

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 539.1.05

**Отчёт о научно-исследовательской работе**  
**Взаимодействие топологических солитонов с газом в ранней**  
**Вселенной**

Студент группы М23-114

\_\_\_\_\_ Д. П. Филиппов

Научный руководитель,

к.ф.- м.н., доц.

\_\_\_\_\_ А. А. Кириллов

Москва 2023

# Содержание

1	Уравнение движения	3
2	Численное решение уравнения эволюции стенки	8
3	Заключение	11

# Введение

Доменные стенки, являющиеся топологически нетривиальными структурами в ранней Вселенной [1, 2], могут послужить источником первичных чёрных дыр [3], которые могут стать центрами образования галактик и ранних квазаров в форме сверхмассивных чёрных дыр. Подобные дефекты образуются, когда потенциал скалярного поля попадает в один из возможных минимумов [4]. При этом внутри и снаружи доменной стенки находится горячая плазма элементарных частиц и частиц скрытой массы (DM). Частицы способны проходить сквозь стенку, но в процессе эволюции она становится непрозрачной для них, что приводит к нагреву газа, заключённого внутри доменной стенки, и последующему коллапсу в чёрную дыру. В данной работе изучается взаимодействие доменных стенок с холодным газом скалярных частиц скрытой массы (CDM). Численное моделирование позволит решить нелинейное дифференциальное уравнение движения стенки. Взаимодействие стенок с фермионами показано в работе [5].

# 1 Уравнение движения

Рассмотрим модель в которой доменная стенка описывается комплексным скалярным полем:

$$\phi = \frac{f}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = \frac{f}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\chi}{f}}. \quad (1.1)$$

Лагранжиан стенки имеет вид:

$$L_{wall} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} \left( \phi^+ \phi - \frac{f^2}{2} \right)^2 - \Lambda^4 (1 - \cos(\theta)), \quad (1.2)$$

где  $\phi$  — комплексное скалярное поле,  $\theta$  — фаза. Подстановка уравнения (1.1) в (1.2) даст Лагранжиан, который описывает фазу поля:

$$L_{wall} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \Lambda^4 (1 - \cos(\chi/f)). \quad (1.3)$$

Фаза  $\chi$  определяется как в [9]:

$$\chi(x) = 4f \arctan \left[ \exp \left( \frac{\Lambda^2}{f} x \right) \right]. \quad (1.4)$$

Рассмотрим Лагранжиан скалярного поля, колебания которого воспринимаются как частицы скрытой массы:

$$L_s = (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \alpha_0 \phi \varphi^2 + h.c. \quad (1.5)$$

Лагранжиан взаимодействия частиц CDM и доменной стенки с учётом решения для  $\phi$  (1.4):

$$\begin{aligned} L_{int} &= \frac{1}{2} \alpha_0 (\phi + \phi^*) \varphi^2 = \frac{1}{2} \alpha_0 f \sqrt{2} \cos(\chi/f) \varphi^2 = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0 f \sqrt{2} \left( 1 - \frac{2}{\cosh^2(2x/d)} \right) \varphi^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $d = \frac{2f}{\Lambda^2}$  — толщина доменной стенки. Найдём давление внутри стенки, возникающее вследствие наличия сил натяжения. Вычислим тензор энергии-

импульса для Лагранжиана стенки (1.3):

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L_{wall}}{\partial(\partial^\mu\chi)}(\partial_\nu\chi) - g_{\mu\nu}L_{wall}. \quad (1.7)$$

Ненулевые компоненты тензора с учётом (1.4) имеют вид:

$$T_{00} = -T_{22} = -T_{33} = \Lambda^4(1 - \cos(\chi/f)) = 2\Lambda^4 \frac{1}{\cosh^2(2x/d)}. \quad (1.8)$$

Теперь найдём поверхностную плотность энергии доменной стенки:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} T_{00}(x)dx = 4f\Lambda^2 = 10^{13}\text{ГэВ}^3, \quad (1.9)$$

где  $\Lambda = 0.05\text{ГэВ}$ ,  $f = 10^{14}\text{ГэВ}$ .

Рассмотрим уравнение движения доменной стенки:

$$\ddot{r} = \frac{P(r(t))}{\mu} - \frac{2\pi}{r(t)} - \frac{P_1(t)}{\mu}, \quad (1.10)$$

где  $t$  — время,  $r$  — радиус стенки,  $P$  — давление газа внутри доменной стенки,  $P_1$  — давление газа снаружи стенки,  $\mu$  — поверхностная плотность стенки. Первое слагаемое определяет давление газа внутри стенки, второе определяет силу поверхностного натяжения и третье давление газа снаружи. В силу космологического расширения вселенной  $P_1 = 0$ . На рисунке 1 показана схема эволюции стенки и горизонта с момента завершения инфляции. Горизонт эволюционирует пропорционально  $t$ , в то время как доменная стенка как  $\sqrt{t}$ . В момент их пересечения давление газа внутри сравнимо с давлением снаружи. Считая стенку непрозрачной, расширение газа внутри стенки будет адиабатическим:

$$PV^{\frac{5}{3}} = P_{CDM}V_i^{\frac{5}{3}}. \quad (1.11)$$

Тогда давление изменяется с радиусом как:

$$P = P_{CDM} \left(\frac{r_i}{r}\right)^5. \quad (1.12)$$

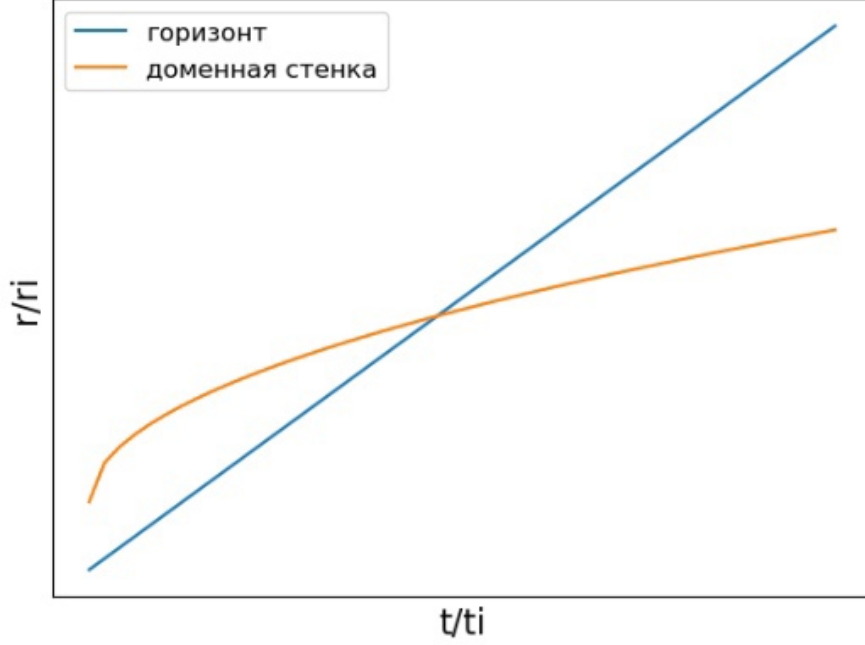


Рисунок 1 — Схема эволюции горизонта и доменной стенки.

Давление частиц скрытой массы определяется:

$$P_{CDM} = nkT = \frac{\rho_{CDM}}{m_{CDM}} kT = \Omega_{CDM,0} \rho_{c,0} (z+1)^3 \frac{kT}{m_{CDM}} \quad (1.13)$$

Температура CDM определяется как:

$$T = T_* \frac{(z+1)^2}{(z_*+1)^2} \quad (1.14)$$

Давление (1.13) может быть найдено:

$$P_{CDM} = \Omega_{CDM,0} \rho_{c,0} \frac{kT_*}{m_{CDM}} \frac{(z+1)^5}{(z_*+1)^2} \quad (1.15)$$

$\Omega_{CDM,0} = 0.27$  — современное значение отношения плотности скрытой массы к критической плотности.  $\rho_{c,0} = 5.2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3}$  — современное значение критической плотности.  $T_* = 2.4$  МэВ — температура при которой произошло отцепление CDM от плазмы [8].  $m_{CDM} = 10^3$  ГэВ — масса частиц CDM. Отцепление CDM произошло, при:

$$(z_*+1) = \frac{T_*}{T_0} = \frac{2.4 \cdot 10^6 \cdot 1.2 \cdot 10^4}{2.7} = 1.07 \cdot 10^{10} \quad (1.16)$$

Определим время, когда произошло пересечение доменной стенки и горизонта:

$$dt = \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} dz \quad (1.17)$$

$$\frac{da}{dz} = -\frac{a^2}{a_0} = -\frac{a}{z+1} \quad (1.18)$$

$$\frac{dt}{da} = \frac{1}{\dot{a}} \quad (1.19)$$

$$dt = -\frac{1}{\dot{a}} \frac{a}{z+1} dz = -\frac{1}{H} \frac{dz}{z+1} \quad (1.20)$$

$$\int_0^t dt = -\int_\infty^z \frac{1}{H} \frac{dz}{z+1} = \int_z^\infty \frac{dz}{H(z+1)} = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}}} \int_z^\infty \frac{dz}{(z+1)^3} \quad (1.21)$$

$$t = \frac{1}{2H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} (z+1)^2} \quad (1.22)$$

Откуда получаем параметр красного смещения:

$$z_i + 1 = \sqrt{\frac{1}{2H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} t_i}} \quad (1.23)$$

С другой стороны, момент пересечение стенки и горизонта может быть найден как [7]:

$$t_i = \frac{R_{inf}^2}{4} \sqrt{\frac{t_i}{t_{inf}}} \quad (1.24)$$

$$t_i = \frac{R_{inf}^2}{4t_{inf}} \quad (1.25)$$

Радиус доменной стенки в этот момент определяется:

$$r_i = R_{inf} \sqrt{\frac{t_i}{t_{inf}}} \quad (1.26)$$

$R_{inf}$  — размер доменной стенки на момент завершения инфляции,  $t_{inf}$  — время завершения инфляции. Полагая, что доменная стенка образовалась на 20 е-фолде [7]:

$$R_{inf} = \frac{e^{N_{inf}-N}}{H_{inf}} = \frac{e^{60-20}}{10^{13} \Gamma \text{ЭВ}} 0.2 \Gamma \text{ЭВ} \cdot 10^{-13} \text{см} = 4.7 \cdot 10^{-10} \text{см} \quad (1.27)$$

$$t_{inf} = \frac{N_{inf}}{H_{inf}} = \frac{60}{10^{13} \Gamma_{\text{ЭВ}} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{см}/c} \cdot 0.2 \Gamma_{\text{ЭВ}} \cdot 10^{-13} \text{см} = 4.7 \cdot 10^{-36} \text{с} \quad (1.28)$$

Тогда время (1.25), радиус (1.26) и параметр красного смещения (1.23) примут значения:

$$t_i = \frac{1}{c^2} \frac{R_{inf}^2}{4t_{inf}} = 1.534 \cdot 10^{-5} \text{с} \quad (1.29)$$

$$r_i = 9.2 \cdot 10^5 \text{см} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} z_i + 1 &= \sqrt{\frac{1}{2H_0 \sqrt{\Omega_{r,0} t_i}}} = \\ &= \sqrt{\frac{10^6 \cdot 3 \cdot 10^{18} \cdot \text{см} \cdot \text{с}}{2 \cdot 67 \cdot 10^5 \cdot \text{см} \cdot \sqrt{5.4 \cdot 10^{-5} \cdot 1.534 \cdot 10^{-5} \cdot \text{с}}}} = 1.4 \cdot 10^{12} \end{aligned} \quad (1.31)$$

$\Omega_{r,0} = 0.27$  — современное значение отношения плотности релятивистского вещества к критической плотности.  $H_0 = 67 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$  — современное значение постоянной Хаббла. Наконец давление (1.15) примет значение:

$$P_{CDM} = 0.27 \cdot 5.2 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_{\text{ЭВ}}}{\text{см}^3} \frac{2.4 \cdot 10^6 \text{ЭВ} \cdot (1.4 \cdot 10^{12})^5}{10^3 \cdot 10^9 \text{ЭВ} (1.07 \cdot 10^{10})^2} = 1.58 \cdot 10^{29} \frac{\Gamma_{\text{ЭВ}}}{\text{см}^3} \quad (1.32)$$



## 2 Численное решение уравнения эволюции СТЕНКИ

Перепишем уравнение (1.10) с учётом (1.12):

$$\ddot{r} = \frac{P_{CDM}}{\mu} \left(\frac{r_i}{r}\right)^5 - \frac{2\pi}{r} \quad (2.1)$$

Обезразмерим уравнение определив радиус стенки как  $\left(\frac{r_i}{r}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)$ , а время  $\left(\frac{t_i}{t}\right) = \left(\frac{1}{\tau}\right)$ . Тогда уравнение (2.1) примет вид:

$$\ddot{x} = \frac{P_{CDM}t_i^2}{r_i\mu} \left(\frac{1}{x}\right)^5 - \frac{2\pi}{x} \left(\frac{t_i}{r_i}\right)^2 \quad (2.2)$$

Где безразмерные параметры имеют величину:

$$\frac{P_{CDM}t_i^2}{r_i\mu} = 1.1 \cdot 10^{-4} \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{t_i c}{r_i}\right)^2 = 0.25 \quad (2.4)$$

Определим начальные условия как  $v(t_i) = 0, r(t_i) = r_i$ , которые после обезразмеривания примут значения  $v(1) = 0, x(1) = 1$ . После того как все параметры определены, уравнение (2.2) может быть решено численно. На рисунках 2 и 3 показано изменение радиуса доменной стенки.

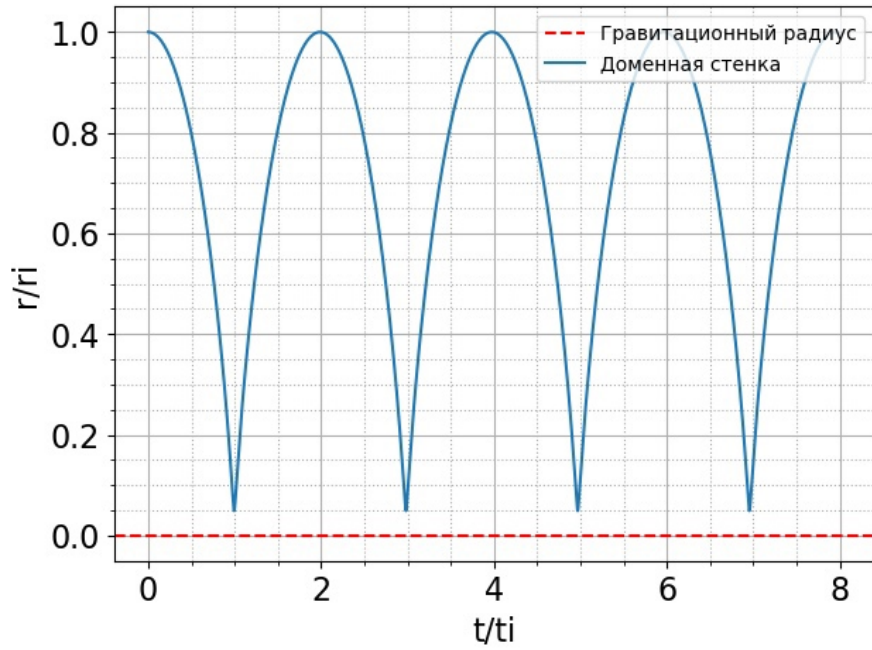


Рисунок 2 — Изменение радиуса доменной стенки

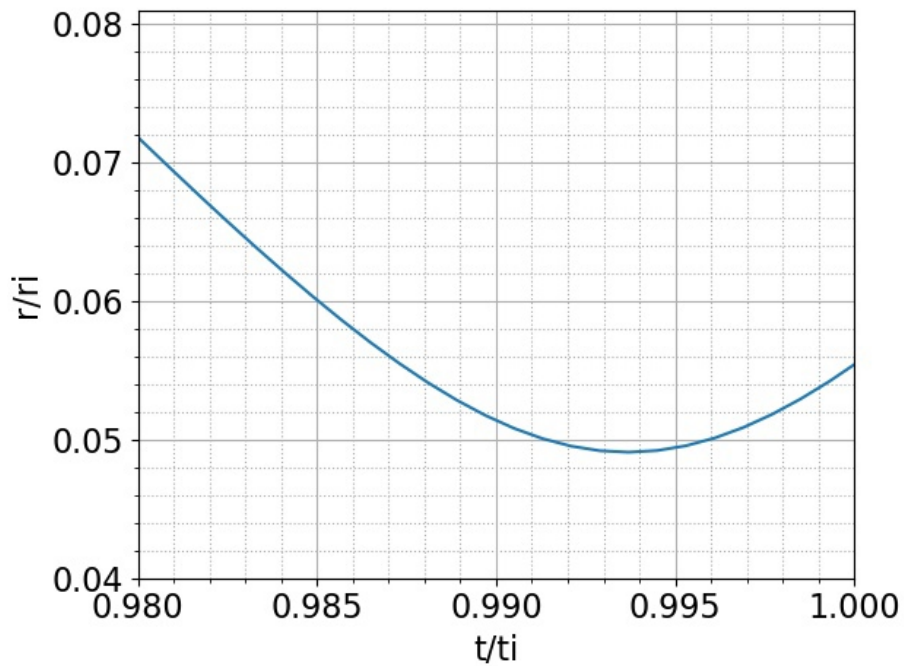


Рисунок 3 — Изменение радиуса доменной стенки

Найдём гравитационный радиус:

$$r_g = 2G(M + M_{DW}) \quad (2.5)$$

Масса доменной стенки определяется как:

$$M_{DW} = 4\pi r_i^2 \mu = 4.25 \cdot 10^9 \text{ ГэВ} = 7 \cdot 10^{-15} \text{ г} \quad (2.6)$$

Масса вещества:

$$M = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \rho_{c,0} \Omega_m (z_i + 1)^3 = 1.5 \cdot 10^{49} \text{ГэВ} = 2.5 \cdot 10^{25} \text{Г}, \quad (2.7)$$

где  $\Omega_m = 0.27$  — современное значение отношения плотности вещества к критической плотности. Гравитационный радиус примет значение:

$$r_g = 2 \cdot \frac{2.5 \cdot 10^{25} \text{Г} \cdot 0.2 \text{ГэВ} \cdot 10^{-13} \text{см}}{2 \cdot 10^{-5} \text{Г} \cdot 1.2 \cdot 10^{19} \text{ГэВ}} = 4.2 \cdot 10^{-3} \text{см} \quad (2.8)$$

Из рисунка 3 следует, что на момент времени  $t = 0.9925t_i = 1.5225 \cdot 10^{-5} \text{с}$  минимальный радиус доменной стенки составлял  $r = 0.049r_i = 4.5 \cdot 10^4 \text{см}$ .

### 3 Заключение

Решено уравнение движение доменной стенки в случае, её взаимодействия с холодным газом скалярных частиц скрытой массы (CDM). Численное решение позволило нам найти минимальный радиус доменной стенки, который в 20 раз меньше от первоначального радиуса. Сравнив это значение с гравитационным радиусом, следует, что доменная стенка не заходить под гравитационный радиус и не образует чёрную дыру. Формируется стабильная структура.

# Литература

- [1] B. S. Murygin, A. A. Kirillov, and V. V. Nikulin, “Cosmological Formation of  $(2 + 1)$ -Dimensional Soliton Structures in Models Possessing Potentials with Local Peaks”, *Physics* 3, 563-568 (2021), arXiv:2109.03271 [hep-th].
- [2] Rajaraman R. Solitons and instantons. — Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1989.
- [3] S. G. Rubin, M. Y. Khlopov, and A. S. Sakharov, “Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition”, *Grav. Cosmol. S* 6, 51–58 (2000), arXiv:hep-ph/0005271
- [4] Gani V. A., Kirillov A. A., Rubin S. G. Transitions between topologically non-trivial configurations // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2017. — V. 934. — P. 012046. — arXiv: 1711.07700 [hep-th].
- [5] A. A. Kurakin and S. G. Rubin, “The interaction of domain walls with fermions in the early Universe”, arXiv e-prints, arXiv:2011.01757 (2020), arXiv:2011.01757 [physics.gen-ph].
- [6] S. G. Rubin, A. S. Sakharov, and M. Y. Khlopov, “The Formation of Primary Galactic Nuclei during Phase Transitions in the Early Universe”, *J. Exp. Theor. Phys.* 92, 921–929 (2001), arXiv:hep-ph/0106187 [hep-ph].
- [7] K. M. Belotsky et al., “Clusters of primordial black holes”, *Eur. Phys. J. P* 79, 246 (2019), arXiv:1807.06590 [astro-ph.CO].
- [8] T. Bringmann and S. Hofmann, “Thermal decoupling of WIMPs from first principles”, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2007, 016, 016 (2007), arXiv:hep-ph/0612238 [hep-ph].
- [9] R. Rajaraman, Solitons and instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory, North-Holland personal library (North-Holland Publishing Company, 1982).