0, 0 \right), \quad q^c = (0, q, 0, 0), \quad (3.6)$$

где q^c описывает радиальный поток энергии, а u^a — 4-скорость окружающей

жидкости. Тогда полевые уравнения следующие:

$$\dot{m}_H = -aB^2 \mathcal{A} \sqrt{1 + a^2 A^4 u^2} [(p + \rho)u + q], \quad (3.7)$$

$$-3 \left(\frac{AC}{B} \right)^2 = -8\pi [(p + \rho)a^2 A^4 u^2 + \rho], \quad (3.8)$$

$$- \left(\frac{A}{B} \right)^2 \left(2\dot{C} + 3C^2 + \frac{2\dot{m}C}{\bar{r}AB} \right) = 8\pi [(p + \rho)a^2 A^4 u^2 + p + 2a^2 A^4 qu], \quad (3.9)$$

$$- \left(\frac{A}{B} \right)^2 \left(2\dot{C} + 3C^2 + \frac{2\dot{m}C}{\bar{r}AB} \right) = 8\pi p, \quad (3.10)$$

где $\mathcal{A} = \int \int d\theta d\varphi \sqrt{g_\Sigma} = 4\pi a^2 A^4 \bar{r}^2$ и $C = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{m}}{A\bar{r}}$. Из двух последних уравнений системы получаем:

$$q = -(p + \rho) \frac{u}{2}. \quad (3.11)$$

Таким образом, получаем темп аккреции:

$$\dot{m}_H = -\frac{1}{2} aB^2 \sqrt{1 + a^2 A^4 u^2} (p + \rho) \mathcal{A} u. \quad (3.12)$$

Рассмотрим формулу (3.12). Будет полезно найти зависимость темпа аккреции от космологических параметров, для этого, следуя [52] возьмём предел $\bar{r} \rightarrow \infty$ для выражения (3.12):

$$\dot{m}_H = -2\pi a^3 (p_\infty + \rho_\infty) \lim_{r \rightarrow \infty} (ur^2). \quad (3.13)$$

Интересно сравнить эту формулу с другими, например, с формулой Бабичева-Ерошенко-Докучаева [56–58]:

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi G^2 AM^2 [p_\infty + \rho_\infty]. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) может быть получена с помощью стационарной метрики Шварц-

шильда или нестационарной метрики Шварцшильда [59]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM(t)}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM(t)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.15)$$

Так как метрика (3.4) переходит в (3.15) при «остановке» расширения Вселенной (иными словами положить $\dot{a} = 0$ в полевых уравнениях) и замене радиальной координаты, то можно ожидать, что темп аккреции (3.12) перейдет в формулу (3.14), однако, в общем случае, это не так. Причина состоит в том, что при выводе этой формулы сделано предположение $\lim_{r \rightarrow \infty} (ur^2) = -2AG^2M^2$.

Продолжим рассматривать предел $r \rightarrow \infty$ для уравнения (3.12). При больших \bar{r} , очевидно, имеем:

$$p(r; t) = p_\infty(t) + p_1(t)/r + \mathcal{O}(1/r^2), \quad (3.16)$$

$$\rho(r; t) = \rho_\infty(t) + \rho_1(t)/r + \mathcal{O}(1/r^2), \quad (3.17)$$

$$u(r; t) = u_\infty(t)/r^2 + \mathcal{O}(1/r^3). \quad (3.18)$$

Далее, подставляя эти приближения в полевые уравнения и, комбинируя законы сохранения, можно, в конечном итоге, получить зависимость $m_H(t)$ от масштабного фактора. Подробности вывода в [52].

Для квази-локальной массы получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{m}_H + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{m}_H - 4\pi G [(3\omega + 1)m_H - 3\omega m_0 a] (p_\infty + \rho_\infty) = 0. \quad (3.19)$$

В последнем выражении присутствуют слагаемое m_0 , которому ещё не был присвоен определённый смысл. Происхождение этого слагаемого следующее: из законов сохранения можно получить дифференциальное уравнение для первого коэффициента главной части ряда Лорана для плотности (3.16). Уравнение для ρ_1 следующее:

$$\dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{a}}{a}(p_1 + \rho_1) + 3G\dot{m}(p_\infty + \rho_\infty) = 0, \quad (3.20)$$

из которого получаем

$$\rho_1(t) = 3G(m_0 - m)(p_\infty + \rho_\infty). \quad (3.21)$$

Таким образом, необходимо дополнительное предположение о значении m_0 в некоторый начальный момент времени. Отсюда следует, что (3.20) для нахождения частного решения требует не два, а три начальных условия.

Итак, зависимость квази-локальной массы от масштабного фактора следующая:

$$m_H(t) = C_1 a^{1+3\omega}(t) - C_2 a^{-3(1+\omega)/2}(t) + \frac{3(1+\omega)}{3\omega+5} m_0 a(t), \quad (3.22)$$

в которой C_1, C_2 определяются из начальной массы $m_H(t_0)$ и начального темпа аккреции $\dot{m}_H(t_0)$. Видно, что при $\omega = 0$ масса $m_H(t) \propto a(t)$. RD-MD переход происходит примерно на $z_{eq} \approx 3000$. Вычислим красное смещение, соответствующее переходу к доминированию тёмной энергии. Зависимость плотности материи и тёмной энергии во Вселенной от масштабного фактора известна:

$$\rho_m = \rho_{m,0}(z+1)^3 = \Omega_{m,0}\rho_{cr}(z+1)^3, \quad (3.23)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} = \Omega_\Lambda \rho_{cr}. \quad (3.24)$$

В равенствах выше ρ_m означает плотность материи, Ω — доля в плотности Вселенной для соответствующей компоненты. Индекс $\ll 0 \gg$ означает современное значение величины. Переход к доминированию тёмной энергии происходит, когда плотность материи становится равна плотности тёмной энергии. С помощью (3.23) и (3.24) получаем

$$\rho_\Lambda = \rho_m \implies z+1 = (\Omega_\Lambda/\Omega_{m,0})^{1/3} \implies z+1 \approx 1.32. \quad (3.25)$$

Таким образом, за всю стадию доминирования нерелятивистского вещества во Вселенной, согласно этой модели, чёрная дыра может увеличить свою массу примерно в ~ 2000 раз. Полученная оценка совпадает в пределах порядка с результатом, полученным в рамках Ньютоновской механики.

Обозначим конечную массу по окончании MD-стадии индексом « f », а начальную, соответствующую моменту RD-MD перехода индексом « i », тогда запишем соотношение.

$$M_f \approx 2000 M_i. \quad (3.26)$$

Результат (3.26) будет использован при выводе спектра масс чёрных дыр, ко-

торый соответствует современной Вселенной.

3.1.3 АККРЕЦИЯ В ЭДДИНГТОНОВСКОМ РЕЖИМЕ

Эддингтоновский предел в аккреции считается ограничением на темп аккреции вещества, хотя и наблюдаются случаи аккреции сверх этого темпа [60], чего можно достичь отсутствием сферической симметрии. Зависимость массы от времени при аккреции в Эддингтоновском режиме:

$$M(t) = M_0 \exp\left(\frac{4\pi G m_p t}{\varepsilon c \sigma_{th}}\right), \quad (3.27)$$

где m_p это масса протона, σ_{th} это томсоновское сечение рассеяния для электрона, M_0 — начальная масса, ε это радиационная эффективность (для Шварцшильдовских чёрных дыр эта величина равна 0.1). Формулу (3.27) удобно переписать в виде

$$M(t) = M_0 \exp\left(\frac{t}{t_{Edd}}\right), \quad (3.28)$$

где $t_{Edd} \approx 45.1 \cdot 10^6$ лет. В ранней Вселенной на $z \gtrsim 6$ (возраст Вселенной ≈ 900 миллионов лет) наблюдаются сверхмассивные чёрные дыры, масса которых достигает $10^{10} M_\odot$ [49; 61; 62]. Их происхождение остаётся неясным. При попытке объяснить их существование аккрецией вещества на чёрные дыры звёздного происхождения требуется, чтобы эти чёрные дыры увеличивали свою массу в предельном темпе — Эддингтоновском.

Возраст Вселенной на $z = 6$ примерно 900 миллионов лет, поэтому, если чёрные дыры всё это время аккрецируют в Эддингтоновском режиме, то их масса увеличивается в

$$M_f/M_i = e^{900 \cdot 10^6 \text{ лет} / t_{Edd}} = e^{900 \cdot 10^6 \text{ лет} / 45.1 \cdot 10^6 \text{ лет}} \approx e^{20} \sim 5 \cdot 10^8 \quad (3.29)$$

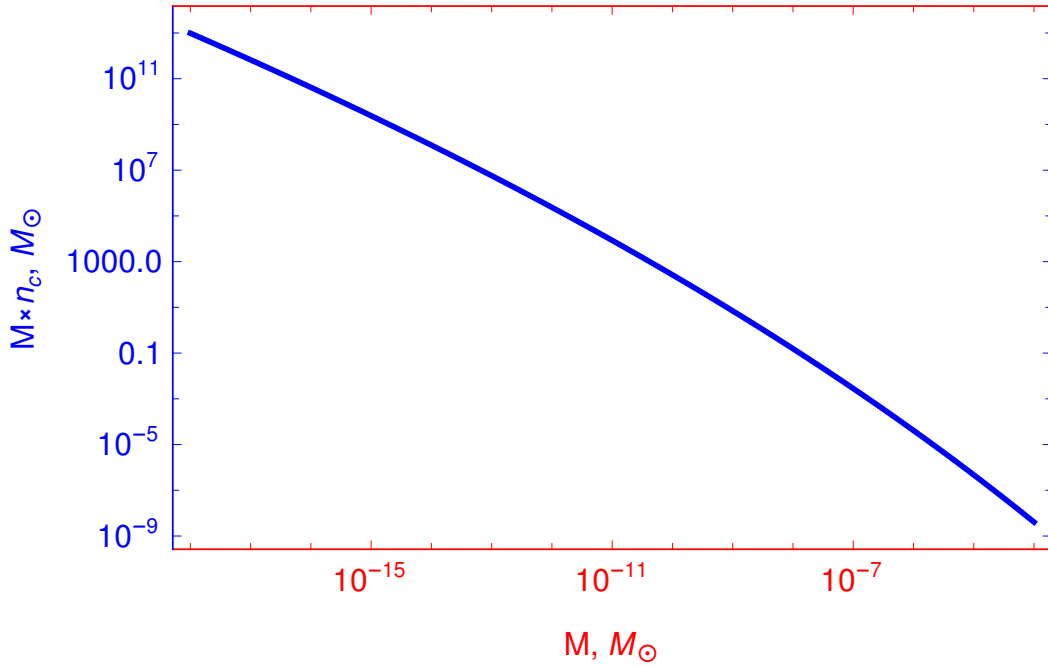
раз. Этот фактор аккреции будет использован как предельная оценка аккреции. Из этого фактора могут следовать ограничения на начальное значение поля. Для простоты рассмотрения, испарение чёрных дыр после RD стадии не будет учтено.

3.2 СОВРЕМЕННЫЙ СПЕКТР МАСС ПЧД И ОГРАНИЧЕНИЯ НА НЕГО

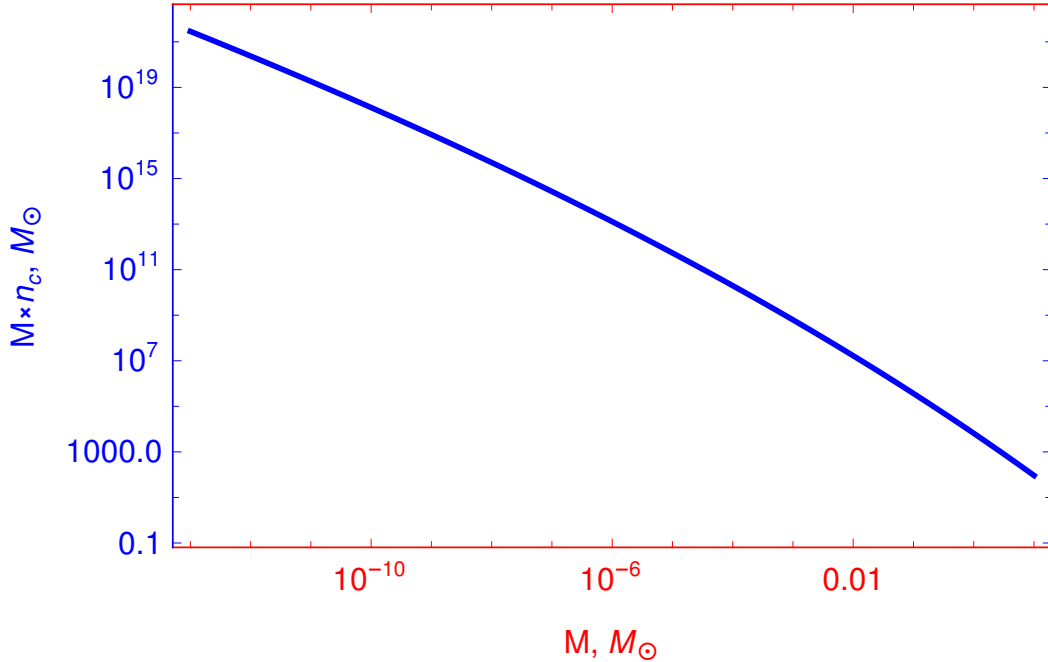
Теперь получим спектр масс ПЧД в современной Вселенной. Для этого в (2.20) учтем фактор аккреции k на MD стадии, заменив переменную M_{bh} на M_{bh}/k . Учтем также эффект испарения маломассивных ПЧД, сдвинув нижнюю границу спектра масс (согласно (3.32) и (3.36)). Выражение для спектра масс можно записать в следующем виде:

$$n_c(M_{bh}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{2}\pi\Delta}{H_{\text{inf}} \sqrt{N_{\text{inf}} - \ln \left(\sqrt{N_{\text{inf}} H_{\text{inf}} G M_{bh} / 1.4 \cdot k} \right)}} \right) \cdot \frac{(1.4 \cdot k)^{3/2} e^{3N_{\text{inf}}}}{(N_{\text{inf}} G H_{\text{inf}} M_{bh})^{3/2}}. \quad (3.30)$$

Для случая консервативной оценки аккреции по формулам МакВитти и Ньютоновской механике фактор аккреции $k \approx 2000$, согласно (3.26), а для случая аккреции в Эддингтоновском режиме этот фактор $k \approx 5 \cdot 10^8$, согласно (3.29). Спектры для обоих случаев (3.30) приведены на рисунках 3.1а и 3.1б соответственно.



(а) Спектр масс в современной Вселенной, ограниченный испарением чёрных дыр, с учётом аккреции на MD и RD стадиях. Фактор аккреции на MD стадии $k \approx 2000$, согласно (3.26). Сдвиг начального значения поля относительно положения максимума потенциала принят равным $\Delta = 9\sigma(t_{\text{inf}})$. Нижняя (левая) граница спектра определяется $M_{\text{ev}} \sim 10^{-18} M_{\odot}$.



(б) Спектр масс на $z = 6$ (это значение выбрано потому что есть наблюдательные данные о квазарах на этом красном смещении), получаемый при аккреции в Эддингтоновском режиме. Сдвиг начального значения поля относительно положения максимума потенциала принят равным $\Delta = 8.5\sigma(t_{\text{inf}})$. Нижняя (левая) граница спектра определяется фактором аккреции $k \approx 5 \cdot 10^8$, согласно (3.29). Минимальная масса $M_{\text{min}} \sim 10^{-13} M_{\odot}$.

Рисунок 3.1 — Спектры масс в современной Вселенной.

Рассмотренная модель многомерной модифицированной гравитации содержит механизм производства в ранней Вселенной чёрных дыр очень малых масс, часть из которых должна испариться к современному моменту. Необходимо проверить, допустимо ли существование более лёгких чёрных дыр, возникающих в данной модели, в ранней Вселенной.

Из полученного спектра (Рисунок 3.1б) следует, что рассмотренный в работе механизм способен объяснить ПЧД значительную часть скрытой массы, поскольку чёрные дыры с массами $\sim 10^{-13} M_\odot$ не ограничены как кандидаты в скрытую массу (Рисунок 3.2). Ниже приведены современные наблюдательные ограничения [24] на максимальную долю черных дыр в скрытой массе Вселенной:

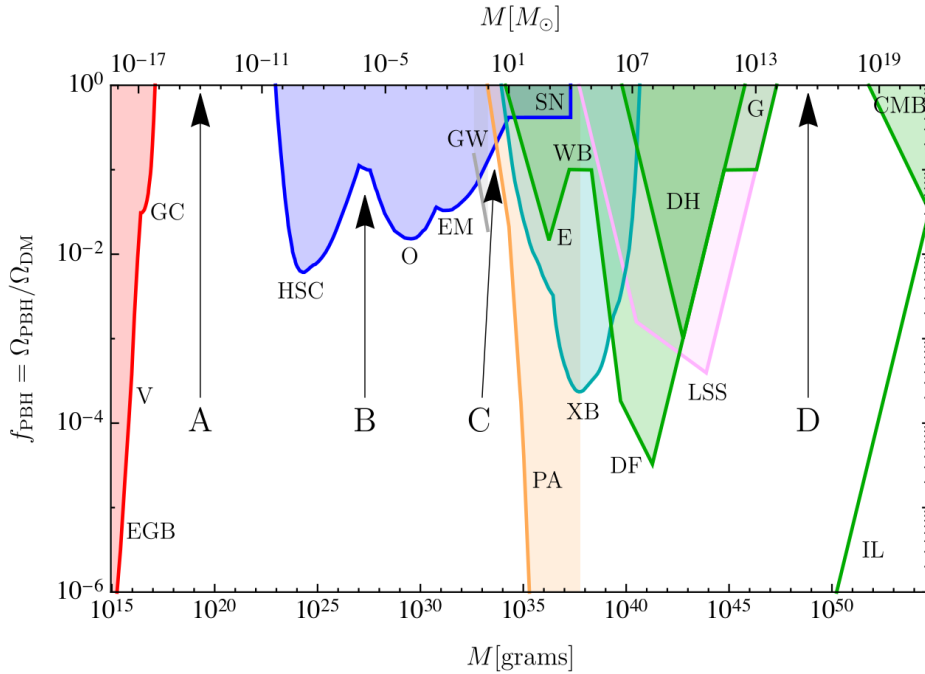


Рисунок 3.2 — Ограничения на долю чёрных дыр в скрытой массе Вселенной, согласно [24].

Известно, что чёрные дыры со временем испаряются [63]. Они испаряются тем интенсивнее, чем меньше их масса. Время испарения чёрной дыры массы M можно оценить следующим образом:

$$\tau_{evap} \approx 2.1 \cdot 10^{67} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \text{ лет.} \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует, что за время равное возрасту Вселенной испарятся чёрные

дыры с массой

$$M_{ev} \sim 10^{-18} M_{\odot}. \quad (3.32)$$

Для данной работы интерес представляют ограничения по испарению. Из работы [24] получаем ограничение на долю ПЧД в скрытой массе:

$$f(M) < 2 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M}{M_{ev}} \right)^{3.2}. \quad (3.33)$$

Согласно результатам работы [64], масса наблюдаемой Вселенной:

$$M_U \approx 6 \cdot 10^{22} M_{\odot}. \quad (3.34)$$

Доля скрытой массы в наблюдаемой Вселенной $\Omega_{DM} \approx 0.22$, тогда общая масса чёрных дыр с массой M_{ev} во Вселенной ограничена сверху:

$$M_{PBH}^{total} < f(M_{ev}) \Omega_{DM} M_U \approx 2 \cdot 10^{13} M_{\odot}. \quad (3.35)$$

Именно (3.35) был определён выбор начального сдвига поля. Выбранный сдвиг соответствует предельному случаю, когда современный спектр масс «упирается» в ограничения, что будет показано далее.

RD-MD переход происходит примерно в момент времени $t_{eq} \approx 10^5$ лет. Тогда получаем, что к этому моменту времени чёрные дыры, с массой меньше, чем

$$M_{eq} \sim 10^{-21} M_{\odot}, \quad (3.36)$$

должны испариться. Согласно (3.31), для чёрных дыр с минимальной массой, возникающих в данной модели, $M_{min} \sim 10^{-27} M_{\odot}$ время испарения:

$$\tau_{min} \approx 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ лет}. \quad (3.37)$$

Положим, что испаряющиеся ЧД становятся излучением. То есть будем считать, что верхним ограничением на общую массу чёрных дыр во Вселенной является энергия излучения. Энергия излучения зависит от масштабного фактора (красного смещения) следующим образом:

$$E_R \propto V \rho^R \propto V_0 a^3 \rho_0^R a^{-4} = V_0 \rho_0^R / a = V_0 \rho_0^R (z + 1), \quad (3.38)$$

где V — объём наблюдаемой Вселенной, ρ^R — плотность излучения во Вселенной, z — красное смещение, а индекс «0» означает современное значение соответствующей величины.

Таким образом, зависимость энергии излучения от красного смещения:

$$E_R(z) = E_0^R(z + 1). \quad (3.39)$$

Современное значение энергии излучения, очевидно, равно

$$E_0^R = \Omega_R M_U. \quad (3.40)$$

Современная доля излучения во Вселенной $\Omega_R \approx 10^{-4} \rightarrow E_0^R \approx 6 \cdot 10^{18} M_\odot$. Вычислим красное смещение, соответствующее $\tau_{min} = 2.1 \cdot 10^{-4}$ лет:

$$\frac{a_{eq}}{a_{min}} = \frac{z_{min} + 1}{z_{eq} + 1} \approx \frac{z_{min}}{z_{eq}} \approx \sqrt{\frac{10^5}{2.1 \cdot 10^{-4}}} \approx 22 \cdot 10^3 \rightarrow z_{min} \sim 10^8. \quad (3.41)$$

В последнем равенстве индексом «eq» был обозначен момент RD-MD перехода. Оценка красного смещение (3.41) грубая заниженная оценка, ввиду того, что к моменту RD-MD перехода масштабный фактор ведёт себя иначе, чем на RD стадии, расширение Вселенной происходит быстрее. Таким образом, энергия излучения на момент τ_{min} :

$$E_{min}^R > z_{min} E_0^R \sim 10^{27} M_\odot. \quad (3.42)$$

Из рисунка 2.1 видно, что при $\Delta = 9\sigma(t_{inf})$ общая масса чёрных дыр $\sim 10^{16} M_\odot$, приблизительно эта масса чёрных дыр станет излучением, когда возраст Вселенной будет порядка τ_{min} . С помощью (3.42) получаем, что доля чёрных дыр, возникающих в данной модели при сдвиге $\Delta = 9\sigma(t_{inf})$, в плотности Вселенной на момент τ_{min} :

$$\Omega_{BH} < 10^{16} M_\odot / E_{min}^R \sim 10^{-12}. \quad (3.43)$$

Полученное значение Ω_{BH} в (3.43) из грубой оценки красного смещения по

порядку величины меньше, чем известное ограничение по испарению:

$$\Omega_{BH,0} = f(M_{ev})\Omega_{DM} \approx 0.4 \cdot 10^{-9}. \quad (3.44)$$

Таким образом, полученный спектр масс ПЧД (3.30) не противоречит известным на сегодня ограничениям на чёрные дыры. Общая масса чёрных дыр с массой $\sim 10^{-18} M_{\odot}$ не должна превышать $2 \cdot 10^{13} M_{\odot}$, согласно (3.34).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было показано, что модели многомерной $f(R)$ –гравитации содержат в себе возможность производства первичных черных дыр на ранних стадиях космологической эволюции. Для удаленного наблюдателя в картине Йордана, появление таких черных дыр можно интерпретировать как проявление нетривиальной гравитационной динамики многомерного пространства после завершения космологической инфляции.

Было показано, что эта гравитационная динамика сводится к динамике эффективного скалярного поля (рассматриваемого в картине Эйнштейна) которое имеет нетривиальный потенциал, содержащий несколько минимумов. Для такого потенциала возникает возможность формирования доменных стенок по завершению космологической инфляции, которые далее способны коллапсировать в первичные черные дыры. Показано, что этот процесс неизбежен в нашей модели для того диапазона параметров $f(R)$ –гравитации, которые одновременно удовлетворяют космологическим ограничениям и приводят к нетривиальному потенциалу эффективного скалярного поля.

Полученные в рамках данной модели доменные стенки являются суперкритическими — их гравитационное поле становится очень значительным на Хаббловском масштабе задолго до того, как стенки могли бы пересечь космологический горизонт. Был посчитан спектр масс ПЧД, формируемый этими доменными стенками с учётом аккреции на RD и MD стадиях. Аккреция на MD стадии была оценена с помощью 3 подходов: в рамках Ньютоновской механики и с помощью ОТО в метрике МакВитти, которые дают очень близкие результаты, а также получена оценка аккреции в Эддингтоновском режиме. Форма спектра определяется процессом многократных квантовых флуктуаций на инфляционной стадии и параметра Хаббла во время космологической инфляции. Отличительной особенностью данной модели является отсутствие зависимости формы спектра масс чёрных дыр от параметров многомерной модифицированной гравитации. От параметров исходной модели зависит только левая граница

спектра — минимальная масса ПЧД.

В рамках рассмотренной модели удаётся объяснить значительную часть скрытой массы Вселенной, если она состоит из первичных черных дыр, так как механизм позволяет получить чёрные дыры в диапазоне масс, которые не ограничены для ПЧД как кандидатов в скрытую массу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feruglio F.* Extra dimensions in particle physics // The European Physical Journal C. — 2004. — Vol. 33, S1. — s114–s128. — ISSN 1434-6052.
2. *Dienes K. R., Dudas E., Gherghetta T.* Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions // Nuclear Physics B. — 1999. — Vol. 537, no. 1–3. — P. 47–108.
3. *Hall L., Nomura Y.* Gauge unification in higher dimensions // Physical Review D. — 2001. — Vol. 64, no. 5. — P. 055003.
4. *Grobov A. V., Rubin S. G.* Higgs-Like Field and Extra Dimensions // International Journal of Theoretical Physics. — 2013. — Vol. 52, no. 12. — P. 4283–4292. — ISSN 1572-9575.
5. *Hewett J., Spiropulu M.* Particle physics probes of extra spacetime dimensions // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2002. — Vol. 52, no. 1. — P. 397–424.
6. *Deutschmann N., Flacke T., Kim J. S.* Current LHC constraints on minimal universal extra dimensions // Physics Letters B. — 2017. — Vol. 771. — P. 515–520. — ISSN 0370-2693.
7. *Witten E.* Instability of the Kaluza-Klein vacuum // Nuclear Physics B. — 1982. — Vol. 195, no. 3. — P. 481–492.
8. *Rador T.* Acceleration of the Universe via $f(R)$ gravities and the stability of extra dimensions // Physical Review D. — 2007. — Vol. 75, no. 6. — ISSN 1550-2368.
9. *Bronnikov K. A., Rubin S. G.* Self-stabilization of extra dimensions // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 73, no. 12. — P. 124019.
10. Classical stabilization of homogeneous extra dimensions / S. M. Carroll [et al.] // Physical Review D. — 2002. — Vol. 66, no. 2. — ISSN 1089-4918.

11. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // *Phys. Lett.* — 1980. — Vol. B91. — P. 99–102.
12. *Vilenkin A.* Classical and quantum cosmology of the Starobinsky inflationary model // *Physical Review D.* — 1985. — Vol. 32, no. 10. — P. 2511.
13. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation / Y. Akrami [et al.]. — 2018.
14. *Fabris J. C., Popov A. A., Rubin S. G.* Multidimensional gravity with higher derivatives and inflation // *Physics Letters B.* — 2020. — Vol. 806. — P. 135458.
15. *De Felice A., Tsujikawa S.* f(R) Theories // *Living Reviews in Relativity.* — 2010. — Vol. 13, no. 1. — ISSN 1433-8351.
16. *Capozziello S., De Laurentis M.* Extended Theories of Gravity // *Physics Reports.* — 2011. — Vol. 509, no. 4. — P. 167–321. — ISSN 0370-1573.
17. *Capozziello S., De Laurentis M.* The Dark Matter problem from f(R) gravity viewpoint // *Annalen der Physik.* — 2012. — Vol. 524.
18. *Bronnikov K. A., Konoplich R. V., Rubin S. G.* The diversity of universes created by pure gravity // *Classical and Quantum Gravity.* — 2007. — Vol. 24, no. 5. — P. 1261–1277.
19. Inhomogeneous compact extra dimensions / K. Bronnikov [et al.] // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* — 2017. — Vol. 2017, no. 10. — P. 001–001.
20. *Bronnikov K. A., Popov A. A., Rubin S. G.* Inhomogeneous compact extra dimensions and de Sitter cosmology // *The European Physical Journal C.* — 2020. — Vol. 80, no. 10. — ISSN 1434-6052.
21. Low-redshift quasars in the Sloan Digital Sky Survey Stripe 82. The host galaxies / R. Falomo [et al.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* — 2014. — Vol. 440, no. 1. — P. 476–493. — ISSN 0035-8711.
22. *Dokuchaev V., Eroshenko Y. N., Rubin S.* Origin of supermassive black holes // arXiv preprint arXiv:0709.0070. — 2007.

23. *The LIGO Scientific Collaboration T. V. C.* Search for intermediate mass black hole binaries in the first and second observing runs of the Advanced LIGO and Virgo network // *Physical Review D*. — 2019. — Vol. 100, no. 6. — ISSN 2470-0029.
24. *Carr B., Kühnel F.* Primordial black holes as dark matter candidates // *SciPost Physics Lecture Notes*. — 2022.
25. Primordial black holes confront LIGO/Virgo data: current situation / V. D. Luca [et al.] // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2020. — Vol. 2020, no. 06. — P. 044–044. — ISSN 1475-7516.
26. *Rubin S., Khlopov M., Sakharov A.* Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition // *Grav. Cosmol.* — 2000. — Vol. 6.
27. Clusters of Primordial Black Holes / K. M. Belotsky [et al.] // *The European Physical Journal C*. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — ISSN 1434-6052.
28. *Lyakhova Y., Popov A. A., Rubin S. G.* Classical evolution of subspaces // *The European Physical Journal C*. — 2018. — Vol. 78, no. 9. — P. 1–13.
29. *Bronnikov K. A., Rubin S. G.* Local regions with expanding extra dimensions // *Physics*. — 2021. — Vol. 3, no. 3. — P. 781–789.
30. *Capozziello S., Martin-Moruno P., Rubano C.* Physical non-equivalence of the Jordan and Einstein frames // *Physics Letters B*. — 2010. — Vol. 689, no. 4. — P. 117–121. — ISSN 0370-2693.
31. Flavour violation with a single generation / J. M. Frere [et al.] // *Journal of High Energy Physics*. — 2004. — Vol. 2004, no. 03. — P. 001–001.
32. *Vilenkin A., Shellard E. P. S.* Cosmic strings and other topological defects. — Cambridge University Press, 1994.
33. *Domènech G., Sasaki M.* Conformal frame dependence of inflation // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2015. — Vol. 2015, no. 04. — P. 022–022. — ISSN 1475-7516.
34. *Nikulin V., Grobov A., Rubin S.* A mechanism for protogalaxies nuclei formation from primordial black holes clusters // *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 934. — IOP Publishing. 2017. — P. 012040.

35. *Nikulin V., Rubin S., Khromykh L.* Formation of Primordial Black Hole Clusters from Phase Transitions in the Early Universe // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. — 2019. — Vol. 46. — P. 97–99.
36. *Khlopov M. Y., Rubin S. G.* Cosmological Pattern of Microphysics in the Inflationary Universe. — (Fundamental Theories of Physics). — ISBN 978-90-481-6695-4.
37. *Vilenkin A.* Gravitational field of vacuum domain walls and strings // Phys. Rev. D. — 1981. — Vol. 23, issue 4. — P. 852–857.
38. *Ipser J., Sikivie P.* The Gravitationally Repulsive Domain Wall // Phys. Rev. D. — 1984. — Vol. 30. — P. 712.
39. *Lazanu A., Martins C., Shellard E.* Contribution of domain wall networks to the CMB power spectrum // Physics Letters B. — 2015. — Vol. 747. — P. 426–432.
40. *Garriga J., Vilenkin A., Zhang J.* Black holes and the multiverse // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2016. — Vol. 2016, no. 2. — P. 064–064.
41. *Deng H., Garriga J., Vilenkin A.* Primordial black hole and wormhole formation by domain walls // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2017. — Vol. 2017, no. 04. — P. 050–050.
42. *Linde A.* Scalar field fluctuations in the expanding universe and the new inflationary universe scenario // Physics Letters B. — 1982. — Vol. 116, no. 5. — P. 335–339. — ISSN 0370-2693.
43. *Starobinsky A.* Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe // JETP Lett. — 1979. — Vol. 30. — P. 682–685.
44. Mechanism for the suppression of intermediate-mass black holes / V. I. Dokuchaev [et al.] // Astronomy Letters. — 2010. — Vol. 36, no. 11. — P. 773–779.
45. *Vilenkin A., Ford L. H.* Gravitational effects upon cosmological phase transitions // Phys. Rev. D. — 1982. — Vol. 26, issue 6. — P. 1231–1241.
46. *Starobinsky A.* Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations // Physics Letters B. — 1982. — Vol. 117, no. 3. — P. 175–178. — ISSN 0370-2693.

47. The stochastic spectator / R. J. Hardwick [et al.] // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2017. — Vol. 2017, no. 10. — P. 018–018.
48. *Frank J., King A., Raine D.* Accretion power in astrophysics. — Cambridge university press, 2002.
49. An 800-million-solar-mass black hole in a significantly neutral Universe at a redshift of 7.5 / E. Bañados [et al.] // Nature. — 2017. — Vol. 553, no. 7689. — P. 473–476.
50. *Mack K. J., Ostriker J. P., Ricotti M.* Growth of Structure Seeded by Primordial Black Holes // The Astrophysical Journal. — 2007. — Vol. 665, no. 2. — P. 1277–1287.
51. *Faraoni V., Jacques A.* Cosmological expansion and local physics // Physical Review D. — 2007. — Vol. 76, no. 6.
52. *Cheng-Yi S.* Dark Energy Accretion onto a Black Hole in an Expanding Universe // Communications in Theoretical Physics. — 2009. — Vol. 52, no. 3. — P. 441–444.
53. *Gao C. J., Zhang S. N.* Reissner–Nordström metric in the Friedman–Robertson–Walker universe // Physics Letters B. — 2004. — Vol. 595, no. 1–4. — P. 28–35.
54. *Hawking S.* Gravitational radiation in an expanding universe // J. Math. Phys. — 1968. — Vol. 9. — P. 598–604.
55. *Hayward S. A.* Quasilocal gravitational energy // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49, issue 2. — P. 831–839.
56. *Babichev E. O., Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N.* Black Hole in a Radiation-Dominated Universe // Astronomy Letters. — 2018. — Vol. 44, no. 8/9. — P. 491–499.
57. *Babichev E., Dokuchaev V., Eroshenko Y.* Black Hole Mass Decreasing due to Phantom Energy Accretion // Physical Review Letters. — 2004. — Vol. 93, no. 2.
58. *Babichev E. O.* The Accretion of Dark Energy onto a Black Hole // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2005. — Vol. 100, no. 3. — P. 528.

59. *Martin-Moruno P., Madrid J. A. J., Gonzalez-Diaz P. F.* Will black holes eventually engulf the universe? // *Phys. Lett. B.* — 2006. — Vol. 640. — P. 117–120.
60. *Inayoshi K., Haiman Z., Ostriker J. P.* Hyper-Eddington accretion flows on to massive black holes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* — 2016. — Vol. 459, no. 4. — P. 3738–3755.
61. Supermassive black holes at high redshifts / V. S. Paliya [et al.]. — 2019.
62. Eddington–limited accretion and the black hole mass function at redshift 6 / C. J. Willott [et al.] // *The Astronomical Journal.* — 2010. — Vol. 140, no. 2. — P. 546–560.
63. *Hawking S. W.* Black hole explosions? // *nature.* — 1974. — Vol. 248, no. 5443. — P. 30–31.
64. *Gaztañaga E.* The mass of our observable Universe // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters.* — 2023. — Vol. 521, no. 1. — P. L59–L63. — ISSN 1745-3925.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРОЦЕДУРА ПЕРЕВОДА ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ИЗ
КАРТИНЫ ЭЙНШТЕЙНА В КАРТИНУ ЙОРДАНА

Далее, верхний индекс « E » означает представление величины в картине Эйнштейна, а индекс « J », соответственно, в картине Йордана, как и во всей работе.

Картины Эйнштейна и Йордана по определению связаны преобразованием метрики:

$$g_{\mu\nu}^J = \Omega^{-2} g_{\mu\nu}^E, \quad \Omega^2 = e^{n\beta(\phi)} |f'(\phi)|. \quad (\text{A.1})$$

Рассмотрим действие для скалярного поля ψ с потенциалом $V(\psi)$ в картине Эйнштейна:

$$S^E = \frac{m_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4^E} \text{sign}(f') [(\partial\psi^E)^2 - 2V^E(\psi)], \quad (\text{A.2})$$

Из определения немедленно следует, что $V^J = \Omega^4 V^E$, $\psi^J = \Omega\psi^E$.

Рассмотрим V'' :

$$(V^J)'' = \frac{d^2 V^J}{(d\psi^J)^2} = \frac{\Omega^4 d^2 V^E}{\Omega^2 (d\psi^E)^2} = \Omega^2 (V^E)''. \quad (\text{A.3})$$

Тогда масса поля ψ преобразуется по следующему закону:

$$m_\psi^J = \sqrt{(V^J)''} = \Omega \sqrt{(V^E)''} = \Omega m_\psi^E, \quad (\text{A.4})$$

а поверхностная плотность энергии:

$$\sigma^J = \int_0^{\psi_{min}^J} \sqrt{2\tilde{V}^J(\psi)} d\psi^J = \int_0^{\psi_{min}^E} \Omega^2 \sqrt{2\tilde{V}^E(\psi)} \Omega d\psi^E = \Omega^3 \sigma^E. \quad (\text{A.5})$$

Из (A.5) получаем, что толщина стенки преобразуется следующим образом:

$$\delta^J \approx \frac{\sigma^J}{V^J} = \frac{\Omega^3 \sigma^E}{\Omega^4 V^E} \approx \Omega^{-1} \delta^E. \quad (\text{A.6})$$

Получим теперь закон преобразования времени. Для t_σ (временного масштаба, на котором поле стенки начинает доминировать во Вселенной) получаем:

$$t_\sigma^E = \frac{1}{2\pi G^E \sigma^E} = \frac{1}{2\pi \Omega^2 G^J \Omega^{-3} \sigma^J} = \Omega t_\sigma^J. \quad (\text{A.7})$$

Наконец, для параметра Хаббла имеем связь:

$$H^E \sim \sqrt{G^E U^E(\chi)} = \sqrt{\Omega^2 G^J \Omega^{-4} U^J(\chi)} \sim \Omega^{-1} H^J. \quad (\text{A.8})$$

Мы видим, что все величины преобразуются согласно их размерности.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ

В этом приложении даются ограничения на характерный энергетический масштаб параметров модели квадратичной $f(R)$ -гравитации и минимальную массу возникающих в ней черных дыр.

В.1 ОГРАНИЧЕНИЯ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МАСШТАБ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Ограничения на параметры модели могут следовать из спектра масс (2.20), однако, из-за того, что все стенки, образующиеся в данной модели, являются суперкритическими, данное выражение не содержит в себе явно характерных параметров стенки. В этом заключается отличие этого спектра от полученных в [27; 34; 35]. Таким образом, существующие ограничения на чёрные дыры в данном случае накладывают ограничение только на начальное значение поля ψ_u .

В работе [31] получено ограничение на размер дополнительных измерений $1/R \gtrsim 64 \text{ TeV} \sim 100 \text{ TeV}$. Поэтому на массу поля пси в правом минимуме потенциала должно быть наложено соответствующее ограничение:

$$m_\psi^J \gtrsim 1/R \sim 100 \text{ TeV}. \quad (\text{B.1})$$

(1.7) Квадрат массы поля через параметры модели можно выразить (удобно сделать замены переменных $c_v = c_1 + 2c_2/(n-1)$, $c_k = c_1 + c_2$) в картине Йордана следующим образом:

$$\begin{aligned} (m_\psi^J)^2 &= V_{\psi\psi}^J(\psi_{min}) = \frac{V_{\phi\phi}^J(\phi_{vac})}{K^J(\phi_{vac})} = \\ &= \frac{-2(a_2n + c_v)\text{sign}(c_v) \left| \frac{a_2n}{c_v + a_2n} \right|}{(12a_2^2n + 4ac_vn - 4c_kc_v + c_v^2(n+2)) \text{sign}(c_v + a_2n)} \gtrsim (100 \text{ TeV})^2. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Выражение (B.2) показывает зависимость массы поля ψ от параметров модели, при выводе выражения использована замена переменных (1.7). Видно,

что при увеличении по модулю параметров теории, масса поля уменьшается. Таким образом, на параметры модели есть ограничения сверху.

Следуя результатам [14] ($c_v < 0$, $a_2 n + c_v < 0$), выражение (В.2), можно упростить:

$$\frac{V_{\phi\phi}^J(\phi_{vac})}{K^J(\phi_{vac})} = \frac{2|a_2 n|}{(12a_2^2 n + 4ac_v n - 4c_k c_v + c_v^2(n+2))}. \quad (\text{В.3})$$

Объединяя (В.3) и (В.2), получаем:

$$\frac{2|a_2 n|}{(12a_2^2 n + 4ac_v n - 4c_k c_v + c_v^2(n+2))} \gtrsim (100 \text{ TeV})^2. \quad (\text{В.4})$$

При выбранных нами параметрах модели в 1.2, масса поля $\psi - m_\psi \approx 2.93 \cdot 10^7 \text{ GeV} = 2.93 \cdot 10^4 \text{ TeV} \gg 1/R$, то есть условие (В.4) выполнено. Исходя из размерности параметров, можно оценить энергетический масштаб, при котором неравенство (В.4) начинает выполняться. Из размерных соображений следует, что $a_2, c_v, c_k \sim 1/\lambda^2$, тогда:

$$(m_\psi^J)^2 = \frac{2|a_2 n|}{(12a_2^2 n + 4ac_v n - 4c_k c_v + c_v^2(n+2))} \sim \frac{12n\lambda^2}{17n-2} \gtrsim (100 \text{ TeV})^2. \quad (\text{В.5})$$

В данной работе количество дополнительных измерений $n = 6$. Тогда получаем энергетический масштаб:

$$\lambda \gtrsim 300 \text{ TeV}. \quad (\text{В.6})$$

В.2 ОГРАНИЧЕНИЯ НА МИНИМАЛЬНУЮ МАССУ ЧЁРНЫХ ДЫР

Минимальная масса чёрных дыр в рассматриваемом механизме определяется толщиной доменной стенки $\delta \sim \sqrt{|V_{\psi\psi}(\psi_{cr})|}^{-1}$, где ψ_{cr} — положение максимума потенциала $V(\psi)$. Положению максимума $V(\psi)$ соответствует положение максимума $V(\phi)$ — точка ϕ_{cr} , которая даётся выражением:

$$\phi_{cr} = -\frac{\sqrt{c_v(16a_2 n^2 + c_v(n+4)^2) + 2a_2 n^2 + c_v n + 4c_v}}{4a_2 n(a_2 n + c_v)}. \quad (\text{В.7})$$

Выражение (B.7) даёт положение максимума потенциала (1.6). При характерном масштабе параметров $a_2, c_v, c_k \sim 1/\lambda^2$ и $n = 6$ имеем:

$$\delta \sim \sqrt{|V_{\psi\psi}(\psi_{cr})|}^{-1} \sim \frac{2\sqrt{134}}{\lambda\sqrt{39}} \quad (\text{B.8})$$

С помощью (B.8) и (B.6) получаем ограничение на минимальную массу чёрных дыр:

$$M_{min} \approx \frac{\delta}{2G} \sim \frac{1}{2G\sqrt{|V_{\psi\psi}(\psi_{cr})|}} \sim \sqrt{\frac{134}{39}} \frac{1}{G\lambda} \lesssim 10^{31} \text{ GeV} \approx 10^{-26} M_{\odot}. \quad (\text{B.9})$$