Бета-функция сигма-моделей с трёхмерным пространством полей в разных схемах перенормировки

Поляков Андрей Вадимович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе
Москва, 27 декабря 2023 г.

Сигма-модель

Действие сигма-модели определяется как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \, d^n\sigma,$$

где G_{ij} – метрический тензор, который должен удовлетворять уравнению реноpм-группы (РГ)

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G).$$

Бета функцию можно разложить по степеням $\hbar$

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + \dots$$

В схеме минимального вычитания (MS) известны выражения для первых порядков.

Мотивировка

Сигма-модели находят множество применений
Например она проще и точнее позволяет получить некоторые результаты в квантовой хромодинамике (зарядорвый радиус пионов и каонов, массы пионов и некоторых нуклонов).
Она позволяет описывать квантовый эффект Холла и сверхтекучий гелий-3.

Перенормировка

Наша задача выяснить как изменяется бета функция при переопределении метрики. Пусть метрика преобразуется следующим образом

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \dots$$

где $G_{ij}^{(L)}$ – слагаемое с размерной характеристикой $\hbar^L$. Это делается для того, чтобы устранить расходимости в следующих приближениях по $\hbar$.

С помощью пакетов xTensor и xPert в Wolfram Mathematica из уравнения ренорм-группы была вычислена бета функция при новой метрике

Первое приближение

В первом приближение уравнению ренорм-группы удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\,d\varphi_1^2 + r^2\,d\varphi_2^2\right),$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Для данной метрики мы искали векторное поле в виде $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \frac{1}{2}\ln|1-\kappa^2 r^2|$ и нашли ограничения на параметры $\hbar$ и κ в виде дифференциальных уравнение

$$\dot{\hbar} = 0;$$
$$\dot{\kappa} = \hbar(\kappa^2 - 1).$$

Второе приближение

Однако эта метрика не удовлетворяет уравнению ренорм-группы во втором приближении $(\hbar^1)$. Будем искать поправку $G_{ij}^{(0)}$ как диагональную матрицу, зависющую только от r. Бета функцию можно представить в следующем виде

$$\beta_{ij}^{(2)} = \beta_{ij}^{(1)}(G_{ij}) + \beta_{ij}^{(2)}(G_{ij}^{(0)}).$$

Эти компоненты легко вычислить, но результаты довольно громоздкие. Важно понимать, что там фигурирует константа c_2. Выражения для векторного поля в общем виде получаются очень сложными, поэтому по аналогии с однопетлевым случаем будем искать $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \Psi(r)$

Гипотеза

Мы имеем следующую систему уравнений на функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$ и $\Psi(r)$.

$$\begin{cases} \dot{G}_{11} + \beta^{(2)}_{11}(G^{(0)}_{ij}) + \beta^{(1)}_{11}(G^{(1)}_{ij}) + 2\nabla_1\nabla_1\Psi = 0, \\ \dot{G}_{22} + \beta^{(2)}_{22}(G^{(0)}_{ij}) + \beta^{(1)}_{22}(G^{(1)}_{ij}) + 2\nabla_2\nabla_2\Psi = 0, \\ \dot{G}_{33} + \beta^{(2)}_{33}(G^{(0)}_{ij}) + \beta^{(1)}_{33}(G^{(1)}_{ij}) + 2\nabla_3\nabla_3\Psi = 0. \end{cases}$$

1-е уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка относительно Ψ, а 2-е и 3-е дифференциальным уравнением первого порядка относительно Ψ. Отсюда можно сделать вывод, что уравнения совместны, $f_2'(r)$ и $f_3'(r)$ отличаются на известный множитель.

Кроме того можно сделать предположение, что $f_3(r) = ar^2$.

Заключение

Были получены значения β-функции в первых трех порядках при возмущении метрики.
Было проверено, что метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\, d\varphi_1^2 + r^2\, d\varphi_2^2\right),$$

удовлетворяет РГ уравнению в первом приближении $(\hbar^0)$.
Было сделано ряд предположений относительно второго приближения, чтобы упростить уравнения.
Дальнейшая работа подразумевает поиск констант a и c_2, чтобы 2-е уравнение разделило 3-е, а так же поиск функций $f_1(r)$, $\Psi(r)$.