

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 539.17

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ  
ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ И ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ПРИ НИЗКИХ И  
СРЕДНИХ ЭНЕРГИЯХ И ПРОБЛЕМА ПЛОТНОСТИ  
ЯДЕРНЫХ УРОВНЕЙ**

Студент \_\_\_\_\_ Л. Е. Трофимов

Научный руководитель,  
д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ А. Л. Барабанов

Москва 2023

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ И ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ПРИ НИЗКИХ И  
СРЕДНИХ ЭНЕРГИЯХ И ПРОБЛЕМА ПЛОТНОСТИ  
ЯДЕРНЫХ УРОВНЕЙ**

Студент

\_\_\_\_\_ Л. Е. Трофимов

Научный руководитель,  
д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ А. Л. Барабанов

Рецензент,  
к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ Н. Б. Шульгина

Секретарь ГЭК,  
к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,  
д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Аналитические формулы плотности состояний и уровней</b>	<b>7</b>
1.1 Преобразование Лапласа плотности состояний подсистемы нейтронов . . . . .	8
1.2 Обобщение на случай системы из двух подсистем . . . . .	11
1.3 Метод перевала . . . . .	12
1.4 Обратное преобразование Лапласа . . . . .	15
1.5 Используемые приближения . . . . .	19
1.5.1 Замена функции $g$ на среднее значение . . . . .	19
1.5.2 Низкотемпературное приближение . . . . .	19
1.5.3 Использование метода перевала . . . . .	20
1.5.4 Равенство плотностей одночастичных состояний для протонов и нейтронов . . . . .	20
1.6 Плотность состояний в зависимости от энергии . . . . .	20
1.7 Плотность уровней в зависимости от энергии и спина . . . . .	21
1.8 Плотность уровней в зависимости от энергии . . . . .	22
<b>2 Комбинаторный метод вычисления плотности состояний и уровней</b>	<b>23</b>
2.1 Алгоритм перебора многочастичных состояний . . . . .	23
2.2 Перебор многочастичных состояний для подсистемы . . . . .	24
2.3 Перевод размерных величин в безразмерные . . . . .	25
2.4 Получение распределения плотности состояний в зависимости от энергии возбуждения . . . . .	26
2.5 Получение распределения плотности состояний в зависимости от проекции углового момента . . . . .	27
2.6 Получение распределения плотности уровней . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Модель прямоугольной ямы с непроницаемыми стенками</b>	<b>29</b>
3.1	Описание модели . . . . .	29
3.2	Моделирование плотности многочастичных состояний . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Модель одномерного гармонического осциллятора</b>	<b>33</b>
4.1	Моделирование плотности состояний . . . . .	33
4.2	Ограничения аналитической формулы . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Модель модифицированного осциллятора</b>	<b>39</b>
5.1	Плотность состояний в зависимости от энергии возбуждения	40
5.2	Плотность состояний в зависимости от проекции углового момента . . . . .	41
5.3	Трёхмерное распределение плотности состояний . . . . .	43
5.4	Распределение плотности уровней в зависимости от полного углового момента . . . . .	45
5.5	Распределение плотности уровней в зависимости от энергии	46
5.6	Сверка с экспериментальными данными . . . . .	47
5.6.1	Проверка для ядер Ni . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Моделирование реакций в программе Talys</b>	<b>50</b>
6.1	Метод оценки надёжности вычислений . . . . .	51
6.2	Результаты для $^{58}\text{Ni}$ . . . . .	52
6.3	Результаты для $^{59}\text{Co}$ . . . . .	55
6.4	Результаты для $^{112}\text{Cd}$ . . . . .	56
6.5	Результаты для $^{113}\text{In}$ . . . . .	58
	<b>Заключение</b>	<b>60</b>
	<b>Список использованных источников</b>	<b>61</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Атомное ядро представляет из себя систему из связанных протонов и нейтронов, взаимодействующих посредством ядерных сил. Эти силы имеют радиус взаимодействия порядка  $r_0 \sim 10^{-13}$  см. Если нуклонов достаточно много, то каждый из них движется в самосогласованном потенциале, создаваемом всеми остальными нуклонами [1]. В сферических ядрах самосогласованный потенциал сферически симметричен. Вырожденные одночастичные состояния нуклонов в таком потенциале группируются в оболочки, подобные электронным оболочкам в атомах. Для описания одночастичных состояний в сферически симметричном ядерном потенциале удобно ввести следующие квантовые числа:

- $n$  — главное квантовое число.
- $l$  — орбитальный момент.
- $l_z$  — проекция орбитального момента на ось  $z$ .

Также каждый нуклон обладает спином  $s = 1/2$ . Поэтому формируется полный угловой момент  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ , его значение равно  $j = l \pm 1/2$ . Тогда, например, если  $n = 1, l = 1$ , то возникнут два терма:  $1P_{1/2}$  и  $1P_{3/2}$ . В первом случае на уровне будут располагаться два нуклона ( $2j + 1 = 2$ ), а во втором — четыре. Проекция полного углового момента у этих нуклонов находится в диапазоне от  $-j_z$  до  $j_z$ . Энергия у термов будет различна за счёт спин-орбитального взаимодействия. Также у состояний есть чётность:  $P = (-1)^l$ .

Таким образом, одночастичное состояние можно охарактеризовать следующими величинами:

- Порядковый номер
- Энергия
- Значение орбитального момента  $l$
- Значение полного углового момента  $j$
- Проекция полного углового момента  $j_z$

- Чётность  $P$

Теперь можно построить «многочастичное состояние», то есть распределить нуклоны по одночастичным состояниям. Такое состояние будет иметь определённую энергию, проекцию углового момента и чётность. Также можно ввести энергию возбуждения как разность между энергиями текущего и основного многочастичных состояний.

Предположим, произошла некоторая ядерная реакция с образованием компаунд-ядра (составного ядра)  $C^*$ :  $a + A \rightarrow C^* \rightarrow b + B^*$ . Поскольку  $C^*$  находится в возбуждённом состоянии, то оно через некоторое время распадётся на частицу  $b$  и ядро  $B^*$  с меньшей энергией возбуждения.

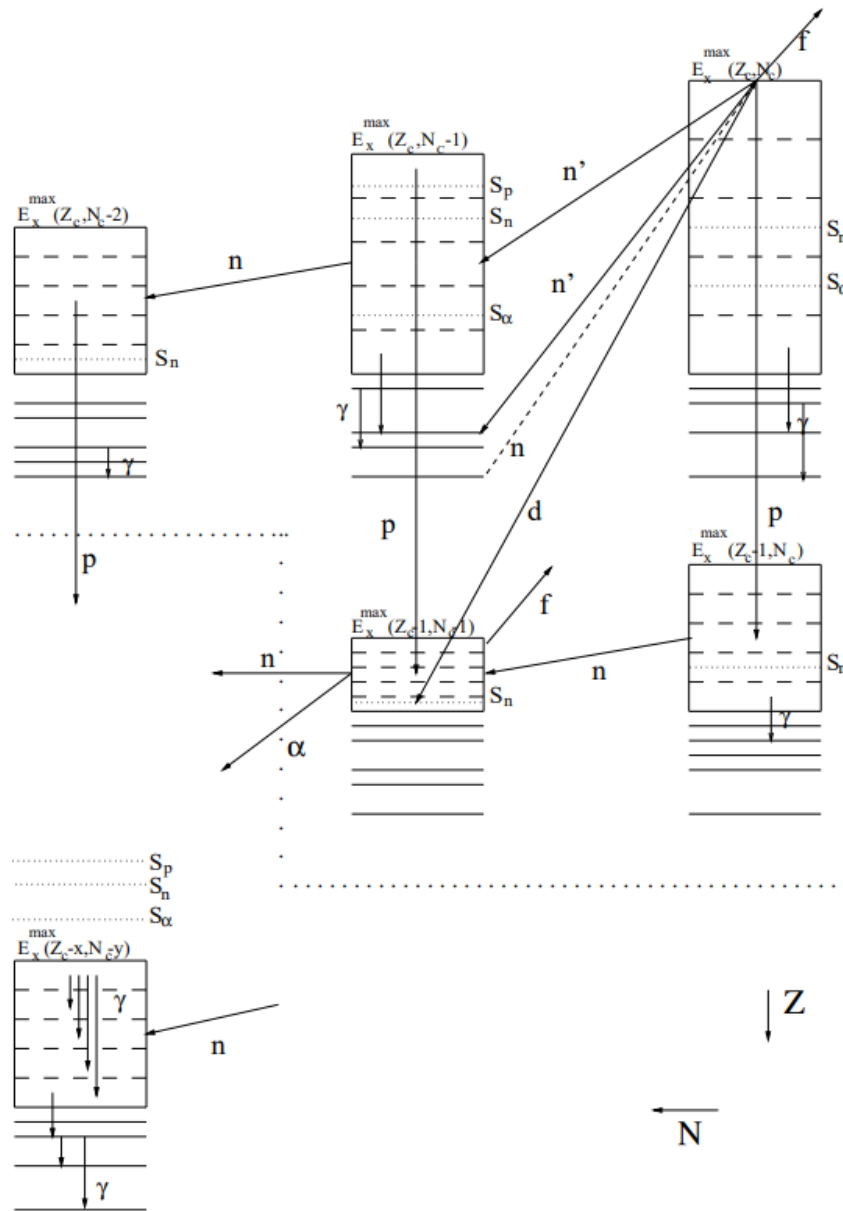


Рисунок 1 — Иллюстрация возможных путей распада [2]

Таким образом, в ядерных реакциях происходят переходы ядер из одних многочастичных состояний в другие. В работе [2], посвящённой описанию вычислительного комплекса Talys, ядерные реакции поясняются рисунком 1. Здесь изображены переходы из одних многочастичных состояний в другие через разные каналы распада ( $n$  — испускание нейтрона,  $p$  — протона,  $f$  — деление, ...). Компаунд-ядро находится в правом верхнем углу. Чем левее ядро на диаграмме, тем меньше у него нейтронов, чем ниже — тем меньше протонов. Для каждого ядра существуют дискретные низколежащие уровни. При больших энергиях возбуждения количество уровней на определённый интервал энергией становится настолько велико, что приходится вводить плотность уровней.

Теперь возникает вопрос: какова вероятность того, что ядро из некоторого возбуждённого состояния с энергией  $E$  перейдёт в какое-нибудь другое в интервале  $[E' - \Delta E', E' + \Delta E']$ ? Понятно, что чем больше состояний в этом диапазоне, тем больше вероятность перехода именно в них. Для этого необходимо знать плотность многочастичных состояний.

Аналитические формулы для этой плотности получены в модели ферми-газа в первом разделе. Эта модель независимых частиц была предложена Бете в 1936 году [3] и далее разрабатывалась многими авторами [1].

Основная часть данной работы, разделы 2–5, посвящена разработке комбинаторного метода вычисления плотности ядерных уровней. Метод заключается в переборе многочастичных состояний путём перераспределения нуклонов по одночастичным состояниям. Представлены результаты соответствующих расчётов, выполненных для одночастичных состояний в прямоугольной трёхмерной яме с непроницаемыми стенками, одномерном гармоническом осцилляторе и модифицированном трёхмерном осцилляторе.

В разделе 6 представлены результаты расчётов ряда ядерных реакций с использованием программы Talys. В этих расчётах использовались плотности ядерных уровней, полученные с помощью трёх модифицированных моделей, основанных на модели ферми-газа.

В заключительном разделе 7 подведены итоги данной работы.

# 1 АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ И УРОВНЕЙ

В этом разделе представлен обзор основных результатов по плотности уровней ядер в модели идеального ферми-газа, основанный на работах [1; 3–5]. Целью является получение формулы, показывающей, сколько многочастичных состояний  $dN$  находится в интервале энергий возбуждения  $(U, U + dU)$  с проекцией полного углового момента  $(M, M + dM)$ . Эта характеристика называется плотностью многочастичных состояний и обозначается  $\omega(U, M)$ . Далее будут получены следствия из этой формулы, в частности, плотность уровней.

Стоит отметить, что существуют также и другие модели, феноменологические модификации модели независимых частиц, которые применяются для описания плотности возбуждённых уровней реальных ядер. К ним, в частности, относятся модель ферми-газа с обратным смещением [6] и модель Гильберта-Камерона [7]. Существует также подход к вычислению плотности состояний в сверхтекучей модели ядра, в которой учитывается остаточное взаимодействие нуклонов, приводящее к их спариванию при относительно низких энергиях возбуждения. Но и в этой модели выше некоторой энергии возбуждения (“точки фазового перехода”) плотность состояний описывается так же, как в модели независимых частиц. Перечисленные выше модификации модели ферми-газа рассмотрены, например, в работах [4; 5].

Мы остановимся на модели идеального ферми-газа и получим соответствующие формулы плотности многочастичных состояний и уровней.



## 1.1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ПОДСИСТЕМЫ НЕЙТРОНОВ

Рассмотрим для начала систему, состоящую из невзаимодействующих нуклонов одного типа, например, нейтронов, движущихся в некотором потенциале. Пусть индекс  $j$  нумерует одночастичные состояния;  $\varepsilon_j$  и  $m_j$  — энергия и проекция углового момента на ось  $z$  нейтрона в состоянии  $j$ , а  $n_j$  — числа заполнения (0 или 1) состояния  $j$ . Многочастичные состояния  $|i\rangle$  системы нейтронов определяются набором чисел заполнения  $n_j(i)$ , которые задают число нейтронов

$$N_i = \sum_j n_j(i), \quad (1.1.1)$$

энергию

$$E_i = \sum_j \varepsilon_j(i)n_j(i), \quad (1.1.2)$$

и полную проекцию углового момента на ось  $z$

$$M_i = \sum_j m_j(i)n_j(i) \quad (1.1.3)$$

в состоянии  $|i\rangle$ . Плотность состояний такой системы, зависящая от непрерывных переменных  $E$ ,  $N$  и  $M$ , задаётся следующей формулой

$$\omega(E, N, M) = \sum_i \delta(E - E_i)\delta(N - N_i)\delta(M - M_i). \quad (1.1.4)$$

Для приведения правой части этой формулы к виду, плавно зависящему от  $E$ ,  $N$  и  $M$ , выполним преобразование Лапласа. Для функции одной переменной  $f(t)$  это преобразование и обратное преобразование определены формулами:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re}(p)-i\infty}^{\text{Re}(p)+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (1.1.5)$$

В нашей задаче мы имеем дело с функцией трёх переменных. Пусть  $Q(\beta, \alpha, k)$  — результат преобразования Лапласа плотности состояний  $\omega(E, N, M)$ :

$$Q(\beta, \alpha, k) = \int_0^\infty dE \int_0^\infty dN \int_0^\infty dM e^{-\beta E + N\alpha + kM} \omega(E, N, M) = \sum_i e^{-\beta E_i + N_i \alpha + k M_i}. \quad (1.1.6)$$

Здесь  $\beta, \alpha, k$  — параметры преобразования. Знаки этих параметров в показателе экспоненты выбираем апостериори, т.к. потом они приобретут некоторый смысл. Поскольку правая часть (1.1.6) аналогичная большой статистической сумме, то, например,  $1/\beta = T$  имеет смысл температуры. Перейдём в формуле (1.1.6) от многочастичных характеристик  $E_i, N_i, M_i$  к одночастичным  $\varepsilon_j, n_j, m_j$ :

$$Q(\beta, \alpha, k) = \sum_i e^{\sum_j (-\beta \varepsilon_j + \alpha + k m_j) n_j(i)} = \sum_i e^{(-\beta \varepsilon_1 + \alpha + k m_1) n_1(i)} e^{(-\beta \varepsilon_2 + \alpha + k m_2) n_2(i)} \dots \quad (1.1.7)$$

Поскольку  $n_j(i)$  принимает значения 0 или 1, и мы суммируем по всем многочастичным состояниям  $|i\rangle$ , то ряд (1.1.7) можно представить в виде:

$$Q(\beta, \alpha, k) = (1 + e^{-\beta \varepsilon_1 + \alpha + k m_1}) (1 + e^{-\beta \varepsilon_2 + \alpha + k m_2}) \dots = \prod_j (1 + e^{-\beta \varepsilon_j + \alpha + k m_j}). \quad (1.1.8)$$

Если возьмём логарифм, то получим:

$$\ln Q(\beta, \alpha, k) = \sum_j \ln (1 + e^{-\beta \varepsilon_j + \alpha + k m_j}). \quad (1.1.9)$$

Перейдём от суммирования к интегрированию, введём плотность одночастичных состояний  $g(\varepsilon)$ , а также выделим явно положительные и отрица-

тельные проекции моментов  $m^+ \geq 0$  и  $m^- = |m^-| > 0$ :

$$\begin{aligned} \sum_j \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon_j + \alpha + km_j}) &= \int_0^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon + \alpha + km}) d\varepsilon = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon + \alpha + km^+}) d\varepsilon + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon + \alpha - km^-}) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

где

$$g(\varepsilon) = \sum_j \delta(\varepsilon - \varepsilon_j). \quad (1.1.11)$$

Вычислим первый интеграл. Выделим пределы интегрирования удобным образом, а затем рассмотрим низкотемпературное приближение:  $(\alpha + km) \gg 1$ . Обозначим для краткости  $-\beta\varepsilon + \alpha - km^+ = x(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + e^x) d\varepsilon &= \int_0^{\frac{\alpha + km^+}{\beta}} g(\varepsilon) \underbrace{\ln(1 + e^x)}_{e^x(1+e^{-x})} d\varepsilon + \int_{\frac{\alpha + km^+}{\beta}}^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + e^x) d\varepsilon = \\ &= \underbrace{\int_0^{\frac{\alpha + km^+}{\beta}} g(\varepsilon) x d\varepsilon}_{(1)} + \underbrace{\int_0^{\frac{\alpha + km^+}{\beta}} g(\varepsilon) \ln(1 + e^{-x}) d\varepsilon}_{(2)} + \underbrace{\int_{\frac{\alpha + km^+}{\beta}}^\infty g(\varepsilon) \ln(1 + e^x) d\varepsilon}_{(3)}. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

$$(1) = \int_0^{\frac{\alpha + km^+}{\beta}} g(\varepsilon) (-\beta\varepsilon + \alpha - km^+) d\varepsilon = \dots = \bar{g} \cdot \frac{(\alpha + km^+)^2}{2\beta}. \quad (1.1.13)$$

$$(2) \frac{\beta\varepsilon - \alpha + km^+ = -\beta y}{\varepsilon = -y + (\alpha + km^+)/\beta} \rightarrow \int_{\frac{\alpha + km^+}{\beta}}^0 g \ln(1 + e^{-\beta y}) d(-y) = \int_0^{\frac{\alpha + km^+}{\beta}} g \ln(1 + e^{-\beta y}) dy. \quad (1.1.14)$$

$$(3) \frac{-\beta\varepsilon + \alpha - km^+ = -\beta y}{\varepsilon = y + (\alpha + km^+)/\beta} \rightarrow \int_0^{\infty} g \ln(1 + e^{-\beta y}) dy = \bar{g} \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{-\beta y}) d(\beta y) = \frac{\bar{g}}{\beta} \cdot \frac{\pi^2}{12}. \quad (1.1.15)$$

Используя «низкотемпературное приближение»  $(\alpha + km^+) \gg 1$  (интегрируем до  $\infty$ ), а также то, что интеграл  $\int_0^{\infty} \ln(1 + e^{-x}) dx = \frac{\pi^2}{12}$  и вынося  $g$  из-под интеграла как среднее, приводим сумму интегралов (1.1.12) к виду:

$$\bar{g} \cdot \frac{(\alpha + km^+)^2}{2\beta} + \frac{1}{2\beta} \cdot \bar{g} \cdot \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2\beta} \cdot \bar{g} \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{\bar{g}}{2} \left( \frac{(\alpha + km^+)^2}{2\beta} + \frac{\pi^2}{6\beta} \right). \quad (1.1.16)$$

Мы получили первый интеграл в выражении (1.1.10). Второй будет аналогичный с заменой  $m^+$  на  $-m^-$ . Тогда, преобразовывая (1.1.10), получаем:

$$\ln Q(\beta, \alpha, k) \approx \frac{\bar{g}(\alpha + km^+)^2}{4\beta} + \frac{\bar{g}(\alpha - km^-)^2}{4\beta} + \frac{\bar{g}\pi^2}{6\beta}. \quad (1.1.17)$$

## 1.2 ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ПОДСИСТЕМ

Протонная и нейтронная системы независимы в том смысле, что гамильтониан ядра является суммой гамильтонианов протонной и нейтронной подсистем. Тогда  $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$ , то есть статсумма является произведением статсумм подсистем. При этом  $\ln \Omega = \ln \Omega_N + \ln \Omega_Z$ , а  $\ln \Omega_N$  известно — это (1.1.17). Также введём индексы  $Z$  и  $N$ , чтобы различать протонную и нейтронную подсистемы.

$$\begin{aligned}
\ln Q(\beta, \alpha_Z, \alpha_N, k) &\approx \frac{\overline{g_Z}(\alpha_Z + km_Z^+)^2}{4\beta} + \frac{\overline{g_Z}(\alpha_Z - km_Z^-)^2}{4\beta} + \frac{\overline{g_Z}\pi^2}{6\beta} + \\
&+ \frac{\overline{g_N}(\alpha_N + km_N^+)^2}{4\beta} + \frac{\overline{g_N}(\alpha_N - km_N^-)^2}{4\beta} + \frac{\overline{g_N}\pi^2}{6\beta} = \quad (1.2.1) \\
&= \frac{\overline{g_Z}\alpha_Z^2}{2\beta} + \frac{\overline{g_N}\alpha_N^2}{2\beta} + \frac{a}{\beta} + \frac{k^2 \cdot \overline{g} \cdot \overline{m^2}}{2\beta}.
\end{aligned}$$

Здесь положено  $m_Z^+ = m_Z^-$ ,  $m_N^+ = m_N^-$ , то есть  $\langle m \rangle = 0$ . Также введены новые обозначения:  $g = \overline{g_Z} + \overline{g_N}$  — полная плотность одночастичных состояний,  $a = \frac{\pi^2}{6}g$  — параметр плотности уровней,  $\overline{m^2} = \frac{1}{g}(m_Z^2\overline{g_Z} + m_N^2\overline{g_N})$ .

Мы получили выражение для  $\ln Q(\beta, \alpha_Z, \alpha_N, k)$ . Теперь из него нужно получить плотность состояний  $\omega(E, Z, N, M)$ , плавно зависящую от своих аргументов. Для этого потребуется «метод перевала» и обратное преобразование Лапласа.

### 1.3 МЕТОД ПЕРЕВАЛА

Метод перевала известен из теории функций комплексного переменного. Его также можно применить к нашей задаче [4]. Он нам понадобится, поскольку в обратном преобразовании Лапласа интегрирование производится вдоль мнимой оси.

Пусть имеется некоторая функция  $F(\lambda)$  вида

$$F(\lambda) = \int_C f(z)e^{\lambda S(z)} dz, \quad (1.3.1)$$

где  $C$  — некоторый контур интегрирования, а функция  $S(z)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $S(z)$  определена и имеет производную в каждой точке области  $G$ , содержащей кривую  $C$  (которая может быть неограниченной).
- 2) Существует единственная точка  $z_0$ , в которой первая производная  $S'(z_0) = 0$ .
- 3) В точке  $z_0$  вторая производная  $S''(z_0) = 0$ .

Тогда

$$F(\lambda) \xrightarrow[\lambda \in \mathbb{R}]{\lambda \rightarrow +\infty} f(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} \cdot e^{\lambda S(z_0)} e^{i\varphi_m}, \quad (1.3.2)$$

где

$$\varphi_m = \frac{\pi - \theta}{2} + m\pi, \theta = \arg(S''(z_0)). \quad (1.3.3)$$

Для доказательства рассмотрим сначала действительную функцию

$$\Phi(\lambda) = \int_a^b \varphi(x) e^{\lambda h(x)} dx. \quad (1.3.4)$$

Здесь  $h(x)$  — дифференцируемая функция на отрезке  $(a, b)$ . Существует единственная точка  $x_0$ , в которой первая производная  $h'(x_0)$  равна 0 и вторая производная  $h''(x_0)$  отрицательна. Вблизи точки  $x_0$  можно разложить функцию  $h(x)$  как

$$h(x) \approx h(x_0) + \frac{1}{2} h''(x_0) (x - x_0)^2 \quad (1.3.5)$$

и положить  $\varphi(x) \approx \varphi(x_0)$ . Здесь нет слагаемого с  $h'(x_0)$ , поскольку в  $x_0$  оно равно нулю по условию.

Введём функцию  $H(\lambda, x) = e^{\lambda(h(x) - h(x_0))}$ . При  $\lambda \gg 1$  эта функция будет выглядеть как очень резкий пик с центром в точке  $x_0$ , значение  $H(\lambda, x_0) = 1$ . Значение интеграла набирается именно около этой точки. Вне окрестности  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  значение  $H(\lambda, x)$  будет мало. Тогда можно преобразовать  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \int_a^b \varphi(x) e^{\lambda h(x)} dx = \int_a^b \varphi(x) e^{\lambda(h(x) - h(x_0))} e^{\lambda h(x_0)} dx \approx \\ &\approx \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(x_0) e^{\lambda h(x_0) + \frac{1}{2} \lambda h''(x_0) (x - x_0)^2 - \lambda h(x_0)} \cdot e^{\lambda h(x_0)} dx = \\ &= \varphi(x_0) e^{\lambda h(x_0)} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{\frac{1}{2} \lambda h''(x_0) (x - x_0)^2} dx. \end{aligned}$$

Сделаем замену

$$t = \sqrt{-\lambda h''(x_0)(x - x_0)^2} = \sqrt{-\lambda h''(x_0)} \cdot (x - x_0), \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{-\lambda h''(x_0)}}. \quad (1.3.6)$$

Тогда

$$\Phi(\lambda) = \frac{\varphi(x_0)e^{\lambda h(x_0)}}{\sqrt{-\lambda h''(x_0)}} \underbrace{\int_{-\delta\sqrt{-\lambda h''(x_0)}}^{\delta\sqrt{-\lambda h''(x_0)}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}} \rightarrow \varphi(x_0)e^{\lambda h(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(x_0)}}. \quad (1.3.7)$$

Теперь рассмотрим наш случай:  $z = x + iy$ ,  $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Здесь  $S$  полагается аналитической функцией. Тогда можно записать условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0; \\ \partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2 = 0. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Поскольку  $S''(z_0)$  по условию  $\neq 0$ , то тогда если  $\partial^2 u / \partial x^2 > 0$ , будет  $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ . То же самое для функции  $v$ . Получается, в окрестности  $z_0$  нет ни максимума, ни экстремума; есть только точка перегиба. Поэтому эта точка называется «седловой точкой». Функции  $u$  и  $v$  имеют вид гиперболического параболоида.

Для доказательства сперва надо отметить, что по теореме Коши интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования, а определяется только начальной  $z_1$  и конечной  $z_2$  точками кривой  $C$ , которую выбираем удобным образом: пусть  $\operatorname{Re}(S)$  убывает наиболее быстро, а  $\operatorname{Im}(S) = \operatorname{const}$ .

Введём обозначения 
$$\begin{cases} S''(z_0) = r e^{i\theta}; \\ z - z_0 = \rho e^{i\varphi}. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

В окрестности  $z_0$  будет  $S(z) \approx S(z_0) + S''(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{2} = S(z_0) + r \rho^2 e^{i(\theta+2\varphi)}$ . 
$$(1.3.10)$$

Получаем 
$$\begin{cases} u(x,y) = u(x_0,y_0) + r \rho^2 \cos(\theta + 2\varphi); \\ v(x,y) = v(x_0,y_0) + r \rho^2 \sin(\theta + 2\varphi). \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Отсюда видно, что линия наиболее быстрого спада  $\text{Re}(S)$  определяется  $\cos(\theta + 2\varphi) = -1$ ,  $\varphi_1 = \frac{\pi - \theta}{2}$ . Этому условию удовлетворяют также углы  $\varphi_m = \varphi_1 + \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Заодно получается, что  $\sin(\theta + \varphi_m) = 0$ , следовательно,  $v(x,y) = v(x_0, y_0) = \text{const}$ , что гарантирует отсутствие осцилляций.

Продельывая рассуждения для  $F(\lambda)$ , аналогичные описанным ранее для  $\Phi(\lambda)$ , получаем:

$$F(\lambda) \xrightarrow[\lambda \in \mathbb{R}]{\lambda \rightarrow +\infty} f(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} \cdot e^{\lambda S(z_0)} e^{i\varphi_m}, \quad (1.3.12)$$

где

$$\varphi_m = \frac{\pi - \theta}{2} + \pi m, \quad \theta = \arg(S''(z_0)) \quad (1.3.13)$$

## 1.4 ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Обратное преобразование Лапласа от  $Q(\beta, \alpha_Z, \alpha_N, k)$  к плотности одночастичных состояний  $\omega(E, Z, N, M)$  выглядит следующим образом:

$$\omega(E, Z, N, M) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int Q(\beta, \alpha_Z, \alpha_N, k) \cdot e^{\beta E - \alpha_Z Z - \alpha_N N - k M} d\beta d\alpha_Z d\alpha_N dk. \quad (1.4.1)$$

Этот интеграл в основном набирается в окрестности седловой точки, в



окрестности пика функции

$$S = \beta E - \alpha_z Z - \alpha_N N - kM + \ln Q. \quad (1.4.2)$$

В окрестности седловой точки первые производные по параметрам равны нулю. Следовательно, в некоторой окрестности этой точки  $(\beta_0, \alpha_{z0}, \alpha_{N0}, k_0)$   $S$  определяется приближённым равенством

$$\begin{aligned} S(\beta, \alpha_Z, \alpha_N, k) &\approx S_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta_0} (\beta - \beta_0)^2 + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \alpha_Z} \Big|_{\beta_0, \alpha_{z0}} (\beta - \beta_0)(\alpha_Z - \alpha_{z0}) + \dots = \\ &= S_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta_0} (\beta - \beta_0)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha_Z} \Big|_{\beta_0, \alpha_{z0}} (\beta - \beta_0)(\alpha_Z - \alpha_{z0}) + \dots \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Поскольку мы интегрируем в обратном преобразовании Лапласа вдоль мнимой оси, удобно ввести следующие переменные:

$$\beta = \beta_0 + ix_1, \quad \alpha_Z = \alpha_{z0} + ix_2, \quad \alpha_N = \alpha_{N0} + ix_3, \quad k = k_0 + ix_4. \quad (1.4.4)$$

Тогда можно преобразовать (1.4.1) как

$$\omega = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{S_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} x_1^2 - \dots - \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha_Z} x_1 x_2 - \dots} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (1.4.5)$$

Воспользуемся тем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum a_{ij} x_i x_j} dx_1 \dots dx_n = (2\pi)^{n/2} D^{-1/2}, \quad (1.4.6)$$

где  $D = \det(a_{ij})$  (без доказательства). Тогда, по сути дела, остаётся только вычислить определитель вторых производных и  $e^{S_0}$ . Ответ принимает вид:

$$\omega = \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot e^{S_0} \cdot (2\pi)^{4/2} \cdot D^{-1/2} \quad (1.4.7)$$

Напомним, что  $\ln Q = \frac{\bar{g}_Z \alpha_Z^2}{2\beta} + \frac{\bar{g}_N \alpha_N^2}{2\beta} + \frac{a}{\beta} + \frac{k^2 \cdot \bar{g} \cdot m^2}{2\beta}$ . Опустим знак среднего в плотностях. Вычислим вторые производные для определителя  $D$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} &= \frac{g_Z \alpha_Z^2}{\beta^3} + \frac{g_N \alpha_N^2}{\beta^3} + \frac{k^2 \overline{g m^2}}{\beta^3} + \frac{2a}{\beta^3}; \\
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_Z^2} &= \frac{g_Z}{\beta}; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_N^2} = \frac{g_N}{\beta}; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial k^2} = \frac{g \cdot \overline{m^2}}{\beta}; \\
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha_Z} &= -\frac{g_Z \alpha_Z}{\beta^2}; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha_N} = -\frac{g_N \alpha_N}{\beta^2}; \\
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial k} &= -\frac{k \overline{g m^2}}{\beta^2}; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_Z \partial \alpha_N} = \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_Z \partial k} = \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_N \partial k} = 0.
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Определитель равен  $D = 2gg_Zg_N a \overline{m^2} / \beta^6$ . Теперь осталось найти  $e^{S_0}$ . Для этого нужно преобразовать полученные ранее выражения к хорошему виду. Далее нулевой индекс опускается.

Выразим  $E$  через  $S$  с помощью (1.4.2). В окрестности седловой точки  $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$ . Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = E + \frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = 0 \implies E = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = \frac{g_Z \alpha_Z^2}{2\beta^2} + \frac{g_N \alpha_N^2}{2\beta^2} + \frac{a}{\beta^2} + \frac{k^2 g \cdot \overline{m^2}}{2\beta^2}. \tag{1.4.9}$$

Аналогичным образом находим:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{\partial \ln Q}{\partial \alpha_Z} = g_Z \frac{\alpha_Z}{\beta}; \\
N &= \frac{\partial \ln Q}{\partial \alpha_N} = g_N \frac{\alpha_N}{\beta}; \\
M &= \frac{\partial \ln Q}{\partial k} = \frac{k \overline{g m^2}}{\beta} \implies k = \frac{M \beta}{g \cdot \overline{m^2}}.
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Используем соотношения для основного состояния, приняв во внимание, что  $g(E > E_F) = 0$ :

$$\begin{aligned}
Z &= \int g_Z dE_Z = g_Z E_{ZF}; \\
N &= \int g_N dE_N = g_N E_{NF}; \\
E_0 &= \int g_Z E_Z dE_Z + \int g_N E_N dE_N = \frac{g_Z E_{ZF}^2}{2} + \frac{g_N E_{NF}^2}{2}.
\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Тогда из уравнений (1.4.9), (1.4.10) и (1.4.11) находим:

$$\alpha_Z = \frac{Z\beta}{g_Z} = \frac{g_Z E_{ZF} \beta}{g_Z} = \beta E_{ZF}, \quad \alpha_N = \beta E_{NF}; \quad (1.4.12)$$

$$\begin{aligned} U = E - E_0 &= \frac{g_Z \alpha_Z^2}{2\beta^2} + \frac{g_N \alpha_N^2}{2\beta^2} + \frac{a}{\beta^2} + \frac{k^2 g \cdot \overline{m^2}}{2\beta^2} - \frac{g_Z E_{ZF}^2}{2} - \frac{g_N E_{NF}^2}{2} = \\ &= \frac{a}{\beta^2} + k^2 \cdot \frac{g \cdot \overline{m^2}}{2\beta^2} = \frac{a}{\beta^2} + \left( \frac{M\beta}{g \cdot \overline{m^2}} \right)^2 \cdot \frac{g \cdot \overline{m^2}}{2\beta^2} = \frac{a}{\beta^2} + \frac{M^2}{2g\overline{m^2}}; \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

$$\frac{a}{\beta^2} = U - \frac{M^2}{2g\overline{m^2}}; \quad (1.4.14)$$

$$D = 2gg_Z g_N a \overline{m^2} / \beta^6 \xrightarrow{g_Z \approx g_N \approx g/2} \frac{g^3 a \overline{m^2}}{2\beta^6} = \frac{g\overline{m^2} \cdot (6/\pi^2)^2 a^3}{2\beta^6} = \frac{g\overline{m^2}}{2} \left( \frac{6}{\pi^2} \right)^2 \left( U - \frac{M^2}{2g\overline{m^2}} \right)^3; \quad (1.4.15)$$

$$S = \beta E - \alpha_Z Z - \alpha_N - kM + \ln Q = \dots = \frac{2a}{\beta} = 2\sqrt{a \left( U - \frac{M^2}{2g\overline{m^2}} \right)}. \quad (1.4.16)$$

Тогда, подставляя  $S$  и  $D$  в (1.4.7), получим:

$$\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} D^{-1/2} e^S = \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{2}{g\overline{m^2}}} \frac{\pi^2}{6} \left( U - \frac{M^2}{2g\overline{m^2}} \right)^{-3/2} e^{2\sqrt{a \left( U - \frac{M^2}{2g\overline{m^2}} \right)}}. \quad (1.4.17)$$

Окончательно находим плотность многочастичных состояний в модели независимых частиц:

$$\omega(U, M) = \frac{dN(U, M)}{dU} = \frac{1}{12\sqrt{2g\langle m^2 \rangle}} \frac{e^{2\sqrt{a \left( U - \frac{M^2}{2g\langle m^2 \rangle} \right)}}}{\left( U - \frac{M^2}{2g\langle m^2 \rangle} \right)^{3/2}}, \quad (1.4.18)$$

Здесь используются параметры  $g$ ,  $\langle m^2 \rangle$  и  $a$ :

- $g$  — сумма плотностей одночастичных состояний  $g_Z + g_N$  вблизи энергии Ферми.
- $\langle m^2 \rangle = \frac{1}{g}(m_Z^2 g_Z + m_N^2 g_N)$  — средний квадрат проекции углового мо-

мента нуклона на ось  $z$  в состояниях вблизи энергии Ферми.

- $a = \frac{\pi^2}{6}g$  — параметр плотности уровней.

В сферически симметричном потенциале

$$\langle l_x^2 \rangle = \langle l_y^2 \rangle = \langle l_z^2 \rangle, \quad \langle l_x^2 \rangle + \langle l_y^2 \rangle + \langle l_z^2 \rangle = \langle l^2 \rangle. \quad (1.4.19)$$

Следовательно, если  $\langle l_i^2 \rangle = \langle m^2 \rangle$ ,  $i = x, y, z$ , то  $\langle m^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle l^2 \rangle$ . В первом приближении воспользуемся классическими соображениями и скажем, что ядро — твёрдое тело, момент инерции которого  $J = \overline{m^2} \hbar^2 g$ . Для сферически симметричного ядра  $J = \frac{2}{5}mR^2$ . Тогда

$$\frac{1}{2g\langle m^2 \rangle} = \frac{\hbar^2}{2J} = \frac{\hbar^2}{\frac{4}{5}mR^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{\frac{4}{5}mc^2 R^2}, \quad R = r_0 \cdot A^{1/3}. \quad (1.4.20)$$

## 1.5 ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В ходе получения формулы (1.4.18) было сделано довольно много допущений. Далее рассказывается про использованные приближения при выводе формулы.

### 1.5.1 ЗАМЕНА ФУНКЦИИ $g$ НА СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

При вычислении интегралов (1.1.12) плотность одночастичных состояний  $g$  была вынесена из-под интеграла как среднее  $\bar{g}$  — плотность вблизи энергии Ферми.

### 1.5.2 НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В преобразовании Лапласа в показателе экспоненты находится  $-\beta E_i$ ,  $1/\beta = T$  имеет смысл температуры. Было использовано низкотемпературное приближение  $\alpha + km^+ \gg 1$ :

$$\alpha_Z + km_Z^+ = \beta E_{ZF} + \frac{M\beta}{g \cdot m^2} \gg 1. \quad (1.5.1)$$

Это приближение применялось для вычисления интегралов (1.1.12): инте-

рирование проводилось не до  $\frac{\alpha+km^+}{\beta}$ , а до  $\infty$ , и использовался табличный интеграл.

### 1.5.3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

Интеграл набирается в окрестности пика функции  $S$  (1.4.2), то есть около седловой точки. Там выполняется разложение в ряд до слагаемых второго порядка (1.4.3). Мы пренебрегаем слагаемыми более высокого порядка.

### 1.5.4 РАВЕНСТВО ПЛОТНОСТЕЙ ОДНОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ПРОТОНОВ И НЕЙТРОНОВ

При вычислении определителя  $D$  в формуле (1.4.15) было сделано приближение для плотностей одночастичных состояний  $g_Z = g_N = g/2$ .

## 1.6 ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭНЕРГИИ

Для получения  $\omega(U)$  — плотности многочастичных состояний, зависящей только от энергии  $U$ , нужно проинтегрировать выражение (1.4.18) по проекции углового момента  $M$ . Воспользуемся приближением малых угловых моментов:  $\frac{M^2}{2J} \ll U$ . Разложение показателя экспоненты имеет вид:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a\left(U - \frac{M^2}{2g\langle m^2 \rangle}\right)} &= 2\sqrt{aU}\sqrt{1 - \frac{M^2}{2g\langle m^2 \rangle U}} \approx \\ &\approx 2\sqrt{aU}\left(1 - \frac{M^2}{2 \cdot 2g\langle m^2 \rangle U}\right) = 2\sqrt{aU} - \frac{M^2}{2\sigma^2}, \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

где  $\sigma^2 = \langle m^2 \rangle g \sqrt{\frac{U}{a}} = \langle m^2 \rangle gt$  — параметр спиновой зависимости, а  $t = \sqrt{\frac{U}{a}}$  — температура ядра. Зависимостью знаменателя выражения (1.4.18) от  $M$  пренебрегаем:

$$12\sqrt{2g\langle m^2 \rangle} \left( U - \frac{M^2 \hbar^2}{2J} \right)^{3/2} \approx 12\sqrt{2\frac{\sigma^2}{\sqrt{U}}\sqrt{a}} \cdot U^{3/2} = 12\sqrt{2}\sigma U^{5/4} a^{1/4}. \quad (1.6.2)$$

Искомая плотность многочастичных состояний вычисляется следующим образом:

$$\omega(U) = \sum_M \omega(U, M) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(U, M) dM = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\sqrt{a}U} \cdot e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}}}{12\sqrt{2}\sigma a^{1/4} U^{5/4}} dM. \quad (1.6.3)$$

Результат имеет вид:

$$\omega(U) = \frac{\sqrt{\pi}}{12} \cdot \frac{e^{2\sqrt{a}U}}{a^{1/4} U^{5/4}}. \quad (1.6.4)$$

## 1.7 ПЛОТНОСТЬ УРОВНЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭНЕРГИИ И СПИНА

В модели независимых частиц плотность уровней ядра со спином  $I$  и энергией возбуждения  $U$  определяется формулой

$$\rho(U, I) = \omega(U, M = I) - \omega(U, M = I + 1) \approx -\left. \frac{\partial \omega}{\partial M} \right|_{M=I+1/2}. \quad (1.7.1)$$

Дифференцируя выражение (1.4.18) и сохраняя лишь то слагаемое, которое доминирует при условии  $\sqrt{a \left( U - \frac{M^2 \hbar^2}{2J} \right)} \gg 1$ , получаем:

$$\rho(U, I) = \frac{dN(U, I)}{dU} = \frac{2I + 1}{12} \sqrt{a} \left( \frac{\hbar^2}{2J} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{a \left( U - \frac{I(I+1)\hbar^2}{2J} \right)}}}{\left( U - \frac{I(I+1)\hbar^2}{2J} \right)^2}. \quad (1.7.2)$$

Здесь также принято, что  $M^2 = I(I + 1)$ .

## 1.8 ПЛОТНОСТЬ УРОВНЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭНЕРГИИ

Получим  $\rho(U)$  из  $\rho(U, I)$  (1.7.2). Разложим показатель экспоненты:

$$2\sqrt{a\left(U - \frac{I(I+1)\hbar^2}{2J}\right)} \approx 2\sqrt{aU} - \frac{I(I+1)}{2\sigma^2}. \quad (1.8.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\sigma^2 = \frac{J}{\hbar^2} \sqrt{\frac{U}{a}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{J}{\hbar^2}} \left(\frac{U}{a}\right)^{1/4}. \quad (1.8.2)$$

В знаменателе пренебрежём зависимостью от  $I$ :

$$\left(\frac{2J}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(U - \frac{I(I+1)\hbar^2}{2J}\right)^2 \approx 2^{3/2} \left(\sigma^2 \sqrt{\frac{a}{U}}\right)^{3/2} \cdot U^2 = 2\sqrt{2}\sigma^3 a^{3/4} U^{5/4}. \quad (1.8.3)$$

$$\begin{aligned} \rho(U) &= \int_0^\infty \rho(U, I) dI = \int_0^\infty \frac{2I}{12} \sqrt{a} \frac{e^{2\sqrt{aU} - \frac{I(I+1)}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{2}\sigma^3 a^{3/4} U^{5/4}} dI = \\ &= \frac{e^{2\sqrt{aU}}}{12\sqrt{2}a^{1/4} U^{5/4} \sigma^3} \int_0^\infty I \cdot e^{-\frac{I(I+1)}{2\sigma^2}} dI. \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

Сделаем приближение  $I(I+1) \approx I^2$ :

$$\int_0^\infty I \cdot e^{-\frac{I^2}{2\sigma^2}} dI = \sigma^2. \quad (1.8.5)$$

Подставляя (1.8.5) в (1.8.4), получаем

$$\rho(U) = \frac{e^{2\sqrt{aU}}}{12\sqrt{2}a^{1/4} U^{5/4} \sigma}, \quad (1.8.6)$$

что можно переписать в виде

$$\rho(U) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2J}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{aU}}}{12U^{3/2}}. \quad (1.8.7)$$

## 2 КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ И УРОВНЕЙ

Многочастичные состояния атомных ядер складываются из одночастичных состояний, характеризуемых энергией и определёнными квантовыми числами. Нуклоны могут занимать или не занимать эти состояния. Условимся, что наличие частицы обозначается «1», отсутствие — «0». Тогда многочастичное состояние может быть задано как последовательность нулей и единиц. Основное состояние ядра задаётся числами заполнения  $\{1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots\}$ . Число нуклонов, их полная энергия и полная проекция углового момента на ось  $z$  вычисляются по формулам, аналогичным (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3).

### 2.1 АЛГОРИТМ ПЕРЕБОРА МНОГОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Ясно, что перебирая все возможные комбинации чисел заполнения, можно перебрать все возможные многочастичные состояния и, следовательно, найти их плотность. Этот метод называется комбинаторным. В современных подходах такого рода (см., например, [8—10]) используются довольно продвинутые методы моделирования одночастичных состояний, в которых помимо самосогласованного потенциала учитывается остаточное взаимодействие между нуклонами. В данной работе остаточное взаимодействие не учитывается, но используются разные модельные самосогласованные потенциалы для формирования одночастичных состояний. Для всех этих потенциалов результаты комбинаторных расчётов сравниваются с расчётами, выполненными по аналитическим формулам в модели неза-



висимых частиц.

Вычисления проводились в предположении, что протоны и нейтроны находятся в одной потенциальной яме. Пренебрегаем кулоновским отталкиванием протонов по сравнению с сильным взаимодействием. Ход работы алгоритма такой:

- 1) Ввод параметров: количество нейтронов  $N_n$ , протонов  $N_p$ , а также энергии возбуждения  $U_{\max}$  в МэВ, перевод в безразмерные единицы. Здесь  $U$  соответствует размерной энергии,  $u$  — безразмерной.
- 2) Построение массива одночастичных состояний.
- 3) Перебор многочастичных состояний отдельно для нейтронной и протонной подсистем с энергиями возбуждения от 0 до  $u_{\max}$  с некоторым шагом  $\Delta u$ . Здесь также собирается информация о проекциях угловых моментов и чётности. Это учтено в случае модифицированного осциллятора.
- 4) Получение зависимостей количества многочастичных состояний от энергии возбуждения  $u$ , проекции углового момента  $J_z$ , а также зависимостей количества уровней от энергии возбуждения  $u$  и спина ядра  $I$ . Перевод обратно в размерные единицы.

## 2.2 ПЕРЕБОР МНОГОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ПОДСИСТЕМЫ

Пусть имеется  $N$  частиц. Алгоритм работы следующий: сначала мы перемещаем частицу из  $N$ -го одночастичного состояния в  $(N + 1)$ . Затем  $(N - 1) \rightarrow N$ , на следующем шаге  $(N - 2) \rightarrow (N - 1)$  и т.д. до тех пор, пока не дойдём до конца и частицы не кончатся. Тут получаем многочастичное состояние  $\{0, \dots, 1, \underbrace{1}_{N+1}, 0, \dots\}$ . Затем сдвигаем всю систему в исходное положение, кроме самой последней частицы — мы перемещаем её из  $(N + 1)$  в  $(N + 2)$ , а с отстатком проводим ту же самую операцию до тех пор, пока не окажемся в состоянии  $\{0, 1, \dots, \underbrace{1}_N, 0, 1, 0, \dots\}$ . Потом сдвигаем остаток системы влево кроме  $N$ -й частицы, которая идёт в  $(N + 1)$  состояние, и получается  $\{1, 1, \dots, 0, \underbrace{0}_N, 1, 1, 0, \dots\}$ . Продолжая действовать подобным

образом, можно построить итерационный алгоритм, который перебирает абсолютно все многочастичные состояния, которых оказывается ровно  $C_n^k$ ,  $n$  — общее количество свободных и занятых ячеек,  $k$  — количество занятых частицами ячеек. Это схематично изображено на рисунке 2.1.

Остаётся учесть ограничения на энергии. Поскольку одночастичные состояния выстроены в порядке возрастания энергии, то чем правее находится частица, тем большее её энергия. На основании этого можно на много порядков сократить время расчёта. Для более подробного объяснения надо посмотреть код программы.

Напомним, что  $U$  соответствует размерной энергии, а  $u$  — безразмерной. Отметим, что в программе удобно перейти к целым числам, то есть использовать  $2J_z$  вместо  $J_z$ . Пусть в результате работы алгоритма мы получили  $\omega_n$  и  $\omega_p$  — количество многочастичных состояний для нейтронной и протонной подсистем соответственно для безразмерной энергии возбуждения в интервале  $[u; u + \Delta u)$ , удвоенной проекции углового момента на ось  $z$  и чётности. Далее надо получить все интересующие нас распределения.

## 2.3 ПЕРЕВОД РАЗМЕРНЫХ ВЕЛИЧИН В БЕЗРАЗМЕРНЫЕ

Пользователь вводит энергию  $U_{\max}$  в МэВ, до которой нужно посчитать распределения. В программе работа ведётся в безразмерных целых числах, поскольку при использовании типа данных с плавающей запятой будет проблематично сравнение на эквивалентность, а также будет накапливаться ошибка. Надо ввести некоторую характерную для данной модели энергию. В модели

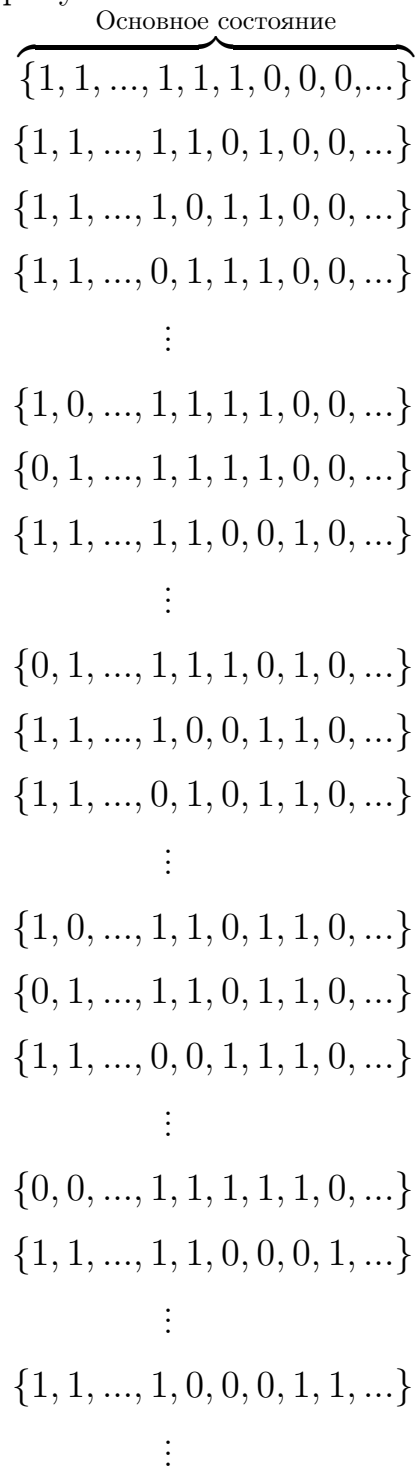


Рисунок 2.1 — Алгоритм перебора многочастичных состояний без ограничений на энергию

трёхмерного осциллятора, например, размерный множитель будет равен

$$\hbar\omega = 40A^{-1/3} \text{ МэВ}, \quad (2.3.1)$$

согласно [1], формула (2.131).

В этом случае за единицу энергии принимаем  $\Delta U = \hbar\omega/k$ , где  $k$  соответствует степени разбиения: чем больше  $k$ , тем на большее количество отрезков разбивается энергетический диапазон. Для модели трёхмерного осциллятора оптимальное значение  $k$  равно 10. Так, для ядра  $40\text{Ca}$  значение  $\hbar\omega = 40 \cdot 40^{-1/3} = 11.696 \text{ МэВ}$ , а  $\Delta U = 1.1696 \text{ МэВ}$ . Безразмерная энергия  $u$  — это  $\frac{U}{\Delta U}$ , округлённое в нижнюю сторону. Если  $U_{\max} = 20 \text{ МэВ}$ , то для ядра  $40\text{Ca}$   $U_{\max}/\Delta U = 17.09 \Rightarrow u_{\max} = 17$ . Шаг безразмерной энергии  $\Delta u$  везде равен 1.

Стоит сделать очень важное замечание. При таких условиях перевода в безразмерные величины только  $u$  и  $\Delta u$  остаются целыми числами, в то время как, например, для трёхмерного осциллятора энергии уровней и, следовательно, многочастичных состояний не обязаны быть целыми; они в любом случае попадут в нужный интервал энергий  $[u, u + \Delta u)$ , с которым далее удобно работать.

## 2.4 ПОЛУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭНЕРГИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Для получения  $\omega(u) = \frac{\Delta N}{\Delta u}$  в интервале  $[u, u + \Delta u)$  нужно из  $\omega_n(u_n, 2J_{nz}, P_n)$  для нейтронов и  $\omega_p(u_p, 2J_{pz}, P_p)$  для протонов извлечь  $\omega_n(u_n)$  и  $\omega_p(u_p)$  соответственно, то есть просуммировать по всем  $2J_{nz}$  и  $2J_{pz}$ , а также по чётностям. Затем надо при определённой энергии возбуждения  $u$  перебрать все возможные случаи, когда эта энергия идёт в разных пропорциях в протонную и нейтронную подсистемы, то есть

$$\omega(u) = \sum_{i=0}^u \omega_n(i)\omega_p(u-i) \quad (2.4.1)$$

с шагом  $\Delta u = 1$ . Таким образом, получаем:

$$\omega(u) = \sum_{i=0}^u \omega_n(i) \omega_p(u-i) = \sum_{i=0}^u \left[ \sum_{P_n} \sum_{2J_{nz}} \omega_n(i, 2J_{nz}, P_n) \right] \cdot \left[ \sum_{P_p} \sum_{2J_{pz}} \omega_p(u-i, 2J_{pz}, P_p) \right]. \quad (2.4.2)$$

## 2.5 ПОЛУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРОЕКЦИИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Сейчас мы хотим получить  $\omega(u, 2J_z, P)$  и построить распределение по  $2J_z$ , но надо проделать ряд нетривиальных манипуляций с  $\omega_n(u_n, 2J_{nz}, P_n)$  и  $\omega_p(u_p, 2J_{pz}, P_p)$ .

Предположим, мы хотим получить количество состояний с проекцией  $J_z = 0$  с некоторой чётностью  $P$ . Границы распределения по  $2J_{nz}$  и  $2J_{pz}$  были выбраны от -50 до 50 включительно. Тогда надо взять сумму элементов из протонного и нейтронного массива так, чтобы в каждом слагаемом выполнялось условие  $J_{nz} + J_{pz} = J_z = 0$ . То есть берём  $\omega_n(u_n, -50, P_n)$  и умножаем на  $\omega_p(u_p, 50, P_p)$ , затем  $\omega_n(u_n, -49, P_n) \cdot \omega_p(u_p, 49, P_p)$  и так далее до  $\omega_n(u_n, 50, P_n) \cdot \omega_p(u_p, -50, P_p)$ . Теперь надо учесть, что в протонную и нейтронную подсистему может пойти разное количество энергии, лишь бы выполнялось равенство  $u_n + u_p = u$ . Также надо учесть, что произведение чётной (Ч) и нечётной (Н) подсистем даёт (Н), также как и (Н)  $\times$  (Ч). Для (Ч) тоже два варианта: (Ч)  $\times$  (Ч) и (Н)  $\times$  (Н) Тогда получим

$$\omega(u, 0, P) = \sum_{i=0}^u \sum_{k=-50}^{50} \left[ \omega_n(i, k, P_n) \cdot \omega_p(u-i, -k, P_p) + \omega_n(i, k, -P_n) \cdot \omega_p(u-i, -k, -P_p) \right]. \quad (2.5.1)$$

Здесь  $P = P_n \cdot P_p = (-P_n) \cdot (-P_p)$ . Чтобы теперь получить значения для

$2J_z \neq 0$ , надо сделать некоторую «сдвигку», поскольку мы не сможем получить  $2J_z = 1$ , складывая  $2J_{nz} = -50$  с  $2J_{pz} = 51$ , так как пределы установлены равными с обеих сторон и равны 50, то есть не существует элемента в массиве с  $2J_{pz} = 51$ . Надо складывать, начиная с  $2J_{nz} = -49$ ,  $2J_{pz} = 50$  и заканчивая  $2J_{nz} = 50$ ,  $2J_{pz} = -49$ .

В массивах  $\omega_n(u_n, 2J_{nz}, P_n)$  и  $\omega_p(u_p, 2J_{pz}, P_p)$  половина значений нулевые в силу закона сохранения количества движения (если, например,  $N_p$  нечётно, то  $2J_{pz}$  будет нечётно). Тогда можно оптимизировать алгоритм и перемножать только ненулевые элементы. Если в подсистеме нечётное количество нуклонов, то нули для удвоенной проекции углового момента будут стоять при чётных индексах, если чётное — то при нечётных. Для более подробного объяснения требуется смотреть код программы.

Ожидается некоторое распределение, напоминающее кривую Гаусса. Теоретически оно описывается формулой (1.4.18) при фиксированной энергии, имеет максимум в нуле и фиксированные границы распределения, т.к. слагаемое  $\frac{M^2}{2g\langle m^2 \rangle}$  не может быть больше  $U$ .

## 2.6 ПОЛУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ УРОВНЕЙ

Чтобы получить плотность уровней  $\rho(u, 2J, P)$  из плотности состояний  $\omega(u, 2J, P)$ , надо взять только те состояния, у которых проекция углового момента равна  $J$ . Тогда можно записать:

$$\rho(u, 2J, P) = \omega(u, 2J_z, P) - \omega(u, 2J_z + 2, P), \quad 2J = 2J_z \geq 0. \quad (2.6.1)$$

$$\rho(u, I, P) = \omega(u, M, P) - \omega(u, M + 1, P), \quad 2J = 2J_z \geq 0. \quad (2.6.2)$$

Также можно получить зависимость от энергии возбуждения:

$$\rho(U) = \sum_{2J} \sum_P \rho(u, 2J, P). \quad (2.6.3)$$

# 3 МОДЕЛЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯМЫ С НЕПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

## 3.1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

На начальной стадии для моделирования использовалась модель прямоугольной ямы. Считалось, что количество протонов и нейтронов в ядре одинаково. Рассматривались достаточно лёгкие ядра. Анализ такой простой модели был первым шагом в разработке алгоритма и последующей сверкой с аналитической формулой (1.6.4). Для самосогласованного потенциала было принято:

$$U(x, y, z) = \begin{cases} -U_0, & \text{если } 0 < x < b, 0 < y < b, 0 < z < b, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Если глубина потенциальной ямы велика, то энергии низших состояний приблизительно равны энергиям состояний в потенциале с бесконечно высокими стенками. Тогда энергии таких состояний относительно дна потенциальной ямы определяются формулой

$$E_{ijk} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} (i^2 + j^2 + k^2). \quad (3.1.2)$$

Мы считали, что энергии всех рассматриваемых нами состояний описываются этой формулой. Таким образом, фактически, мы рассматриваем потенциальную яму с непроницаемыми стенками.

Для моделирования использовалась безразмерная энергия

$$\varepsilon = i^2 + j^2 + k^2. \quad (3.1.3)$$

Здесь мы ограничили максимальную энергию:  $\varepsilon_{\max} = 38$ . Квантовыми чис-

лами, характеризующими одночастичные состояния, являются  $(i, j, k, \sigma)$ , где  $\sigma = 2s_z = \pm 1$ ,  $s_z$  — проекция спина нуклона на ось  $z$ .

Одночастичные состояния нумеруются в следующем порядке:

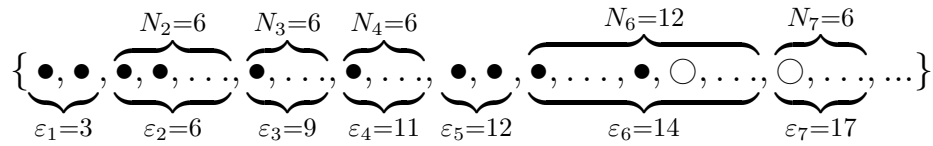
- 1) По энергии.
- 2) При определённой энергии первым идёт такое состояние  $(ijk)$ , у которого «сумма» чисел (конкатенация)  $\overline{ijk}$  наименьшая.
- 3) Учёт проекции спина. Сначала идёт «+», затем «-».

В таблице 3.1 отражена вся нужная информация по одночастичным состояниям в данной модели.

Таблица 3.1 — Энергетическое распределение основных состояний

Номер уровня $n$	$ijk$	Энергия уровня $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_n$	Кратность вырождения уровня $d_n$	Суммарная энергия $\sum \varepsilon_n$
1	111	3	2	6
2	112, 121, 211	6	6	42
3	122, 212, 221	9	6	96
4	113, 131, 311	11	6	162
5	222	12	2	186
6	123, 132, 213, 231, 312, 321	14	12	354
7	223, 232, 322	17	6	456
8	114, 141, 411	18	6	564
9	133, 313, 331	19	6	678
10	124, 142, 214, 241, 412, 421	21	12	930
11	223, 232, 322	22	6	1062
12	224, 242, 422	24	6	1206
13	134, 143, 314, 341, 413, 431	26	12	1518
14	115, 151, 511, 333	27	8	1734
15	234, 243, 324, 342, 423, 432	29	12	2082
16	125, 152, 215, 251, 512, 521	30	12	2442
17	225, 252, 522, 144, 414, 441	33	12	2838
18	334, 343, 433	34	6	3042
19	135, 153, 315, 351, 513, 531	35	12	3462
20	244, 424, 442	36	6	3678
21	235, 253, 325, 352, 523, 532, 116, 161, 661	38	18	4362

Тогда энергетический спектр выглядит следующим образом:



Особенности модели:

- Используем приближение:  $N_n = N_p$ .
- Ширина потенциальной ямы  $b$ :  $b^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$ ,  $R \approx r_0 \cdot A^{1/3}$ . Тогда ширину можно явно выразить:  $b = r_0 \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi A}$ ,  $r_0 \approx 1.6$  фм.
- Характерная энергия:  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} \equiv \frac{\pi^2 \hbar^2 c^2}{2(mc^2)} \cdot \frac{1}{b^2}$

### 3.2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим данную модель применительно к, например, ядру  $^{44}\text{Ti}$ .

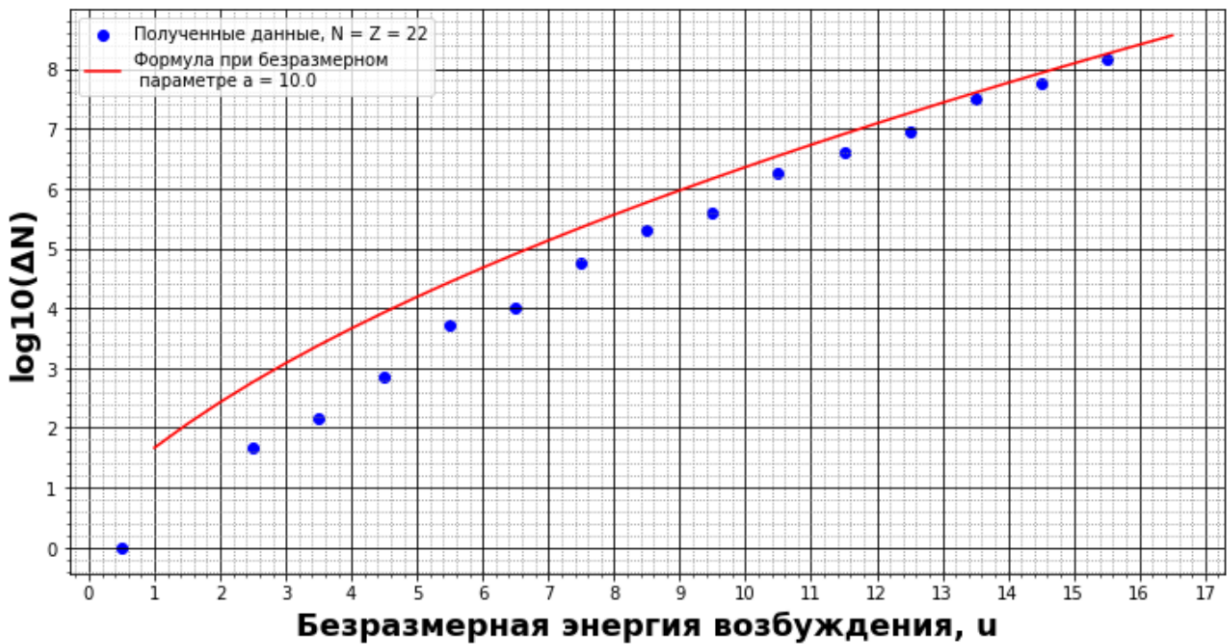


Рисунок 3.1 — Зависимость плотности многочастичных состояний от безразмерной энергии возбуждения  $u$  для  $N = Z = 22$ . Синие точки — количество многочастичных состояний в интервале энергий  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине интервала. Красная линия — аналитическая кривая (1.6.4), полученная для безразмерного параметра  $a = 10.0$

На рисунке 3.1 по оси абсцисс отложена безразмерная энергия воз-



буждения ядра  $u$ . Здесь синие точки — десятичный логарифм от количества многочастичных состояний  $\lg(\Delta N)$  с энергией возбуждения в интервале  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине интервала, т.е. при  $u + \Delta u/2$ . Красная линия — десятичный логарифм от формулы (1.6.4), переведённой в безразмерные величины.

Однако по рисунку видно, что точка, отвечающая диапазону энергий  $[1, 2)$ , отсутствует. Так получилось потому, что в данном интервале энергий количество возможных многочастичных состояний оказалось равно нулю. При использовании логарифмического масштаба такие точки не отображаются.

Единицей энергии выступает та же величина  $\Delta U = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2}$ , что и в случае одночастичных состояний. Поскольку здесь  $A = 44$ , то характерная энергия  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2}$  равна 2.475 МэВ. Подбором параметра плотности уровней  $a$  находим вид аналитической кривой, наилучшим образом согласующийся с полученными данными. Отсюда получаем безразмерный параметр плотности уровней  $a = 10.0$ . Тогда размерный параметр  $a = \frac{10.0}{2.475 \text{ МэВ}} = 4.04 \text{ МэВ}^{-1}$ .

В книге [4] в *Приложении табл. П2* есть таблица данных, где указаны значения  $a[\text{МэВ}^{-1}]$ . Так, для ядра  ${}^{44}\text{Ca}$  параметр  $a = 6.34 \text{ МэВ}^{-1}$ . Получается различие примерно в  $\sim 1.5$  раза. То же самое можно проделать для других  $N$  и  $Z$ :

- 20+20 частиц:  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} = 2.637 \text{ МэВ} \implies a = \frac{10.5}{2.637} = 3.982 \text{ МэВ}^{-1}$ . Табличное:  $a({}^{41}\text{Ca}) = 5.44 \text{ МэВ}^{-1}$ .
- 22+22 частиц:  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} = 2.475 \text{ МэВ} \implies a = \frac{10}{2.475} = 4.041 \text{ МэВ}^{-1}$ . Табличное:  $a({}^{45}\text{Ti}) = 6.84 \text{ МэВ}^{-1}$ .
- 24+24 частиц:  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} = 2.335 \text{ МэВ} \implies a = \frac{15}{2.335} = 6.423 \text{ МэВ}^{-1}$ . Табличное:  $a({}^{50}\text{Cr}) = 6.54 \text{ МэВ}^{-1}$ .
- 26+26 частиц:  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} = 2.214 \text{ МэВ} \implies a = \frac{19}{2.214} = 8.582 \text{ МэВ}^{-1}$ . Табличное:  $a({}^{54}\text{Fe}) = 6.13 \text{ МэВ}^{-1}$ .

При этом стоит принять во внимание то, что моделирование проводилось для  $N = Z = \frac{A}{2}$ ; в таблице даны значения для  $N \neq Z$ . К тому же, значение размерного параметра  $a$  сильно зависит от  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2}$ , от выбора  $r_0$ , которое было принято равным 1.6 фм вместо привычных 1.2 фм, чтобы увеличить значения параметра  $a$ .  $a_{\text{таб}}({}^{45}\text{Ti}) = 6.84 \text{ МэВ}^{-1}$ .

## 4 МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассмотрение модели одномерного гармонического осциллятора проводилось с целью сравнения результатов работы алгоритма и предсказаний аналитической формулы (1.6.4). Также здесь были исследованы ограничения на аналитическую формулу. Особенности этого спектра являются:

- $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- Энергетический спектр  
 $\{\varepsilon_1^+, \varepsilon_1^-, \varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-, \dots, \varepsilon_n^+, \dots\} = \{0^+, 0^-, 1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 3^+, 3^-, \dots\}$   
Здесь «+» или «-» соответствуют квантовому числу  $\sigma = \pm 1$  — удвоенной проекции спина на ось  $z$ .
- Постоянная плотность одночастичных состояний  $\frac{\Delta N}{\Delta E} = \frac{1}{\hbar\omega} = g = \text{const.}$

### 4.1 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Используем безразмерные единицы энергии. Пусть  $\varepsilon \equiv n = \frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  В безразмерных переменных  $g \equiv 1$ . Шаг по энергии  $\Delta u$  равен 1. Рассмотрим, например, ядро  $^{40}\text{Ca}$ , у которого 20 нейтронов и 20 протонов.

Используя алгоритм, можно получить зависимость плотности многочастичных состояний подсистемы нейтронов  $\omega_n$  или протонов  $\omega_p$  от энергии возбуждения  $u_n$  или  $u_p$  соответственно, см. таблицу 4.1:

Таблица 4.1 — Зависимость  $\omega_n$  от  $u_n$  для подсистемы из 20 частиц

$\omega_n$	1	4	9	20	42	80	147	260	445	744	1215	1940	3047	...
$u_n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

Фактически,  $\omega_n(u_n)$  — это количество многочастичных состояний, приходящихся на интервал энергий  $[u_n, u_n + \Delta u_n)$ , где  $\Delta u_n = 1$ .

Далее из  $\omega_n(u_n)$  и  $\omega_p(u_p)$  можно получить  $\omega(u)$  с помощью (2.4.2). Для системы из 20 нейтронов и 20 протонов можно составить таблицу 4.2

Таблица 4.2 — Зависимость  $\omega(u)$  от  $u$  для системы из 20+20 частиц

$\omega(u)$	1	8	34	112	325	856	2090	4816	10580	22328	45540	...
$u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

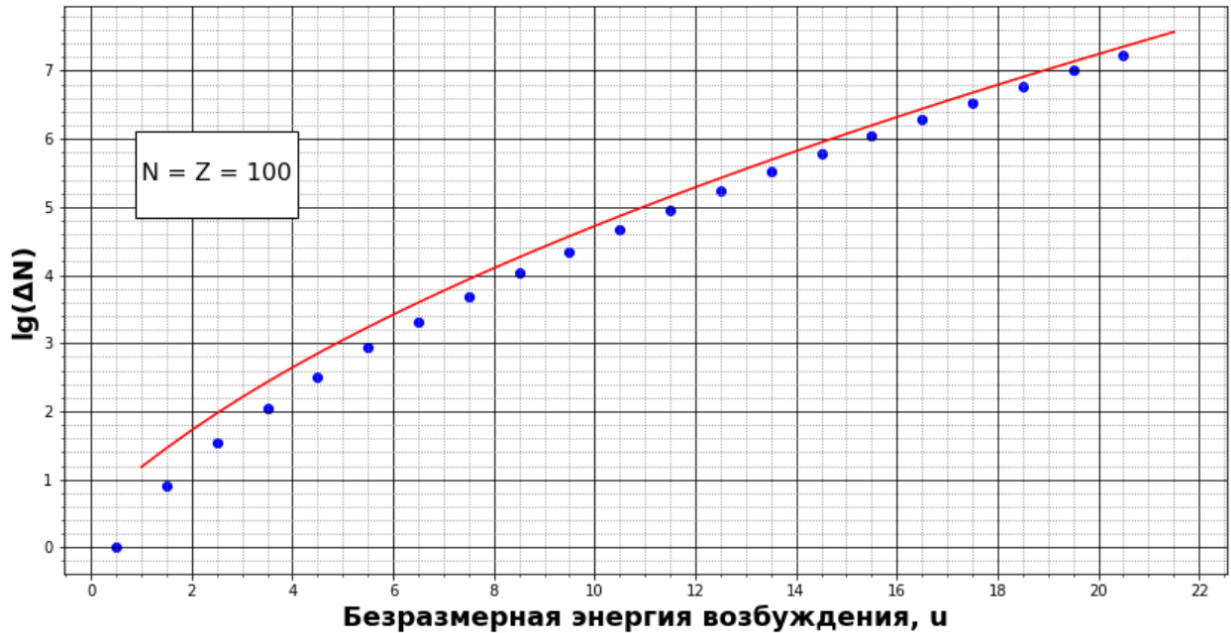


Рисунок 4.1 — Плотность многочастичных состояний в зависимости от безразмерной энергии возбуждения. Красная кривая — аналитическая формула (1.6.4) для безразмерного параметра  $a = 6.58$ . Синие точки — количество многочастичных состояний в интервале энергий  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине интервала. Расчёт выполнен для модельного ядра  $N_n = 100$ ,  $N_p = 100$ .

Напомним, что в аналитической формуле  $a = \frac{\pi^2}{6} \cdot g(E_F)$ . В безразмерных величинах  $g = 1 \implies a = \frac{\pi^2}{6}$ . Учитывая, что в системе есть частицы двух сортов (протоны и нейтроны), параметр  $a$  просто удваивается.

Следует также учесть вырождение состояний по проекции на ось  $z$ . Тогда на каждое одночастичное состояние приходится не энергия  $\hbar\omega$ , а  $\frac{\hbar\omega}{2}$ . То есть  $g$  надо ещё раз умножить на 2, и мы получим  $a = \frac{2\pi^2}{3} = 6.58$ . Поэтому полученные данные на рисунке 4.1 сравнивались с формулой (1.6.4) именно при таком значении параметра  $a$ .

Оказывается, что в силу эквидистантности одночастичного спектра плотность состояний не зависит от чисел  $N_n$  и  $N_p$ . В данной модели плот-

ность возбуждённых многочастичных состояний определяется только энергией возбуждения.

Почему так получается? Для простоты рассмотрим  $N_n$  нуклонов (например, нейтронов) одного типа. Здесь используется обозначение  $\varepsilon^P$ , где  $\varepsilon$  — энергия одночастичного состояния,  $\varepsilon = 0, 1, 2, \dots$ ,  $P$  — чётность этого состояния. Поскольку спектр эквидистантный, то, например, для малой энергии возбуждения (скажем,  $u = 1$ ) совершенно без разницы, каково число  $N_n$  частиц. В любом случае при  $u = 1$  будут перестановки  $\varepsilon^+ \rightarrow (\varepsilon + 1)^+$ ,  $\varepsilon^+ \rightarrow (\varepsilon + 1)^-$ ,  $\varepsilon^- \rightarrow (\varepsilon + 1)^+$ ,  $\varepsilon^- \rightarrow (\varepsilon + 1)^-$ . Точно так же с  $u = 2, 3$ , и т.д. до тех пор, пока  $u$  не станет равным  $N_n/2 + 1$ .

Энергия  $u = N_n/2$  (округлённая до целого числа в большую сторону при нечётных  $N_n$ ) может возбудить частицу в низшем энергетическом состоянии ( $0^+$  или  $0^-$ ), а энергия  $N_n/2 + 1$  уже не может возбудить частицы в состоянии  $(-1)^+$  и  $(-1)^-$ , поскольку энергия  $\varepsilon$  начинается с нуля. Поэтому в данном случае количество многочастичных состояний будет различным.

## 4.2 ОГРАНИЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

Ожидается, что при  $u > \frac{N}{4}$ ,  $N = N_n + N_p$ ,  $N_n = N_p$  начнутся отклонения от аналитической формулы (1.6.4). Посмотрим, что происходит при малых количествах частиц:  $N_n = N_p = 2, 4, 6, 8, 10$ . Эти случаи отражены на рисунках 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6. При относительно больших энергиях наблюдается отклонение от красной (аналитической) линии. Пусть серьёзным отклонением будет

$$2 = \frac{\omega_{\text{теор}}}{\omega_{\text{модел}}} = \frac{10^{\lg(\omega_{\text{T}})}}{10^{\lg(\omega_{\text{M}})}} = 10^{\lg(\omega_{\text{T}}) - \lg(\omega_{\text{M}})} \quad (4.2.1)$$

$$\lg(\omega_{\text{T}}) - \lg(\omega_{\text{M}}) = \lg(2) \approx 0.3 \quad (4.2.2)$$

Для оценки пусть будет не 0.3, а 0.4, поскольку насечки на оси ординат сделаны с шагом 0.2. То есть две маленьких клетки по вертикали — уже «серьёзное» отклонение.

1)  $N_n = N_p = 2$ . Практически сразу идёт несоответствие (рис. 4.2).

- 2)  $N_n = N_p = 4$ . «Серьёзное» отклонение наступает при  $u_{\text{крит}} = 7$  (рис. 4.3).
- 3)  $N_n = N_p = 6 \implies u_{\text{крит}} = 13$  (рис. 4.4).
- 4)  $N_n = N_p = 8 \implies u_{\text{крит}} = 20$  (рис. 4.5).
- 5)  $N_n = N_p = 10 \implies u_{\text{крит}} = 30$  (рис. 4.6).

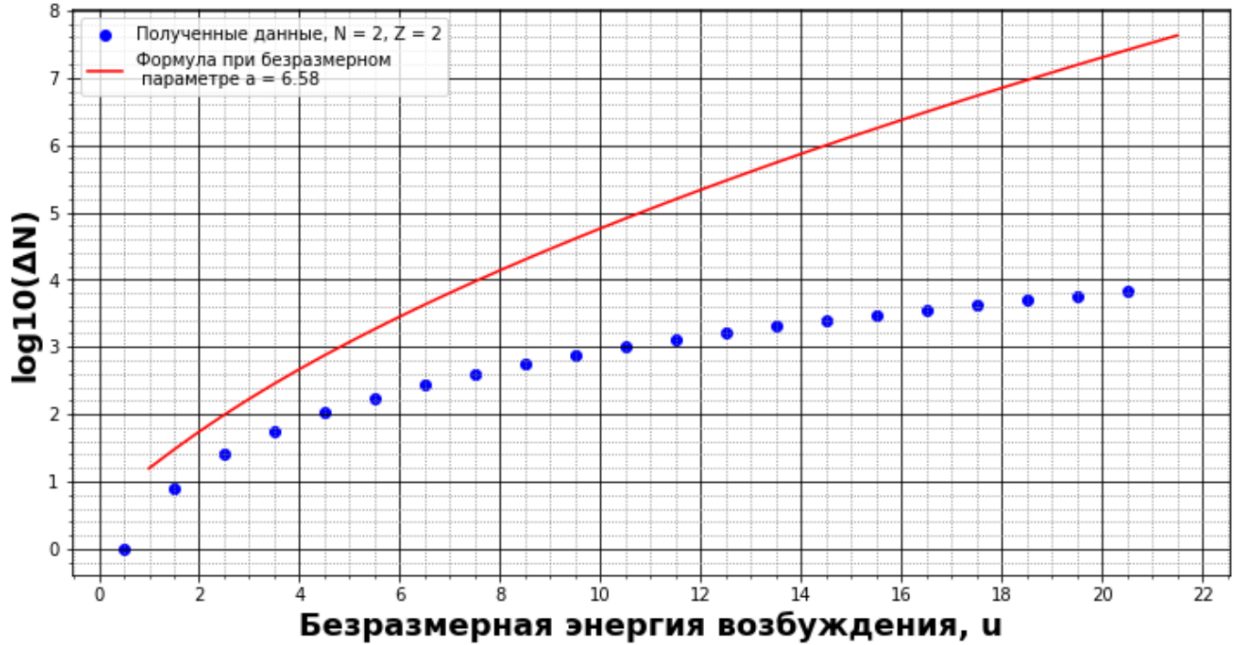


Рисунок 4.2 — Плотность многочастичных состояний в зависимости от безразмерной энергии возбуждения.  $N_n = N_p = 2$ . Синие точки — количество многочастичных состояний в диапазоне  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине диапазона. Красная линия соответствует формуле (1.6.4)

Видно, что «серьёзное» отклонение наступает позже значения  $\frac{N}{4}$ . Это может быть связано с тем, как мы определяем предельно допустимое  $\frac{\omega_{\text{теор}}}{\omega_{\text{модел}}}$ : если бы оно было меньше, чем 2, то соответствующая энергия возбуждения  $u_{\text{крит}}$  была бы меньше.

Сравнение проводилось с аналитической формулой при параметре плотности уровней  $a = 6.58$ . При этом стоит отметить, что полученные значения оказываются всегда под аналитической кривой. Это связано с тем, что при довольно большой энергии начинается сказываться конечность числа частиц.

Из представленных рисунков можно сказать, когда аналитическая формула не работает: количество частиц мало, а энергии велики.

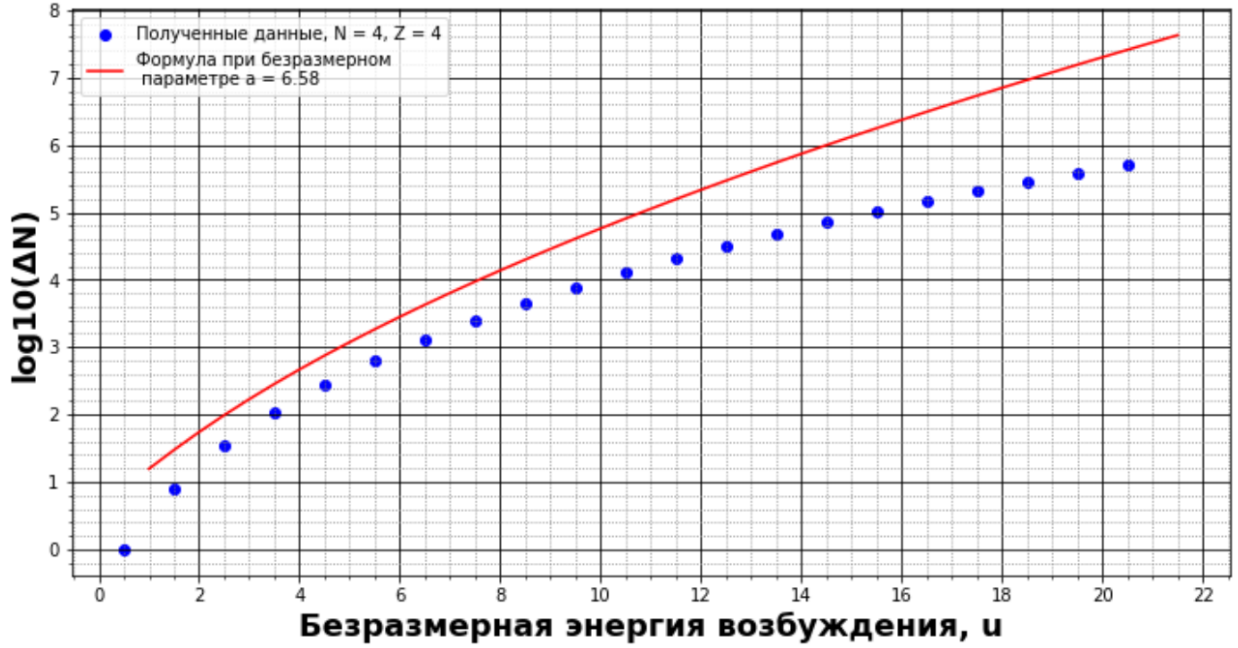


Рисунок 4.3 — Плотность многочастичных состояний в зависимости от безразмерной энергии возбуждения.  $N_n = N_p = 4$ . Синие точки — количество многочастичных состояний в диапазоне  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине диапазона. Красная линия соответствует формуле (1.6.4)

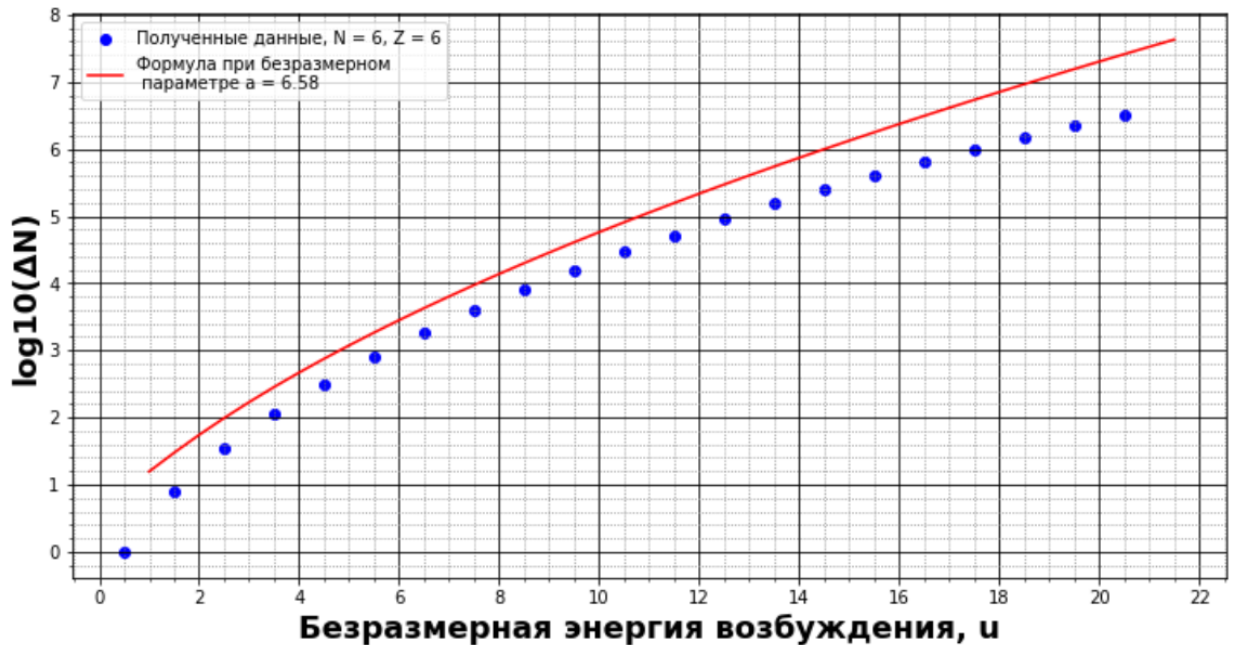


Рисунок 4.4 — Плотность многочастичных состояний в зависимости от безразмерной энергии возбуждения.  $N_n = N_p = 6$ . Синие точки — количество многочастичных состояний в диапазоне  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине диапазона. Красная линия соответствует формуле (1.6.4)

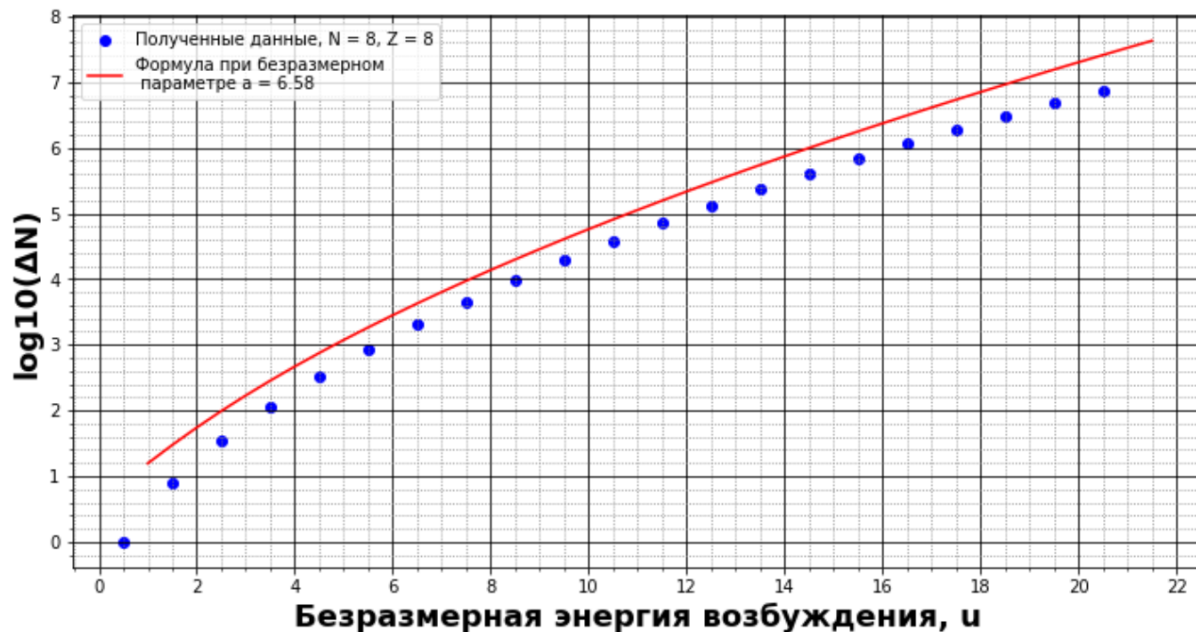


Рисунок 4.5 — Плотность многочастичных состояний в зависимости от безразмерной энергии возбуждения.  $N_n = N_p = 8$ . Синие точки — количество многочастичных состояний в диапазоне  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине диапазона. Красная линия соответствует формуле (1.6.4)

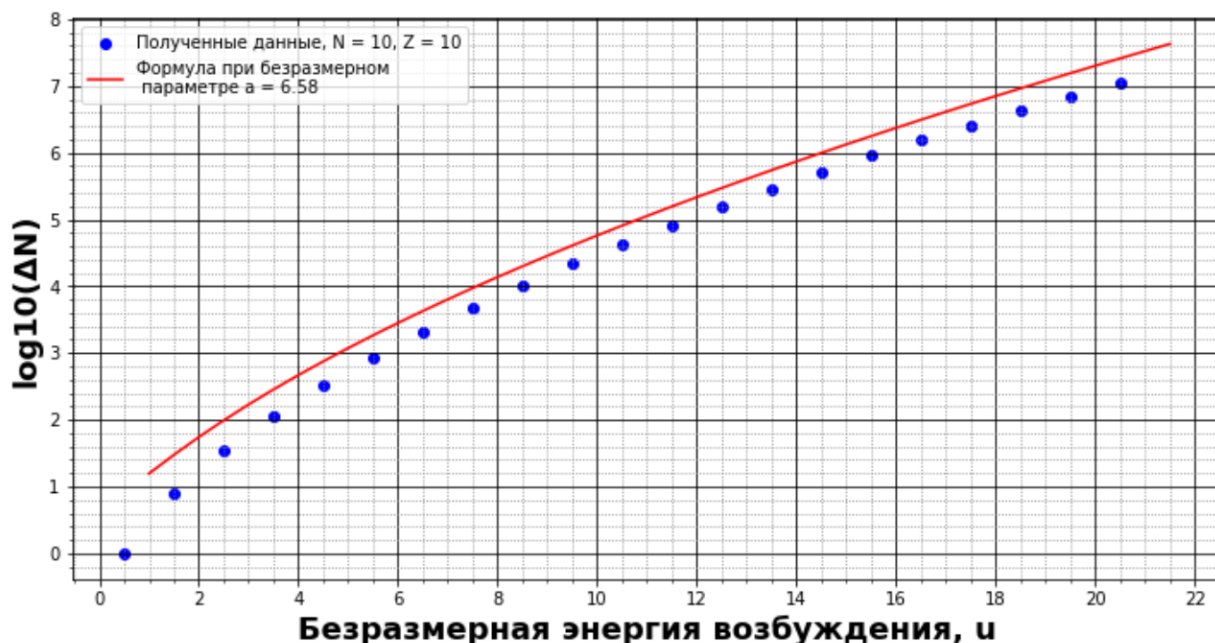


Рисунок 4.6 — Плотность многочастичных состояний в зависимости от безразмерной энергии возбуждения.  $N_n = N_p = 10$ . Синие точки — количество многочастичных состояний в диапазоне  $[u, u + \Delta u)$ . Точка ставится посередине диапазона. Красная линия соответствует формуле (1.6.4)

## 5 МОДЕЛЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В этом разделе рассматриваются одночастичные состояния в модифицированном трёхмерном осцилляторе (значения энергий взяты из статьи Нильсона [11]). На рисунке 5.1 представлены одночастичные состояния в зависимости от энергии и параметра деформации, который у нас полагается равным нулю.

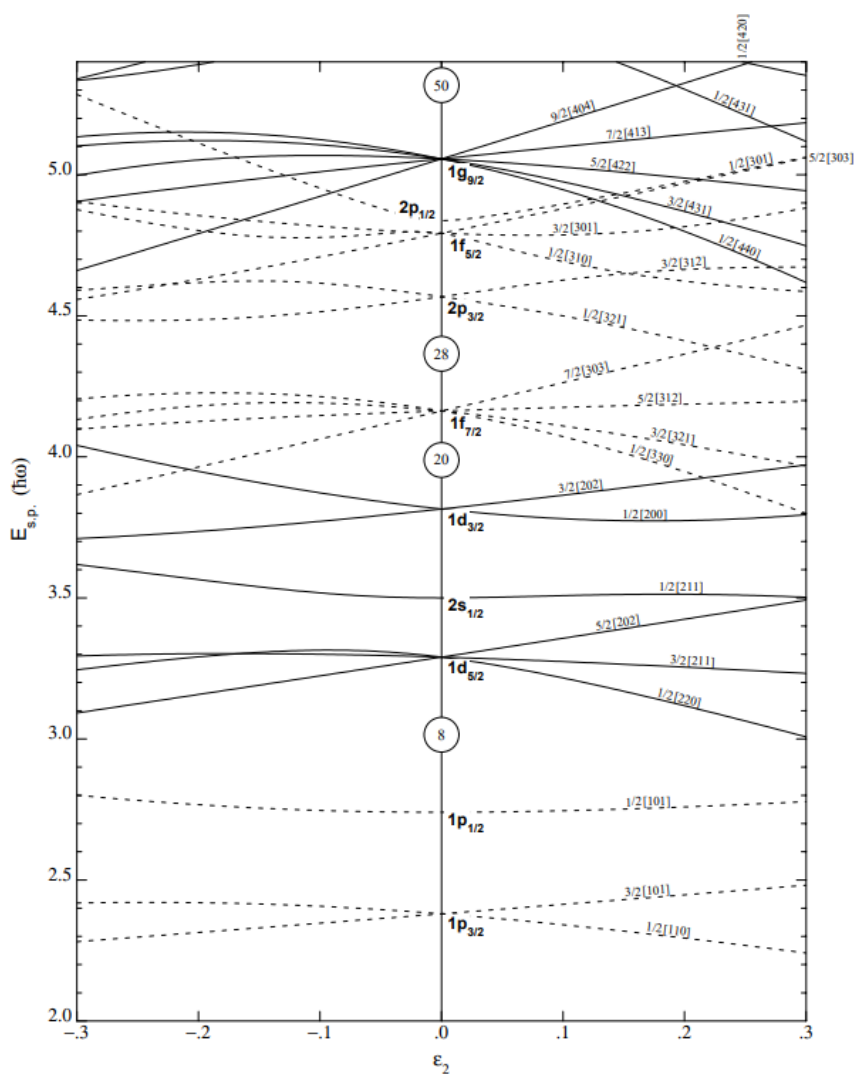


Figure 4. Nilsson diagram for protons or neutrons,  $Z, N \leq 50$  ( $\epsilon_4 = 0$ ).

Рисунок 5.1 — Схема Нильсона для  $N, Z < 50$



Из этой диаграммы взяты энергии и квантовые числа. Так, на уровне  $1P_{3/2}$  расположены 4 одночастичных состояния, выстроенных в порядке убывания проекции углового момента. Посмотрим на некоторые результаты для данной модели одночастичных состояний.

## 5.1 ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭНЕРГИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Рассмотрим, к примеру, ядро  $40K$  с энергией возбуждения  $U_{\max}$  до 20 МэВ. На рисунке 5.2 изображены синие точки, посчитанные методом (2.4.2), а также чёрная линия, которая отвечает аналитической формуле (1.6.4) с параметром плотности уровней  $a = 5.34 \text{ МэВ}^{-1}$ , взятом из [4]. Синие точки отвечают количеству состояний, приходящихся на интервал энергии  $[U, U + \Delta U)$ . Координата абсцисс для точек равна середине этого диапазона, то есть  $U + \Delta U/2$ . Шаг размерной энергии был выбран  $\Delta U = \frac{1}{10} \cdot \hbar\omega = \frac{11.696 \text{ МэВ}}{10} = 1.1696 \text{ МэВ}$ . Характерная энергия  $\hbar\omega$  была вычислена с помощью (2.3.1). Максимальная безразмерная энергия  $u_{\max} = \lfloor U_{\max}/\Delta U \rfloor = \lfloor 17.09 \rfloor = 17$ . Таким образом, будет получено 18 точек, считая от нуля.

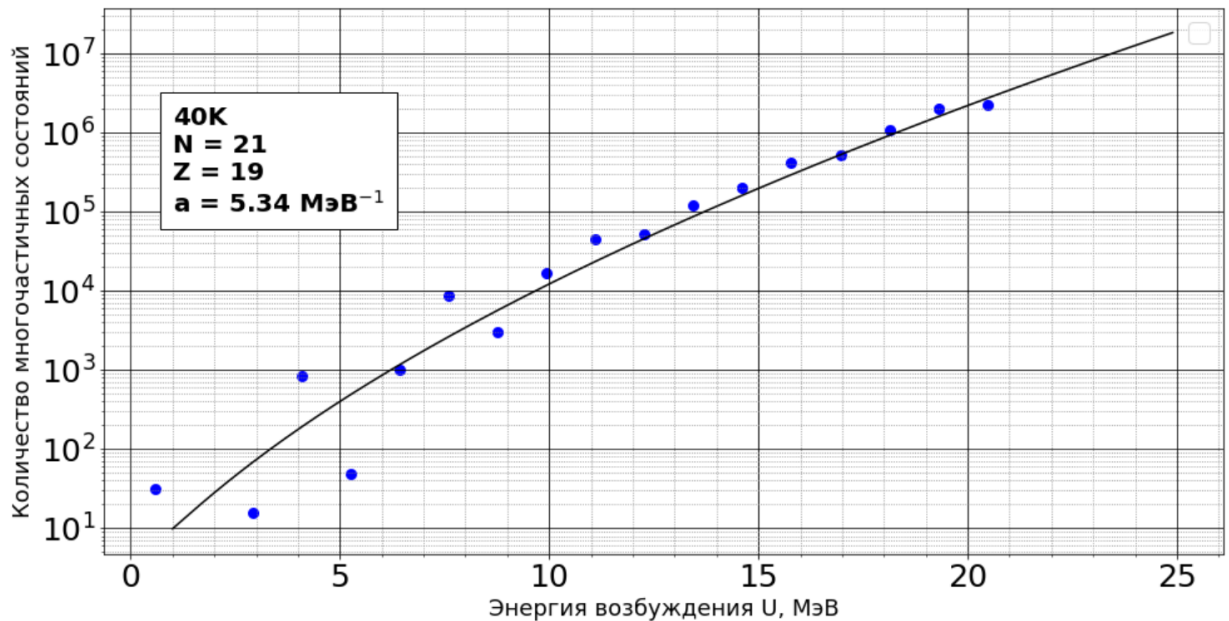


Рисунок 5.2 — Зависимость плотности многочастичных состояний от энергии возбуждения. Синие точки — смоделированные данные. Чёрная линия соответствует аналитической формуле (1.6.4)

Однако по рисунку видно, что точка, которая соответствует диапазону  $[1.17, 2.33)$  МэВ, отсутствует. Это произошло потому, что в данном интервале энергий количество возможных многочастичных состояний равно нулю. По оси ординат используется логарифмический масштаб, поэтому на рисунке изображено 17 точек вместо 18.

Видно, что при малых энергиях (до 10 МэВ) довольно сильно сказываются дискретные уровни; при больших энергиях наблюдается согласие смоделированных данных в модели трёхмерного осциллятора и аналитической формулы.

## 5.2 ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРОЕКЦИИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

На рисунке 5.3 изображены точки, отвечающие количеству многочастичных состояний в диапазоне энергии возбуждения  $[11.7, 12.9)$  МэВ в зависимости от проекции углового момента  $J_z$ . Красные точки соответствуют состояниям с положительной чётностью, синие — с отрицательной. Видно, что есть многочастичные состояния только при целых  $J_z$ , поскольку массовое число  $A$  чётное для  $^{40}\text{K}$ . Также распределение симметрично относительно  $J_z$ . Это означает, что выполняется закон сохранения углового момента.

Аналогичная зависимость изображена на рисунке 5.4, но при энергии  $U = 0$ . В основном состоянии ядро  $^{40}\text{K}$  нечётно, т.к. 21-й нейтрон находится на  $1f_{7/2}$ ,  $P = -1$ , 19-й протон — на  $1d_{3/2}$ ,  $P = +1$ . Тогда максимально возможная проекция углового момента  $j_z$  будет равна  $7/2 + 3/2 = 10/2 = 5$ , что и наблюдается на рисунке 5.4.

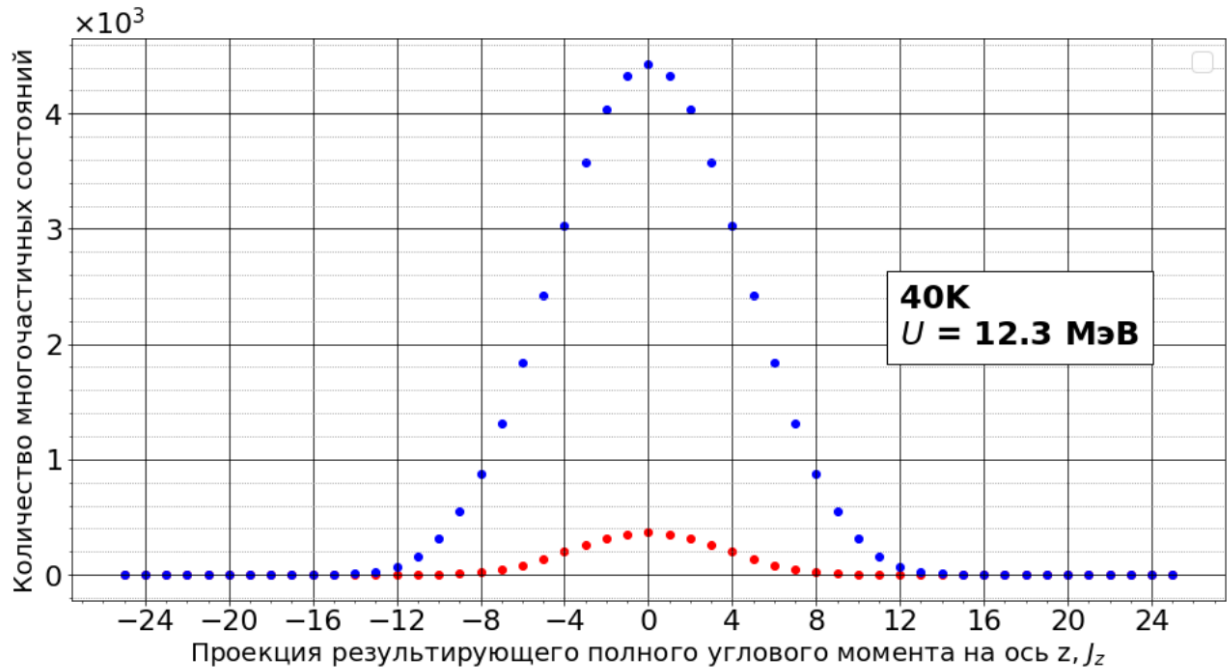


Рисунок 5.3 — Зависимость плотности многочастичных состояний, находящихся в диапазоне энергий [11.7, 12.9) МэВ, от проекции углового момента на ось  $z$ . Синие точки — смоделированные данные, отвечающие отрицательной чётности, красные — положительной

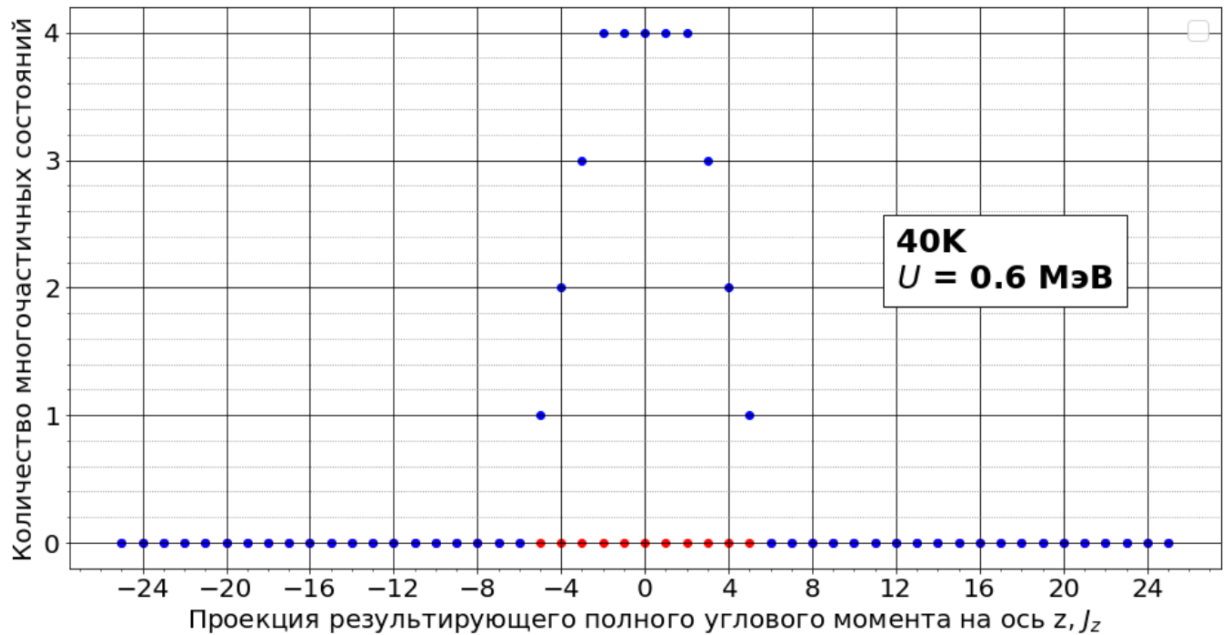


Рисунок 5.4 — Зависимость плотности многочастичных состояний, находящихся в диапазоне энергий [0.0, 1.2) МэВ, от проекции углового момента на ось  $z$ . Синие точки — смоделированные данные, отвечающие отрицательной чётности, красные — положительной

Чтобы свериться с аналитической формулой (1.4.18), надо просум-

мировать по чётностям, так как при выводе они полагаются равными. На рисунке 5.5 изображённые синие точки отвечают сумме многочастичных состояний с положительной и отрицательной чётностями, взятых из рисунка 5.3 при энергии [11.7, 12.9) МэВ. Видно, что полное число многочастичных состояний, предсказываемое аналитической формулой, меньше суммарного количества состояний, полученных в данной модели. Также это согласуется с рисунком 5.2.

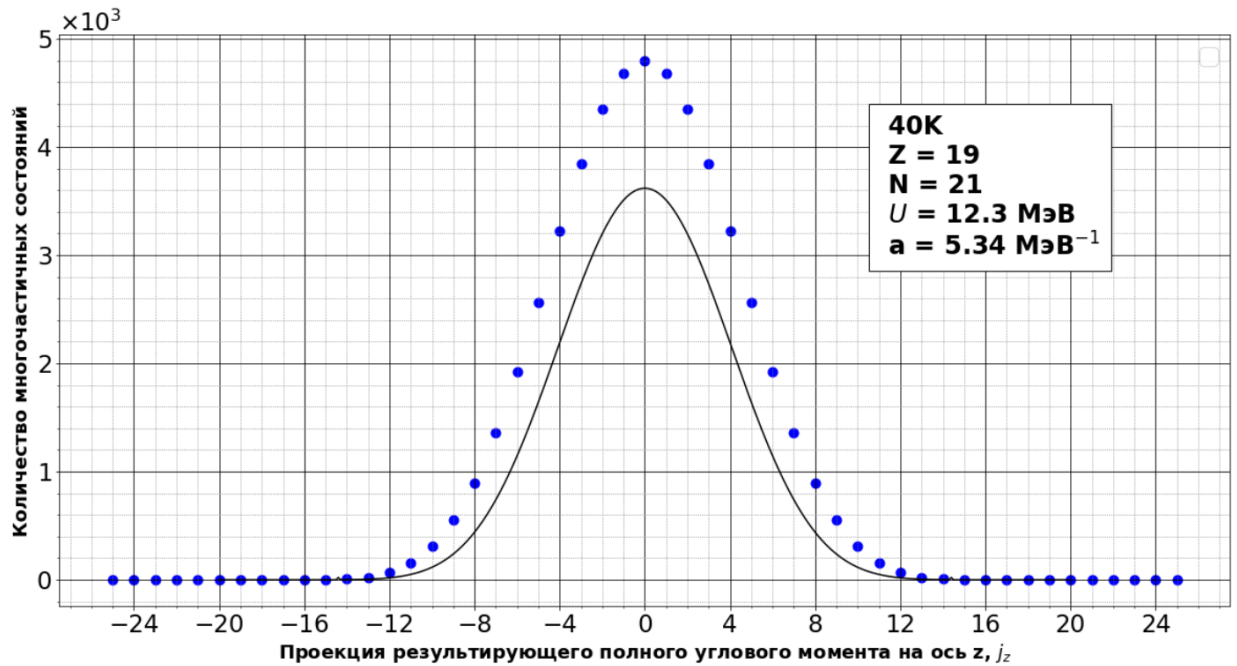


Рисунок 5.5 — Зависимость плотности многочастичных состояний, находящихся в диапазоне энергий [11.7, 12.9) МэВ, от проекции углового момента на ось  $z$ . Синие точки отвечают сумме по чётностям. Чёрная кривая соответствует аналитической формуле (1.4.18) при фиксированной энергии  $U = 12.3$  МэВ

### 5.3 ТРЁХМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Покажем трёхмерные картины плотности многочастичных состояний. Рассмотрим рисунок 5.6. Здесь красные и синие точки отвечают логарифму количества многочастичных состояний с положительной и отрицательной чётностями соответственно в диапазоне энергий  $[U, U + \Delta U)$ . Точка ставится посередине диапазона, то есть при значении  $U + \Delta U/2$ . Если просуммировать по  $J_z$  и чётностям, то получится зависимость, избоб-

ражённая на рисунке 5.2. Также в логарифмическом масштабе ”нулевые” многочастичные состояния не рисуются. По рисунку видно, что при малых энергиях доминирует отрицательная чётность, но начиная примерно с 3.5 МэВ довольно сильно сказывается положительная чётность. Причём чем больше энергия, тем в большей степени чётности сравниваются, переходя в «классический» случай.

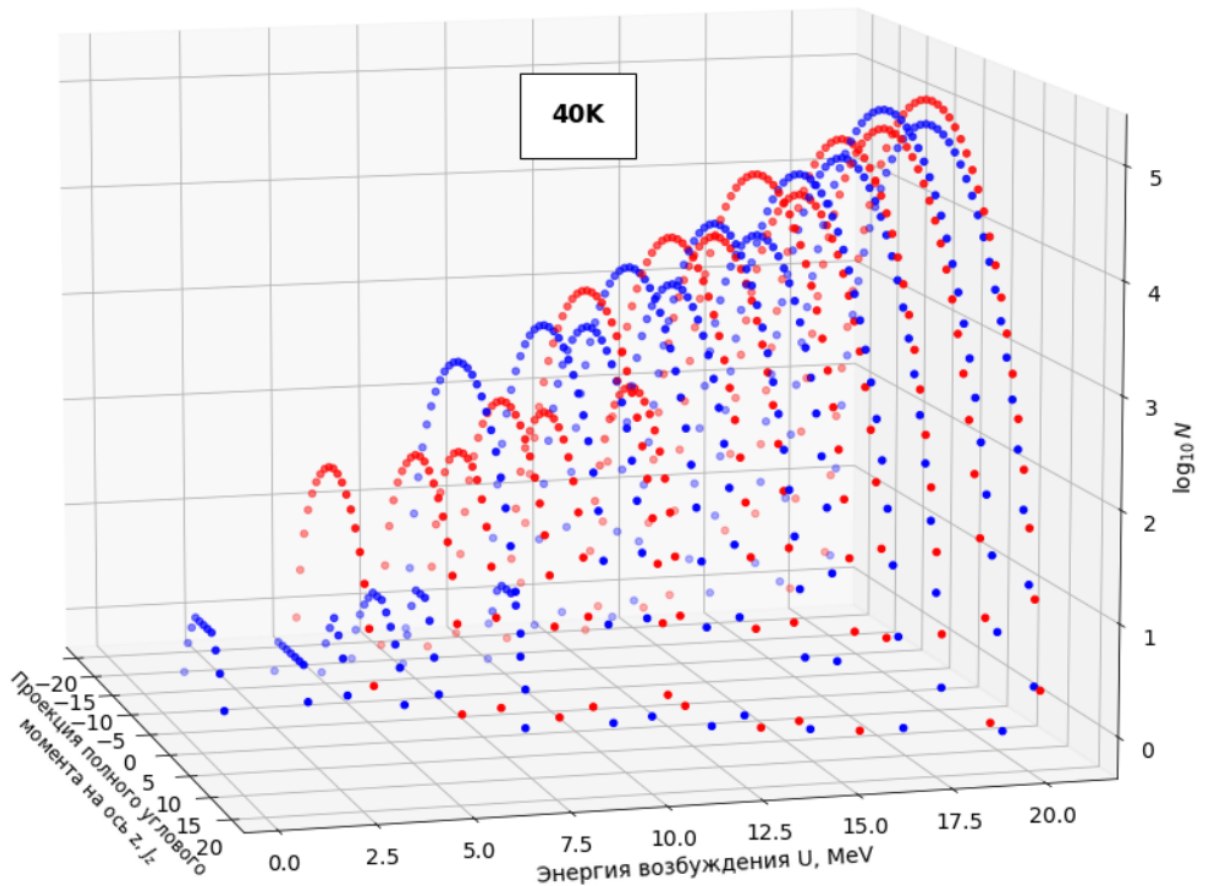


Рисунок 5.6 — Плотность многочастичных состояний  $\omega(U, J_z)$  в зависимости от энергии возбуждения и проекции полного углового момента на ось  $z$ . Синие точки соответствуют отрицательной чётности, красные — положительной

Чтобы сравниться с аналитической формулой (1.4.18), надо произвести суммирование по чётностям. На рисунке 5.7 красные точки отвечают плотности многочастичных состояний  $\omega(U, J_z) = \omega(U, J_z, P^+) + \omega(U, J_z, P^-)$ , а чёрная сетка соответствует формуле (1.4.18). Как и везде, точка со значением  $U + \Delta U/2$  соответствует интервалу энергий  $[U, U + \Delta U)$ .

Здесь видно, что при больших энергиях наблюдается сходство, а при малых — явное различие то в большую, то в меньшую сторону. Также

стоит отметить особенность аналитической формулы: в знаменателе стоит выражение вида  $U - \frac{M^2}{2g(m^2)}$ , которое либо при больших угловых моментах, либо при малых энергиях может становиться неограниченно большим.

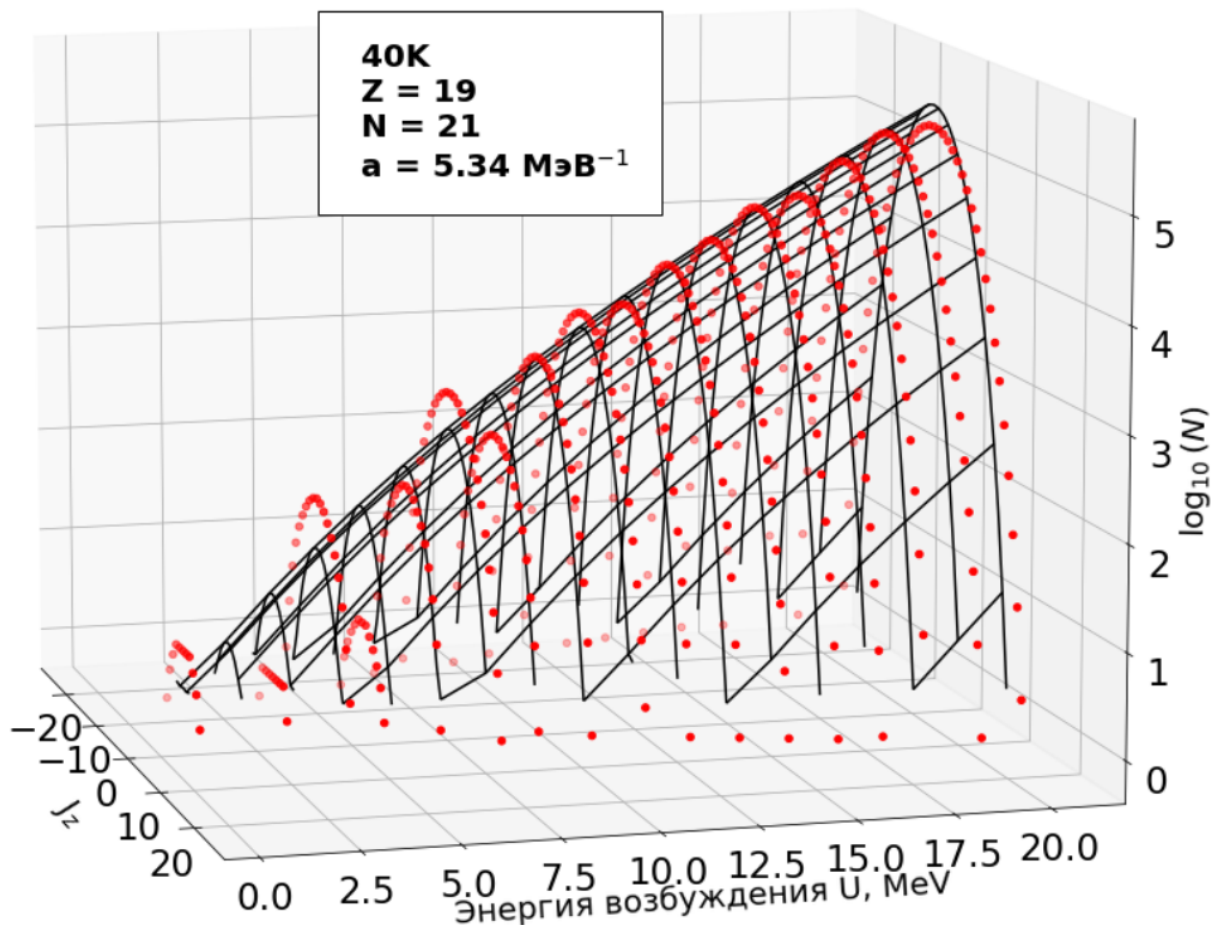


Рисунок 5.7 — Сравнение полученного распределения плотности многочастичных состояний  $\omega(U, J_z)$  с аналитической формулой (1.4.18)

## 5.4 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ УРОВНЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОЛНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА

На рисунке 5.8 проводится сравнение распределений плотности уровней в зависимости от полного углового момента в диапазоне энергий от 11.7 МэВ до 12.9 МэВ. Чёрная линия — аналитическая формула (1.7.2) при энергии  $U = 12.3$  МэВ. Красные точки соответствуют количеству уровней в данном диапазоне энергий при определённом полном угловом моменте  $I$

с положительной чётностью. Синие — с отрицательной чётностью. Чёрные точки — их сумма. Значения были рассчитаны с помощью (2.6.2).

Видно, что в целом наблюдается согласие формулы (1.7.2) с полученными данными. Также можно заметить, что уровней с отрицательной чётностью больше, чем с положительной, что согласуется с рисунком 5.3.

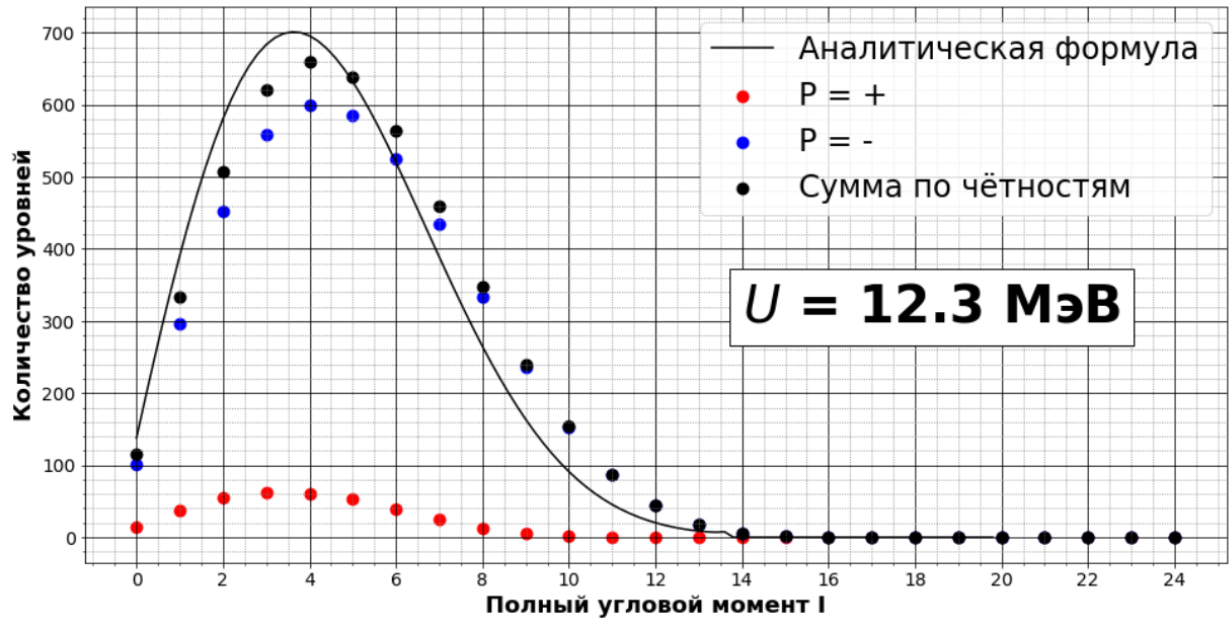


Рисунок 5.8 — Распределение плотности уровней в зависимости от углового момента. Красные точки отвечают количеству уровней, приходящихся на интервал энергии  $[11.7, 12.9)$  МэВ, имеющих полный угловой момент  $I$ , обладающих положительной чётностью. Синие точки обладают отрицательной чётностью. Чёрные — сумма по чётностям. Чёрная кривая — аналитическая формула (1.7.2) при энергии  $U = 12.3$  МэВ

## 5.5 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ УРОВНЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭНЕРГИИ

Суммируя  $\rho(U, I, P)$  по чётностям и полному угловому моменту, можно получить зависимость плотности уровней от энергии возбуждения в диапазоне  $[U, U + \Delta U)$  (точка ставится посередине диапазона), что и изображено на рисунке 5.9 синими точками. Чёрная кривая соответствует аналитической формуле (1.8.7).

При энергиях от 10 МэВ наблюдается согласие смоделированных данных и аналитической формулы. Также видно, что количество уровней в

диапазоне энергий [11.7, 12.9) МэВ хоть и близко к аналитической кривой, но лежит немного ниже формулы (1.8.7), что согласуется с рисунком 5.8.

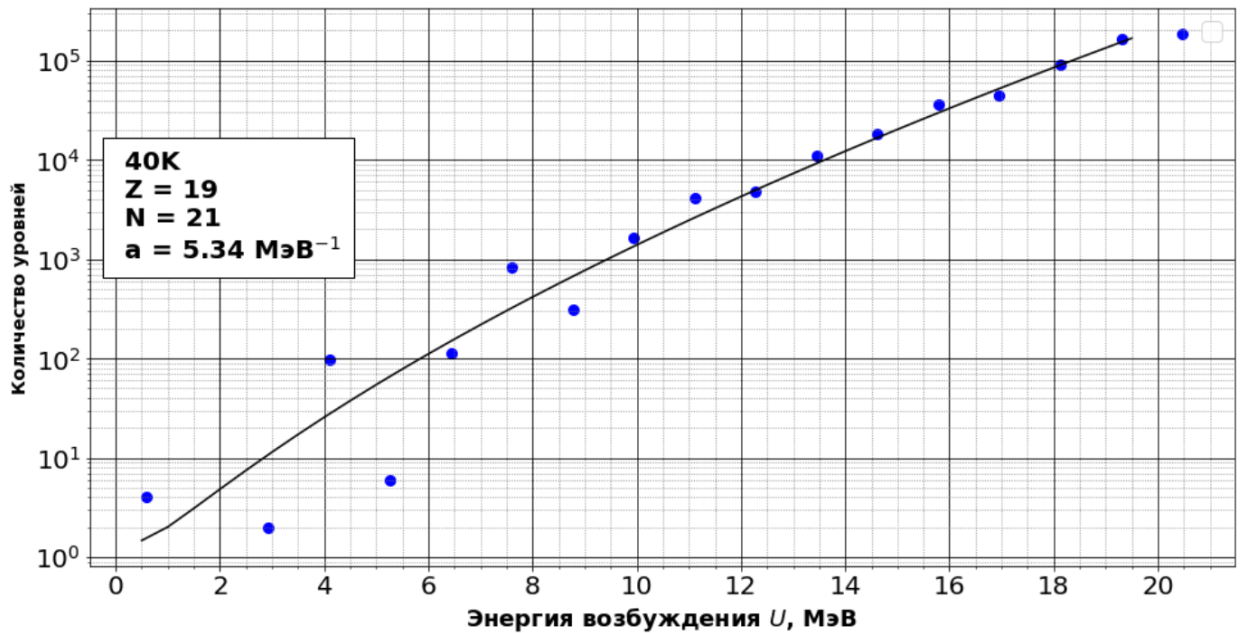


Рисунок 5.9 — Распределение плотности уровней в зависимости от энергии возбуждения. Синие точки отвечают количеству уровней в диапазоне энергий  $[U, U + \Delta U)$ . Точка ставится посередине диапазона. Чёрная кривая — аналитическая формула (1.8.7)

## 5.6 СВЕРКА С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Помимо сравнения полученных плотностей многочастичных состояний и уровней с аналитическими формулами нужно также свериться с некоторыми экспериментальными данными.

### 5.6.1 ПРОВЕРКА ДЛЯ ЯДЕР NI

В работе [12] представлены экспериментальные данные для изотопов Ni. Там же представлен рисунок 5.10, с которым проводится сравнение плотностей уровней в зависимости от энергии возбуждения. Изображённые синие точки — наши смоделированные данные. Чёрные точки соответствуют экспериментальной плотности уровней, полученной из спектра испускания протонов, синие кривые соответствуют нейтронным резонансам, а



красные линии — плотностям дискретных уровней. Стрелки указывают на энергию связи нейтронов.

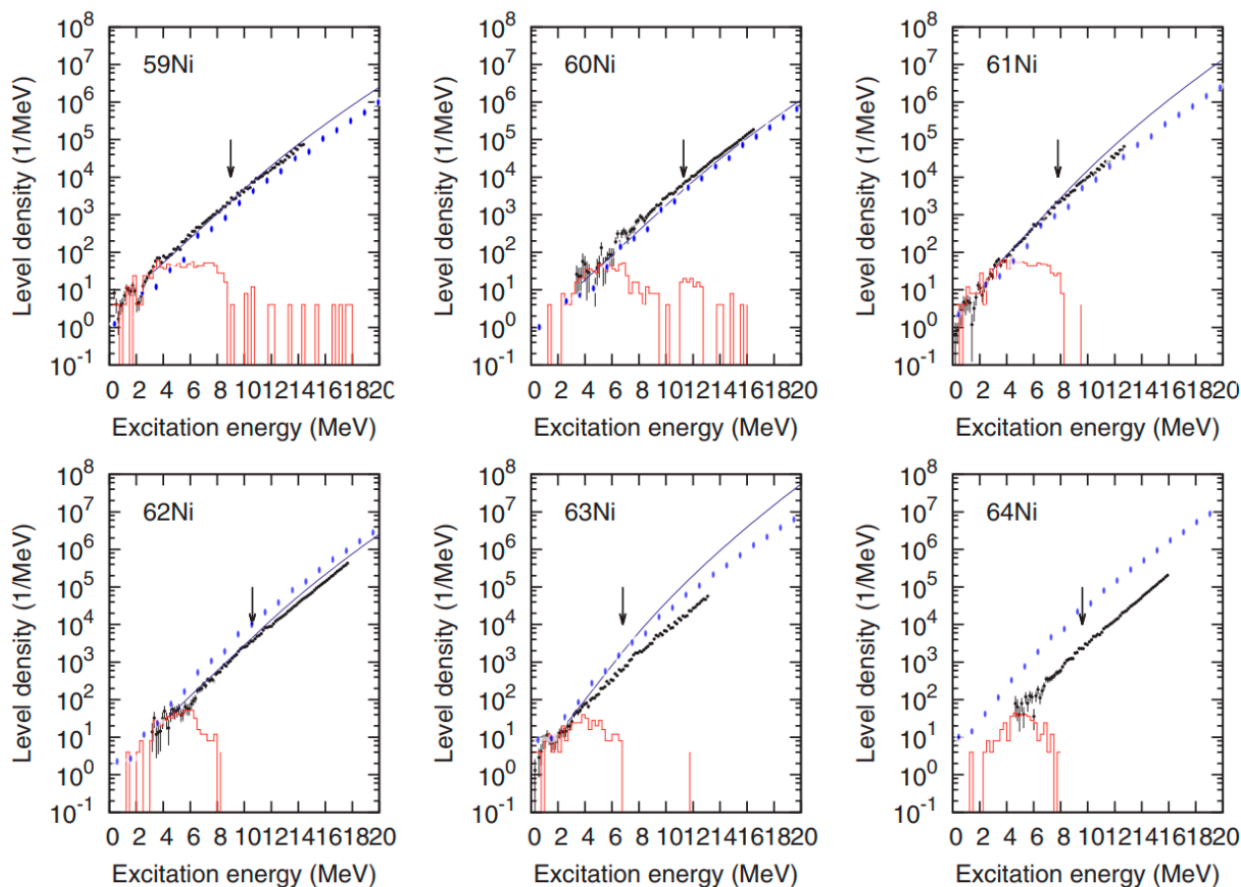


Рисунок 5.10 — Сравнение экспериментальных плотностей уровней [12] и смоделированных данных (синих точек) в зависимости от энергии возбуждения. Чёрные точки соответствуют плотностям уровней, полученным из спектра излучаемых протонов, синие линии — из нейтронных резонансов. Красные гистограммы — плотности дискретных уровней. Стрелки указывают на энергию связи нейтронов

Видно, что в целом наблюдается согласие, но для  $^{64}\text{Ni}$  полученные данные на порядок выше экспериментальных. Далее на рисунке 5.11 проводится сравнение полученных плотностей уровней и показывается, что результаты для  $^{63}\text{Ni}$  и  $^{64}\text{Ni}$  почти идентичны. Но поскольку для  $^{64}\text{Ni}$  различие на рисунке 5.10 довольно велико, то это означает, что экспериментальные данные говорят об уменьшении плотности уровней при переходе от  $^{63}\text{Ni}$  к  $^{64}\text{Ni}$ .

При рассмотрении  $^{63}\text{Ni}$  ( $N_n = 35$ ,  $N_p = 28$ ) в оболочечной модели можно увидеть, что последний уровень  $1f_{5/2}$  занят тремя нейтронами, а у  $^{64}\text{Ni}$  — четырьмя. Основное состояние  $^{63}\text{Ni}$  60-кратно вырождено (число

сочетаний  $C_6^3 = 20$ ), а  $^{64}\text{Ni}$  — 15-кратно ( $C_6^4 = 15$ ). И там, и там по 3 уровня с различным  $J$ . Но далее при ненулевой энергии возбуждения количество многочастичных состояний и, соответственно, количество уровней  $^{64}\text{Ni}$  начинают расти быстрее, чем  $^{63}\text{Ni}$ . Почему результаты для  $^{64}\text{Ni}$  в статье [12] так сильно расходятся, остаётся открытым вопросом.

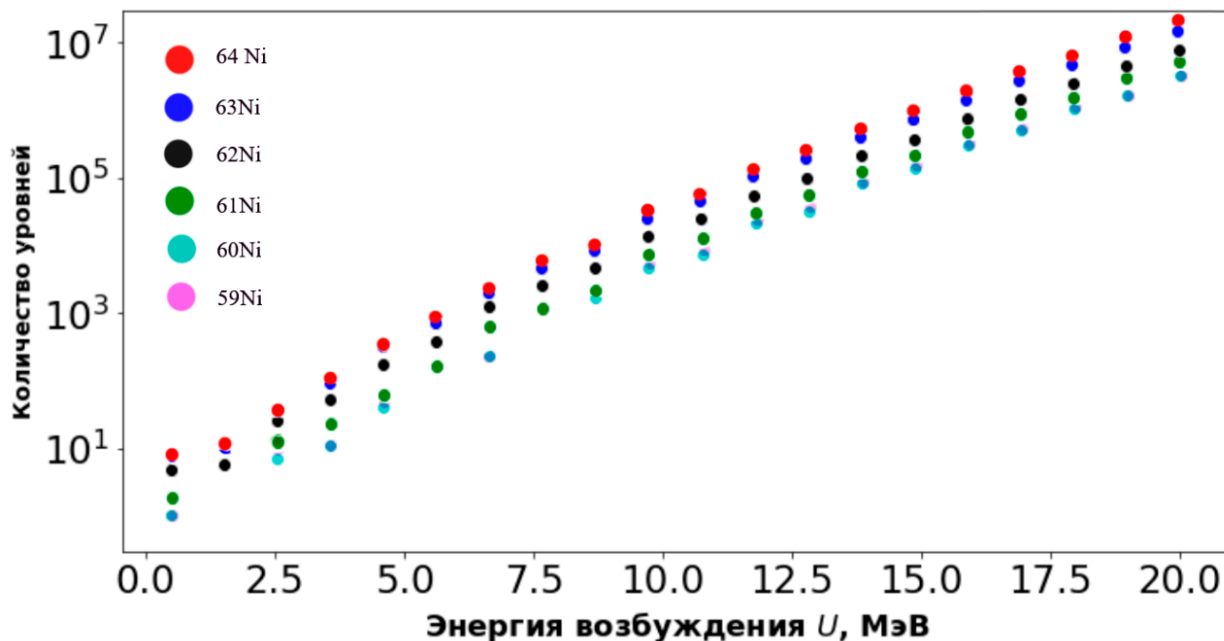
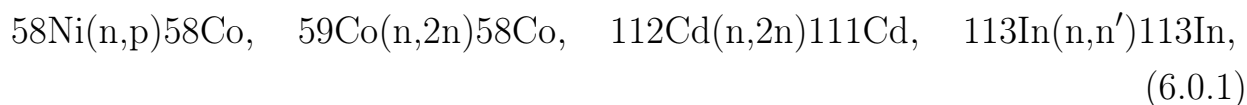


Рисунок 5.11 — Сравнение плотности уровней для изотопов никеля

## 6 МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКЦИЙ В ПРОГРАММЕ TALYS

Talys — программный комплекс с открытым кодом, который позволяет моделировать столкновения ядер с лёгкими частицами, в том числе нейтронами, с энергиями до 200 МэВ. В целях унификации создан набор входных параметров для ядерных моделей — Reference Input Parameter Library (RIPL-3) [5], который Talys использует по-умолчанию. Было проведено моделирование четырёх реакций в разных версиях Talys: 1.9 и 1.95.



Ядра, образующиеся в этих реакциях, обладают низколежащими долгоживущими изомерными состояниями. Все 4 указанные реакции изучались в недавних экспериментах [13], выполненных в НИЦ “Курчатовский институт” при энергии падающих нейтронов, близкой к 14 МэВ. Интерес к этим реакциям обусловлен тем, что они протекают в конструкционных материалах установок, в которых в процессе  $d + t \rightarrow \alpha + n$  рождаются термоядерные нейтроны.

В статье [13], в частности, было отмечено, что существует значительный разброс экспериментальных данных по сечениям образования ядер в изомерных состояниях в указанных реакциях. При этом для части этих реакций отсутствуют надёжные оценки этих сечений. В связи с этим возник вопрос о возможности использования программы Talys для предсказания соответствующих сечений.

Указанные реакции идут с образованием возбуждённых компаунд-ядер, поэтому плотности уровней этих ядер существенно влияют на сечения. Talys позволяет использовать 6 моделей плотности уровней, пер-

вые 3 обсуждались во второй части этой работы: модель Гильберта-Камерона (модель 1), модель ферми-газа с обратным смещением (модель 2) и сверхтекучая модель, основанная на представлении о сверхтекучем ядре при малых энергиях возбуждения (модель 3). В моделях 4–6 Talys используются числовые файлы, полученные в различных комбинаторных расчётах, однако надёжность этих моделей не выше, чем моделей 1–3.

В данной работе получены сечения образования изомерных и основных состояний ядер в указанных реакциях. Выполнено сравнение этих результатов с оценками из библиотек TENDL-2021, IRDFF-II, а также EXFOR, т.е. с экспериментальными данными.

## 6.1 МЕТОД ОЦЕНКИ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для каждой реакции вычислялись сечения  $\sigma_1(E)$ ,  $\sigma_2(E)$ ,  $\sigma_3(E)$  образования состояний конечного ядра для моделей 1–3 плотности уровней в интервале энергий падающих нейтронов от нуля до 20 МэВ. При сравнении результатов вычислений с оценками и экспериментальными данными было обнаружено, что ни одна модель не имеет преимуществ перед другими. При этом при каждой энергии нейтрона  $E$  максимальное отклонение между любыми двумя моделями

$$\Delta\sigma(E) = \max(|\sigma_1(E) - \sigma_2(E)|, |\sigma_1(E) - \sigma_3(E)|, |\sigma_2(E) - \sigma_3(E)|), \quad (6.1.1)$$

в сущности, представляет собой неопределённость теоретического предсказания истинного сечения. Тогда среднее сечение

$$\sigma_{\text{av}}(E) = \frac{\sigma_1(E) + \sigma_2(E) + \sigma_3(E)}{3} \quad (6.1.2)$$

можно интерпретировать как наиболее вероятный прогноз. Таким образом, можно построить коридор значений, т.е. две кривые

$$\sigma_{\text{max}}(E) = \sigma_{\text{av}}(E) + \Delta\sigma(E), \quad \sigma_{\text{min}}(E) = \sigma_{\text{av}}(E) - \Delta\sigma(E), \quad (6.1.3)$$

между которыми, согласно смоделированным данным, скорее всего, находится истинное значение сечения.

## 6.2 РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ $^{58}\text{Ni}$

На рисунках 6.1, 6.2, 6.3 и 6.4 представлены сечения образования ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{58}\text{Ni}(n,p)^{58}\text{Co}$  в основном и изомерном состояниях для разных версий Talys. Видно, что для основного состояния наблюдаются расхождения между данными из EXFOR и модельными данными (TENDL-2021, IRDFF-II, наши данные).

Для изомерного состояния  $^{58}\text{Co}$  наблюдается разумное согласие данных из библиотек и смоделированных данных. Различия между сечениями в версиях Talys минимально, поэтому для следующих реакций показана информация только по Talys 1.95.

На картинках для изомеров видно, что кривые слегка осциллируют. Это не наблюдалось при большем шаге по энергиям — при 1 МэВ. Здесь для моделирования был выбран шаг 0.05 МэВ. Почему так происходит, на данный момент не ясно. Для выяснения причины, возможно, придётся анализировать исходный код программы и выяснять, как считались сечения реакций.

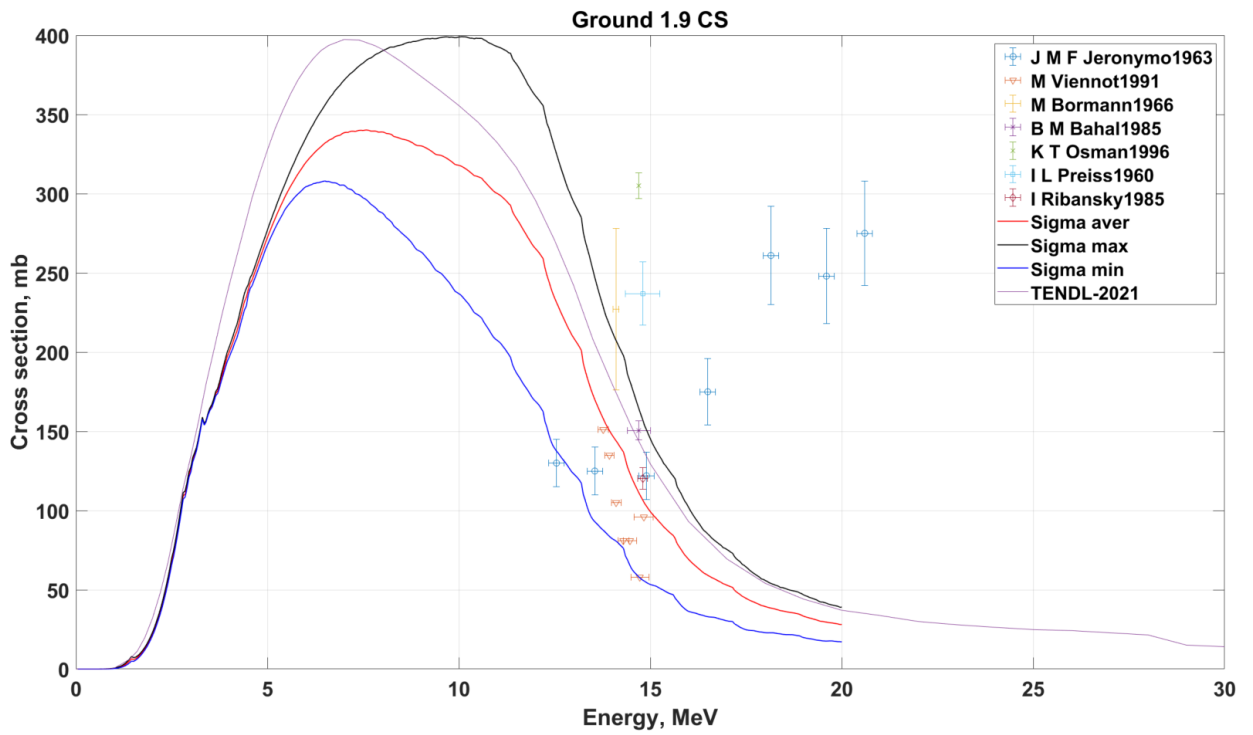


Рисунок 6.1 — Зависимость сечения образования основного состояния ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{58}\text{Ni}(n,p)^{58}\text{Co}$  в зависимости от энергии. Talys 1.9

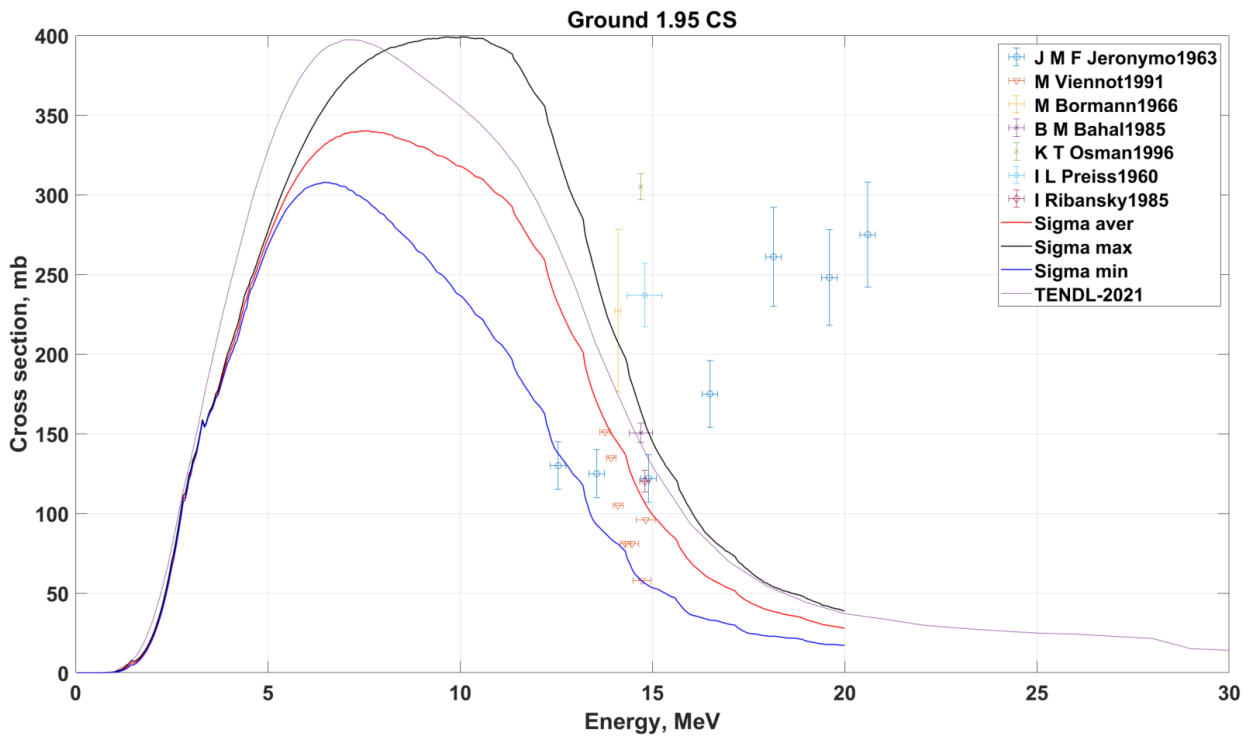


Рисунок 6.2 — Зависимость сечения образования основного состояния ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{58}\text{Ni}(n,p)^{58}\text{Co}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95

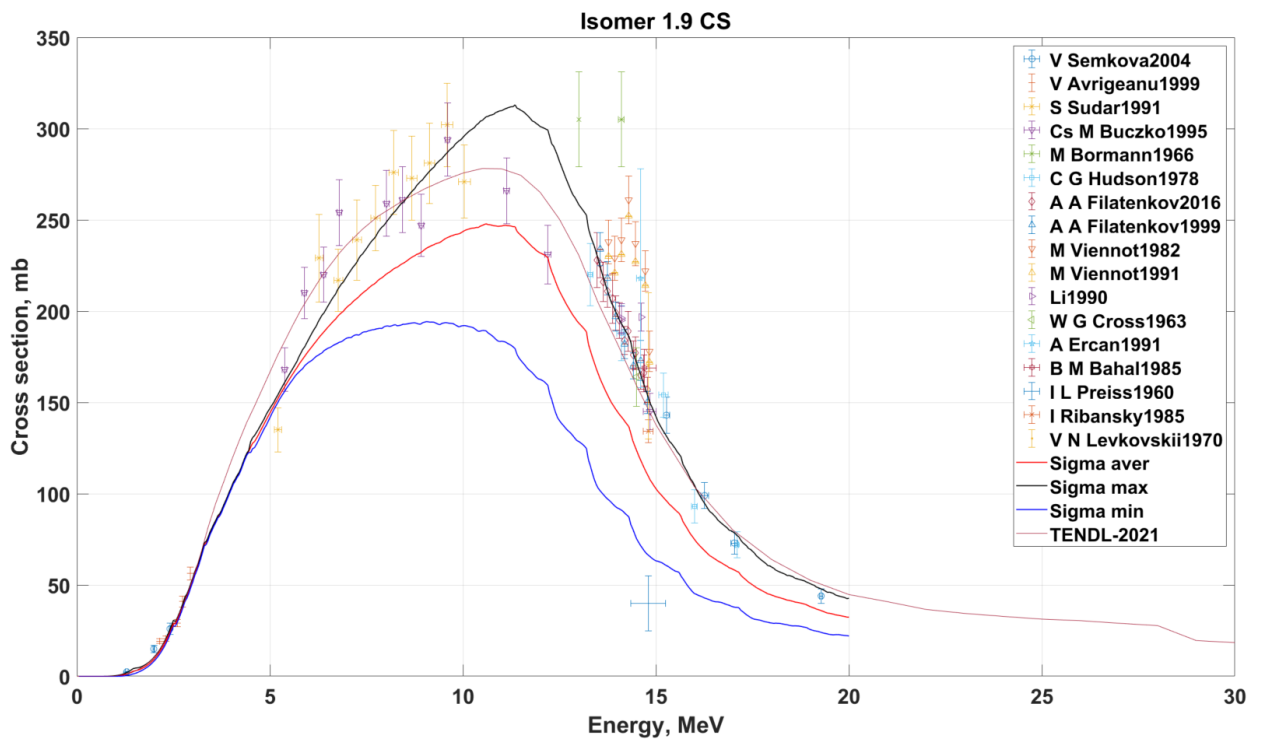


Рисунок 6.3 — Зависимость сечения образования изомерного состояния ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{58}\text{Ni}(n,p)^{58}\text{Co}$  в зависимости от энергии. Talys 1.9

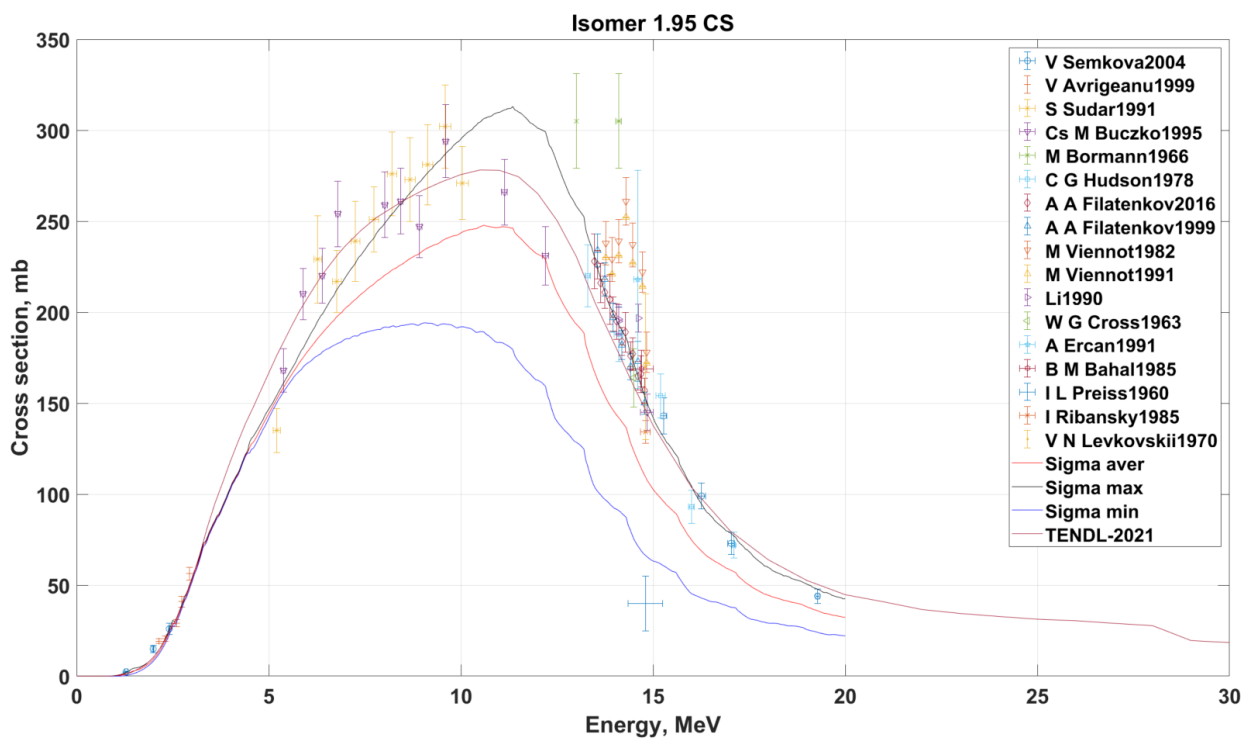


Рисунок 6.4 — Зависимость сечения образования изомерного состояния ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{58}\text{Ni}(n,p)^{58}\text{Co}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95

## 6.3 РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ $^{59}\text{Co}$

На рисунках 6.5 и 6.6 представлены сечения образования ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{59}\text{Co}(n,2n)^{58}\text{Co}$  в основном и изомерном состояниях в зависимости от энергии падающих нейтронов.

Для данной реакции, как и для предыдущей (с никелем), наблюдаются осцилляции, наиболее заметные для изомерного состояния. В целом наблюдается согласие с экспериментальными данными; многие данные попадают в коридор ожидаемых значений.

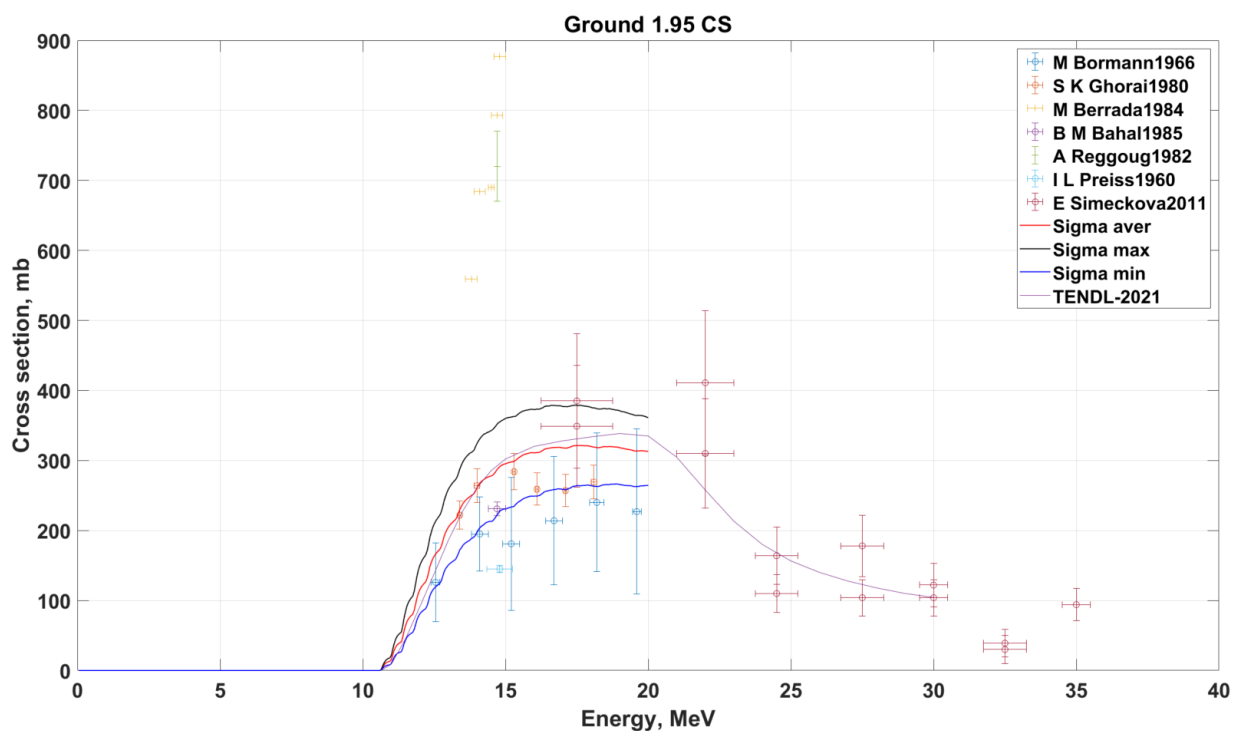


Рисунок 6.5 — Зависимость сечения образования основного состояния ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{59}\text{Co}(n,2n)^{58}\text{Co}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95



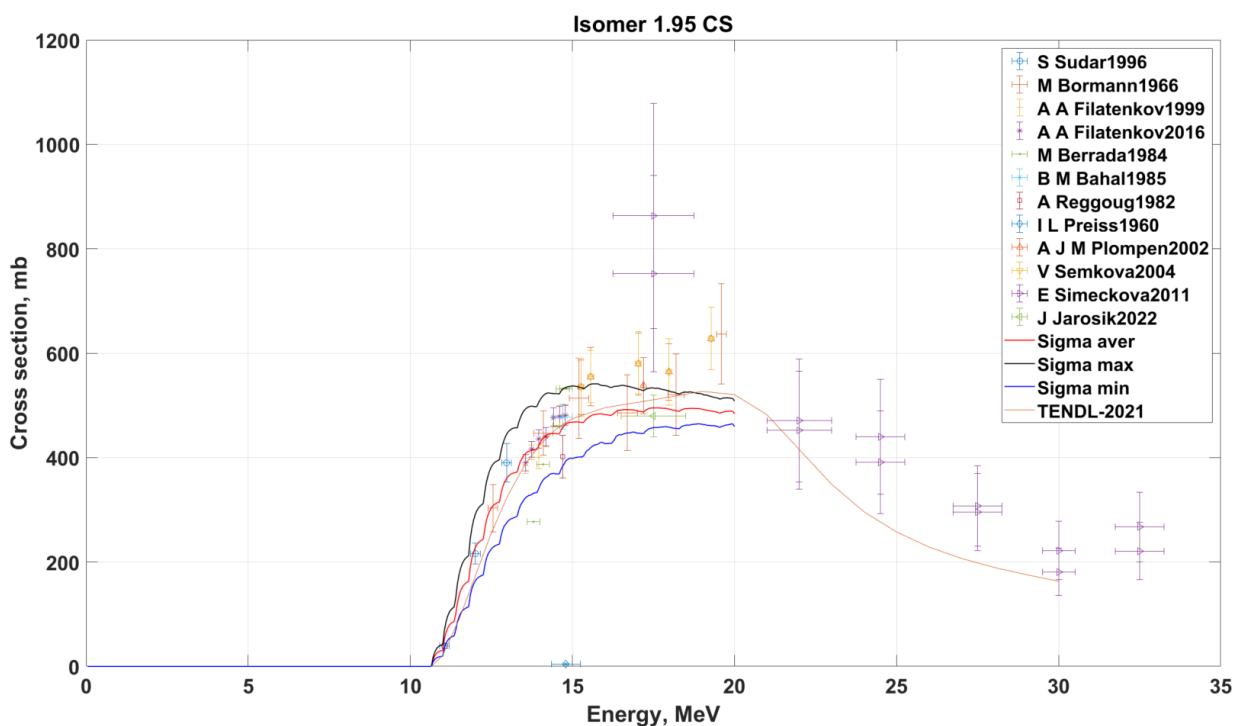


Рисунок 6.6 — Зависимость сечения образования изомерного состояния ядра  $^{58}\text{Co}$  в реакции  $^{59}\text{Co}(n,2n)^{58}\text{Co}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95

## 6.4 РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ $^{112}\text{Cd}$

В библиотеке экспериментальных данных EXFOR не было данных по образованию основного состояния  $^{111}\text{Cd}$ . Также можно заметить, что здесь осцилляции кривых Talys пропали.

Можно видеть, что экспериментальные данные, полученные из EXFOR, находятся в разумных пределах относительно полученных  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ .

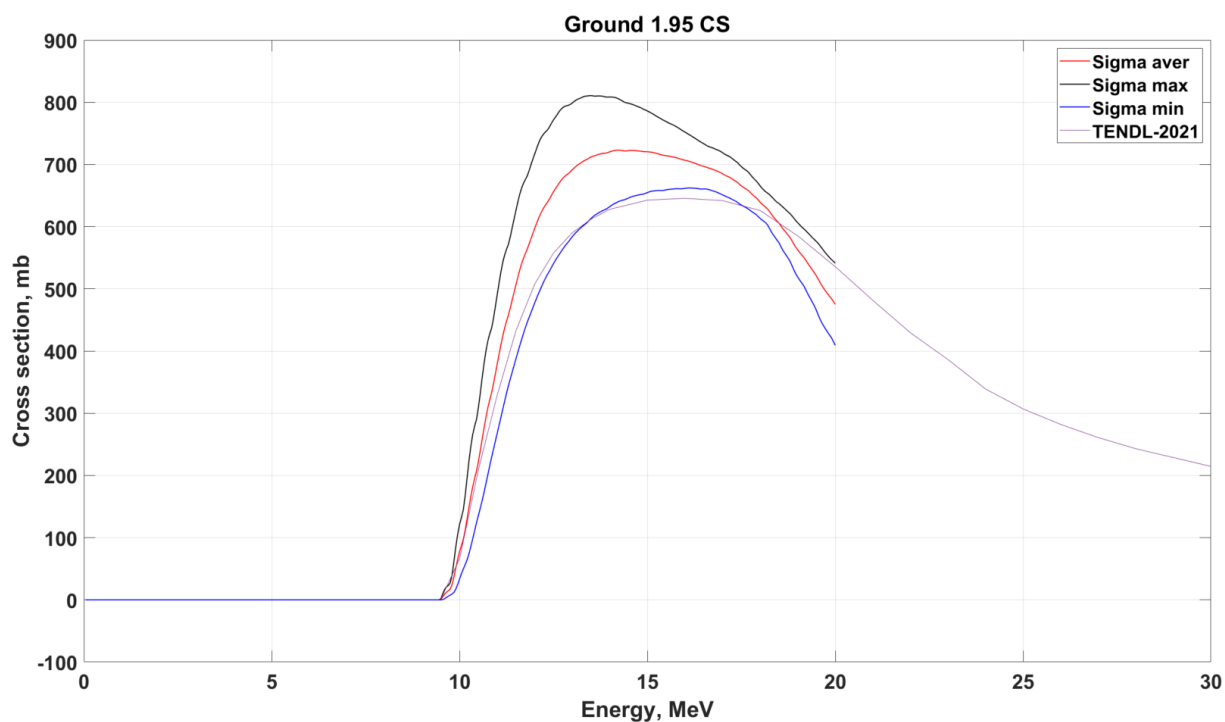


Рисунок 6.7 — Зависимость сечения образования основного состояния ядра  $^{111}\text{Cd}$  в реакции  $^{112}\text{Cd}(n,2n)^{111}\text{Cd}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95

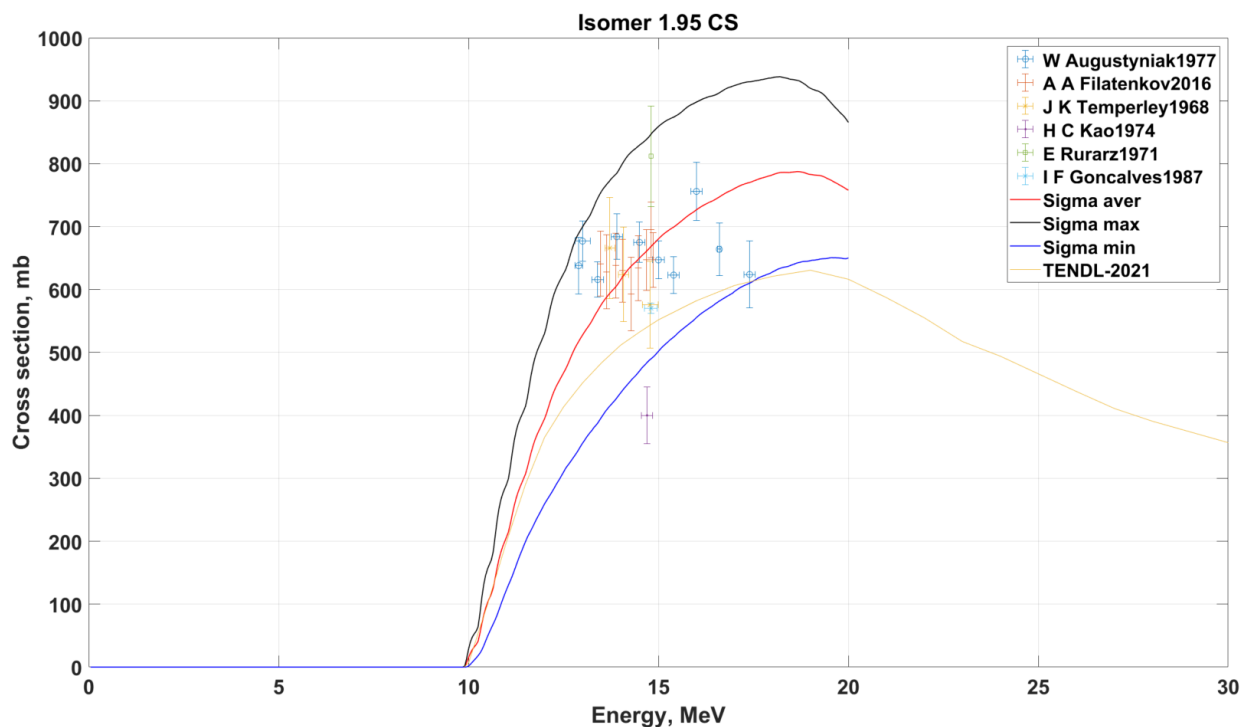


Рисунок 6.8 — Зависимость сечения образования изомерного состояния ядра  $^{111}\text{Cd}$  в реакции  $^{112}\text{Cd}(n,2n)^{111}\text{Cd}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95

## 6.5 РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ $^{113}\text{In}$

Здесь также не было данных в EXFOR для основного состояния. Можно видеть одну особенность: согласно библиотекам ядерных данных, ядро  $^{113}\text{In}$  имеет некоторую «двугорбость» при малых энергиях. Эту особенность не удалось воспроизвести ни в одной из моделей плотности уровней. Почему так происходит, пока не ясно. Это требует дальнейшего анализа того, что заложено в коде Talys.

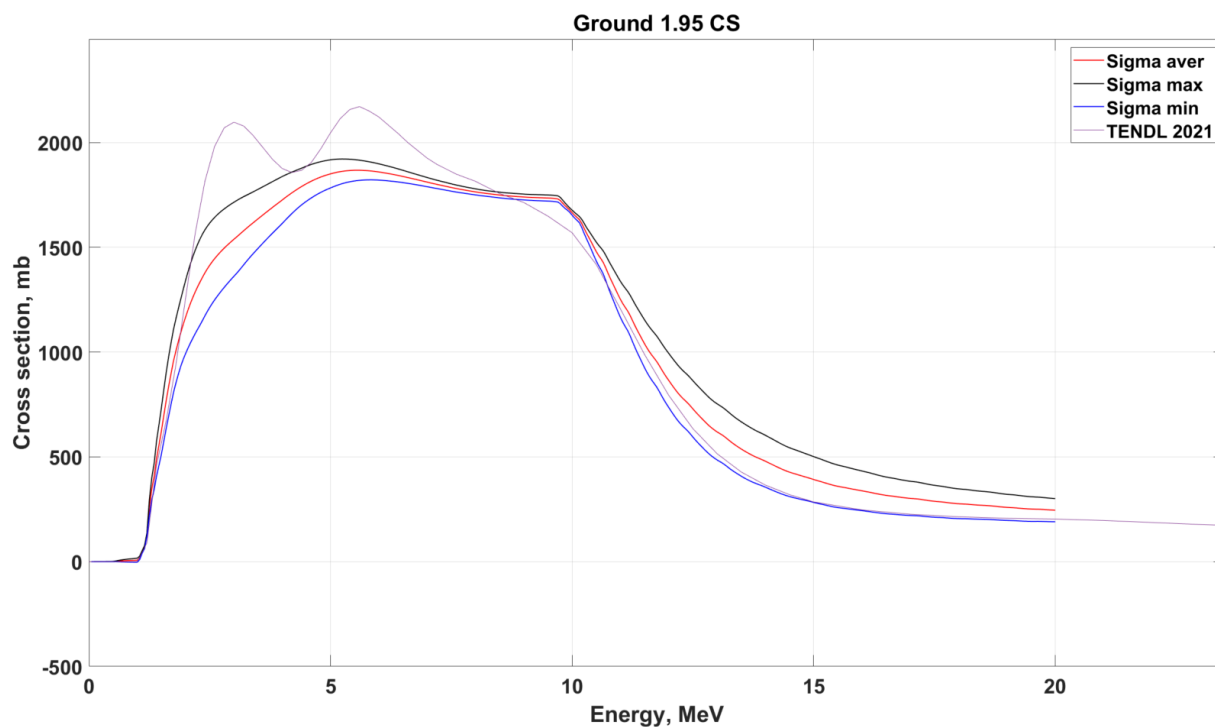


Рисунок 6.9 — Зависимость сечения образования основного состояния ядра  $^{113}\text{In}$  в реакции  $^{113}\text{In}(n,n')^{113}\text{In}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95

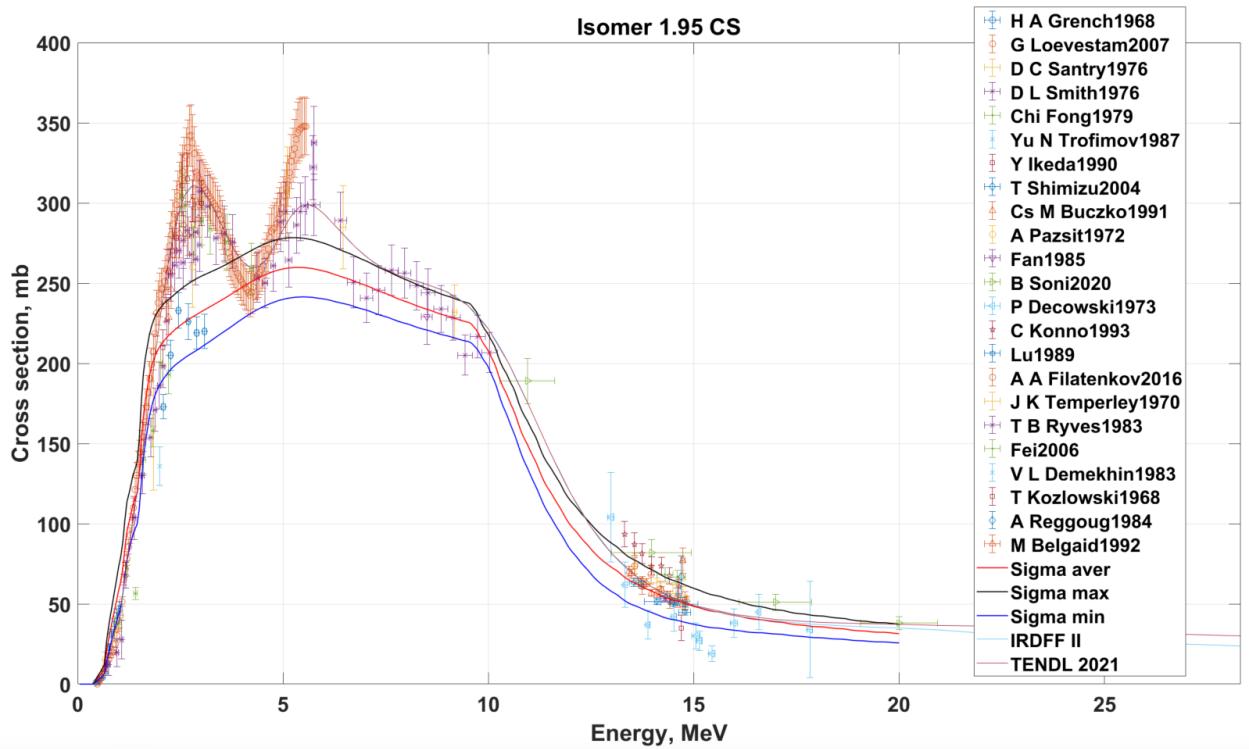


Рисунок 6.10 — Зависимость сечения образования изомерного состояния ядра  $^{113}\text{In}$  в реакции  $^{113}\text{In}(n,n')^{113}\text{In}$  в зависимости от энергии. Talys 1.95

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данную работу можно условно разделить на три большие части, которые, конечно, связаны между собой. Во-первых, это получение аналитических формул для плотности состояний и уровней ядер, изложенное в первом разделе.

Во-вторых, построение алгоритма перебора многочастичных состояний и дальнейшее получение различных распределений плотности как состояний, так и уровней. Здесь же производится сравнение полученных моделированием результатов с аналитическими формулами, описанными ранее. Для больших энергий наблюдается сходство, а для малых — расхождение результатов, поскольку приближения, использованные при выводе, становятся уже слишком грубыми.

Также особенностью полученных результатов является то, что при малых энергиях возбуждения доминирует определённая чётность, что может повлиять на вероятность протекания реакции.

Было проведено сравнение с некоторыми экспериментальными результатами. В целом наблюдается разумное согласие за исключением одного ядра —  $^{64}\text{Ni}$ , где различие в плотности уровней составляет около одного порядка, происходит переоценивание количества уровней. Данная проблема требует дальнейших разъяснений.

Третья часть работы — моделирование ядерных реакций в программном комплексе Talys. Полученные результаты находятся в разумном согласии с библиотеками ядерных данных. В будущем планируется усовершенствовать собственный алгоритм перебора многочастичных состояний и попробовать использовать его для расчётов в программе Talys.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Бор О., Моттelson Б.* Структура атомного ядра. Том 1. Одночастичное движение // Москва, Мир. — 1971.
2. *Koning A., Hilaire S., Goriely S.* TALYS-1.9. A nuclear reaction program. User Manual. — 2017.
3. *Bethe H.* An Attempt to Calculate the Number of Energy Levels of a Heavy Nucleus // Physical Review. — 1936. — Т. 50. — С. 332—341.
4. *Соколов Ю. В.* Плотность уровней атомных ядер // Москва, Энергоатомиздат. — 1990.
5. RIPL - Reference Input Parameter Library for Calculation of Nuclear Reactions and Nuclear Data Evaluations / R. Capote [и др.] // Nuclear Data Sheets. — 2009. — Т. 110, № 12. — С. 3107—3214.
6. *Dilg W., Schantl W., Vonach H.* Level density parameters for the backshifted fermi gas model in the mass range  $40 < A < 250$  // Nuclear Physics A. — 1973. — Т. 217. — С. 269—298.
7. *Gilbert A., Cameron A.* A composite nuclear-level density formula with shell corrections // Canadian Journal of Physics. — 1965. — Т. 43. — С. 1446—1496.
8. *Hilaire S., Delaroche J. E., Koning A. J.* Generalized particle-hole state densities within the equidistant spacing model // Nuclear Physics A. — 1998. — Т. 632. — С. 417—441.
9. *Hilaire S., Delaroche J. E., Girod M.* Combinatorial nuclear level densities based on the Gogny nucleon-nucleon effective interaction // The European Physical Journal A. — 2001. — Т. 12. — С. 169—184.

10. *Hilaire S., Goriely S.* Global microscopic nuclear level densities within the HFB plus combinatorial method for practical applications // Nuclear Physics A. — 2006. — T. 779. — C. 63–81.
11. *Nilsson S. G.* Binding states of individual nucleons in strongly deformed nuclei // 29(CERN-55-30). — 1955. — C. 1–69.
12. *Voinov A., Grimes S., Brune C.* Recent experimental results on level densities for compound reaction calculations // EPJ Web of Conferences. — 2012. — T. 21. — C. 05001.
13. *Titarenko Y. E., Pavlov K. V., Titarenko A. Y.* Benchmark Experiments for Verification of Nuclear Data Libraries for Designing Fusion Blankets // Fusion Science and Technology. — 2022. — T. 78, № 7. — C. 549–572.