

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

Институт ядерной физики и технологий Кафедра №40 «Физика
элементарных частиц»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**БЕТА-ФУНКЦИЯ СИГМА-МОДЕЛЕЙ С ТРЁХМЕРНЫМ
ПРОСТРАНСТВОМ ПОЛЕЙ В РАЗНЫХ СХЕМАХ
ПЕРЕНОРМИРОВКИ**

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц., PhD.

_____ М. Н. Алфимов

Студент

_____ А. В. Поляков

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Основные определения	3
2 Возмущение метрики	4
3 Однопетлевое РГ-уравнение	5
4 Двухпетлевое РГ-уравнение	5
Заключение	7
Список литературы	7
Приложение	8

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению того, как изменяется β -функция в трехмерном пространстве полей при ковариантном возмущении метрики. Данные вычисления проделаны в пакетах `xTensor` и `xPert` в `Wolfram Mathematica`, а так же рассматривается частный случай $O(4)$ сигма модель.

Сигма модели могут оказаться лучше других известных теорий. Например, линейная сигма модель проще и точнее позволяет вычислить зарядовый радиус пеонов и каонов, а так же массы пеонов и некоторых нуклонов, чем хиральная теория возмущения [1]. Нелинейные сигма модели могут применяться в физике конденсированного состояния, в частности при описания квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3 [2].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной работе рассматривается риманово многообразие, действие в котором записывается как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(x) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n x, \quad (1.1)$$

где x – координата на многообразии, а G_{ij} – метрический тензор, для которой выполняется уравнение ренорм-группы (РГ) [3].

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G), \quad (1.2)$$

где $\dot{G}_{ij} = \frac{d}{dt} G_{ij}$ – производная метрики по времени или так называемый поток Риччи.

Бета функцию можно разложить по степеням \hbar

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + \dots \quad (1.3)$$

где \hbar – параметр, аналогичный постоянной Планка.

В схеме минимального вычитания (MS) известны следующие выражения [4] для первых порядков β -функции.

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(1)}(G) &= R_{ij}, \\ \beta_{ij}^{(2)}(G) &= \frac{1}{2} R_{iklm} R_j{}^{klm}, \\ \beta_{ij}^{(3)}(G) &= \frac{1}{8} \nabla_k R_{ilmn} \nabla^k R_j{}^{lmn} - \frac{1}{16} \nabla_i R_{klmn} \nabla_j R^{klmn} - \\ &\quad - \frac{1}{2} R_{imnk} R_{jqp}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8} R_{iklj} R^{kmnp} R^l{}_{mnp}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В случаи, когда многообразие трехмерное тензор Римана можно выразить через тензор Риччи, метрический тензор и скалярную кривизну следующим образом.

$$R_{ijkl} = G_{jl} R_{ik} - G_{jk} R_{il} - G_{il} R_{jk} + G_{ik} R_{jl} + \frac{1}{2} R (G_{il} G_{jk} - G_{ik} G_{jl}). \quad (1.5)$$

Тогда бета функции (1.4) можно представит как

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}^{(1)}(G) &= R_{ij}, \\
\beta_{ij}^{(2)}(G) &= \left(R_{kl}R^{kl} + \frac{1}{2}R^2 \right) G_{ij} + R_{ij}R - R_i^k R_{jk}, \\
\beta_{ij}^{(3)}(G) &= \left(\frac{3}{4}R_k^m R^{kl} R_{lm} - \frac{7}{8}R_{kl}R^{kl}R + \frac{1}{4}R^3 - \frac{1}{8}(\nabla_k R)(\nabla^k R) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}(\nabla_m R_{kl})(\nabla^m R^{kl}) \right) G_{ij} + \frac{5}{2}R_{ij}R_{kl}R^{kl} - \frac{11}{8}R_{ij}R^2 + \\
&\quad + \frac{1}{4}(\nabla_k R_{ij})(\nabla^k R) - 3R_i^k R_j^l R_{kl} + \frac{19}{8}R_i^k R_{jk}R - \frac{1}{4}(\nabla_l R_{jk})(\nabla^l R_i^k) - \\
&\quad - \frac{1}{4}(\nabla_i R^{kl})(\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16}(\nabla_i R)(\nabla^j R).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

2. ВОЗМУЩЕНИЕ МЕТРИКИ

Наша задача выяснить как изменяется бета функция при переопределении метрики. Пусть метрика преобразуется следующим образом

$$\tilde{G}_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \dots \tag{2.1}$$

где $G_{ij}^{(L)}$ – слагаемое с размерной характеристикой \hbar^L . Это делается для того, чтобы устранить расходимости в следующих приближениях по \hbar .

Заметим, что бета функция выражается только через тензор Риччи R_{ij} , скалярную кривизну R , метрический тензор G_{ij} и ковариантные производные ∇_i . Метрике G_{ij} приписывается размерная характеристика \hbar^{-1} , отсюда G^{ij} имеет размерную характеристику \hbar . Ковариантная производная и тензор Риччи имеют нулевую размерную характеристику $\hbar^0 = 1$, а скалярная кривизна, будучи сверткой тензора Риччи и метрического тензора имеет размерность \hbar .

Можно заметить, что если тензор состоит из N_R символов R и N_∇ символов ∇ , то его размерная характеристика равна $N_R + \frac{1}{2}N_\nabla - 1$.

Во-первых из этого наблюдения можно сделать вывод, что $\beta_{ij}^{(L)}(G)$ имеет размерную характеристику \hbar^{L-1} , во-вторых можно перечислить все возможные тензоры порядка \hbar^0 , \hbar^1 и \hbar^2

$$\begin{aligned}
l_0 &= \{G_{ij}R, R_{ij}\} \\
l_1 &= \{G_{ij}R^2, G_{ij}R_{kl}R^{kl}, G_{ij}\nabla^2 R, G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl}, R_{ij}R, \\
&\quad \nabla^2 R_{ij}, R_{il}R_j^l, \nabla_i\nabla_j R, \nabla_i\nabla^k R_{jk}, \nabla^k\nabla_i R_{jk}\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Количество тензоров порядка \hbar^2 слишком велико, поэтому их список вынесен в **Приложение**. Возможно в данном списке какие-то тензоры не учтены или наоборот выписаны линейно зависимые.

Тогда поправки к метрике $G_{ij}^{(L)}$ можно представить как линейные комбинации тензоров l_L , для краткости выпишем только $G_{ij}^{(0)}$ и $G_{ij}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
G_{ij}^{(0)} &= c_1 G_{ij}R + c_2 R_{ij}, \\
G_{ij}^{(1)} &= c_3 G_{ij}R^2 + c_4 G_{ij}R_{kl}R^{kl} + c_5 G_{ij}\nabla^2 R + c_6 G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl} + c_7 R_{ij}R + \\
&\quad + c_8 \nabla^2 R_{ij} + c_9 R_{il}R_j^l + c_{10} \nabla_i \nabla_j R + c_{11} \nabla_i \nabla^k R_{jk} + c_{12} \nabla^k \nabla_i R_{jk}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

С помощью пакетов `xTensor` и `xPert` в Wolfram Mathematica из уравнения ренорм-группы (1.2) была вычислена бета функция при новой метрике (2.1)

$$\begin{aligned}\beta_{ij}^{(1)}(G) &= R_{ij}, \\ \beta_{ij}^{(2)}(G) &= -R_i^k R_{jk} + (1 + c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1 - c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2G_{ij}\nabla^2 R - c_2G_{ij}\nabla_k\nabla_l R^{kl}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Формула для $\beta_{ij}^{(3)}(G)$ оказалась слишком громоздкой, поэтому она помещена в Приложение.

3. ОДНОПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим частный случай $O(4)$ сигма модель. Если рассматривать первое приближение (\hbar^0), то уравнению ренорм-группы 1.2 удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar} \left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} d\varphi_1^2 + r^2 d\varphi_2^2 \right), \quad (3.1)$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Для данной метрики мы искали векторное поле в виде $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \frac{1}{2} \ln |1 - \kappa^2 r^2|$ и нашли ограничения на параметры \hbar и κ в виде дифференциальных уравнение

$$\begin{aligned}\dot{\hbar} &= 0; \\ \dot{\kappa} &= \hbar(\kappa^2 - 1).\end{aligned}\quad (3.2)$$

4. ДВУХПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Метрика 3.1 во втором приближении (\hbar^1) не удовлетворяет РГ уравнению 1.2. Будем искать поправку к метрике в следующем виде:

$$G_{ij}^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} f_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(r) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

то есть через произвольные функции, которые зависят только от r , так как мы предполагаем, что изометрии относительно φ_1 и φ_2 сохранятся.

Поправку к бета функции по \hbar^1 можно представить в следующем виде

$$\beta_{ij} \underset{\sim \hbar^2}{=} \beta_{ij}^{(1)}(G_{ij}) + \beta_{ij}^{(1)}(G_{ij}^{(0)}). \quad (4.2)$$

Эти компоненты легко вычислить

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^{(1)}(G_{ij}^{(0)}) &= \frac{1}{4} \left(\frac{f_1'(r)(f_3(r)f_2'(r) + f_2(r)f_3'(r))}{f_1(r)f_2(r)f_3(r)} - \frac{2f_2''(r)}{f_2(r)} + \frac{f_2'(r)^2}{f_2(r)^2} + \frac{f_3'(r)^2 - 2f_3(r)f_3''(r)}{f_3(r)^2} \right) \\
\beta_{22}^{(1)}(G_{ij}^{(0)}) &= \frac{f_1'(r)f_2'(r) + f_1(r) \left(-2f_2''(r) - \frac{f_2'(r)f_3'(r)}{f_3(r)} + \frac{f_2'(r)^2}{f_2(r)} \right)}{4f_1(r)^2} \\
\beta_{33}^{(1)}(G_{ij}^{(0)}) &= \frac{f_2(r)(f_3(r)(f_1'(r)f_3'(r) - 2f_1(r)f_3''(r)) + f_1(r)f_3'(r)^2) - f_1(r)f_3(r)f_2'(r)f_3'(r)}{4f_1(r)^2f_2(r)f_3(r)} \\
\beta_{11}^{(2)}(G_{ij}) &= \frac{\hbar(2r^4k^6 - 2r^2(r^2 + 2)k^4 + 4r^2k^2 + 2k^2 - 2)}{(r^2 - 1)k(r^2k^2 - 1)^3} + \\
&+ c_2 \frac{\hbar(r^4(4r^4 - 1)k^8 - 12r^6k^6 + 4r^4k^6 + 2r^2k^6 + 3(3r^4 - 4r^2 + 1)k^4 + 6r^2k^2 - 3)}{(r^2 - 1)k(r^2k^2 - 1)^3} \\
\beta_{22}^{(2)}(G_{ij}) &= \frac{(r^2 - 1)\hbar(-2r^6k^6 + 2r^4k^6 + 4r^4k^4 - 2r^2k^4 - 4r^2k^2 + 2)}{k(r^2k^2 - 1)^2} + \\
&+ c_2 \frac{(r^2 - 1)\hbar(2r^6k^6 + r^2k^6 - 6r^4k^4 + 2r^2k^4 + 3(r^2 - 2)k^2 + k^4 + 3)}{k(r^2k^2 - 1)^2} \\
\beta_{33}^{(2)}(G_{ij}) &= -\frac{r^2\hbar(k^2 - 1)(-2r^4k^4 + 2r^2k^4 + 2r^2k^2 - 2)}{k(r^2k^2 - 1)^2} - \\
&- c_2 \frac{r^2\hbar(k^2 - 1)(r^4(2r^2 - 1)k^6 + r^2(2 - 9r^2)k^4 + 3(4r^2 - 1)k^2 - 3)}{k(r^2k^2 - 1)^2}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Выражения для векторного поля в общем виде получаются очень сложными, поэтому по аналогии с однопетлевым случаем будем искать $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \Psi(r)$ и тогда компоненты для $2\nabla_i\nabla_j\Psi$ заметно проще:

$$\begin{aligned}
2\nabla_1\nabla_1\Psi &= \Psi''(r) - \frac{\Psi'(r) \left(\hbar f_1'(r) - \frac{2rk^2}{(r^2-1)(r^2k^2-1)^2} - \frac{2r}{(r^2-1)^2(r^2k^2-1)} \right)}{2 \left(f_1(r)\hbar + \frac{1}{(r^2-1)(r^2k^2-1)} \right)}, \\
2\nabla_2\nabla_2\Psi &= \frac{\Psi'(r) \left(\hbar f_2'(r) + \frac{2r(k^2-1)}{(r^2k^2-1)^2} \right)}{2 \left(f_1(r)\hbar + \frac{1}{(r^2-1)(r^2k^2-1)} \right)}, \\
2\nabla_3\nabla_3\Psi &= \frac{\Psi'(r) (\hbar f_3'(r) + 2r)}{2 \left(f_1(r)\hbar + \frac{1}{(r^2-1)(r^2k^2-1)} \right)}, \\
2\nabla_i\nabla_j\Psi &= 0 \quad (i \neq j).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Итого мы имеем три уравнения

$$\begin{cases} \dot{G}_{11} + \beta_{11}^{(2)}(G_{ij}^{(0)}) + \beta_{11}^{(1)}(G_{ij}^{(1)}) + 2\nabla_1\nabla_1\Psi = 0, \\ \dot{G}_{22} + \beta_{22}^{(2)}(G_{ij}^{(0)}) + \beta_{22}^{(1)}(G_{ij}^{(1)}) + 2\nabla_2\nabla_2\Psi = 0, \\ \dot{G}_{33} + \beta_{33}^{(2)}(G_{ij}^{(0)}) + \beta_{33}^{(1)}(G_{ij}^{(1)}) + 2\nabla_3\nabla_3\Psi = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

на функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$ и $\Psi(r)$, а так же константу c_2 . Заметим, что 2-е и 3-е уравнение являются дифференциальными уравнениями первого порядка на функцию Ψ , поэтому для совместности они должны отличаться на известную константу. В частности можно заметить, что $2\nabla_2\nabla_2\Psi$ и $2\nabla_3\nabla_3\Psi$ отличаются на мно-

житель $\frac{(k^2-1)}{(r^2k^2-1)^2}$, отсюда имеем, что

$$f_2'(r) = f_3'(r) \frac{(k^2-1)}{(r^2k^2-1)^2}. \quad (4.6)$$

Тогда и 2-е и 3-е уравнение должно отличаться на этот множитель. Если посмотреть на уравнение, то разумным предположением будет то, что $f_3(r) = ar^2$. Теперь нужно найти константы a и c_2 при которых 3-е уравнение разделит 2-е.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной исследовательской работы было рассмотрено понятие нелинейной интегрируемой $O(4)$ сигма модели. Основным объектом исследования стало изучение первых трех порядков бета-функции из РГ уравнения (1.2), а так же их вид при возмущении метрики (2.1, 2.4), которые были получены с помощью пакетов `xTensor` и `xPert` в Wolfram Mathematica. Было проверено, что в однопетлевом случае метрика 3.1 удовлетворяет РГ уравнению 1.2, а так же была предпринята попытка поиска поправок в двухпетлевом случае. Дальнейшая работа будет посвящена поиску констант c_2 и a , чтобы при делении 2 и 3 уравнения 4.5 получался известный множитель, а так же поиску $f_1(r)$ и $\Psi(r)$, удовлетворяющих РГ уравнению 1.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory*, *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [arXiv:hep-ph/0601196].
- [2] P. Fendley, *Critical points in two-dimensional replica sigma models*, 2000.
- [3] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models*, *Journal of High Energy Physics* (2018) [arXiv:1804.03399].
- [4] D.H. Friedan, *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, *Annals Phys.* **163** (1985) 318.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список тензоров порядка \hbar^2

$$\begin{aligned}
 l_2 = \{ & G_{ij}R^3, G_{ij}RR_{kl}R^{kl}, G_{ij}R_{kl}R_p^kR^{pl}, G_{ij}R\nabla^2R, G_{ij}\nabla_lR\nabla^lR, \\
 & G_{ij}R_{lm}\nabla^l\nabla^mR, G_{ij}(\nabla^lR_{l,m})(\nabla^mR), G_{ij}R\nabla^l\nabla^mR_{lm}, G_{ij}R^{lm}\nabla^2R_{lm}, \\
 & G_{ij}(\nabla^pR^{lm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}R^{pm}\nabla^l\nabla_pR_{lm}, G_{ij}(\nabla_pR^{pm})(\nabla^lR_{lm}), \\
 & G_{ij}(\nabla^lR^{pm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}\nabla^l\nabla^m\nabla_l\nabla_m, G_{ij}\nabla_p\nabla^m\nabla^p\nabla_lR_{lm}, \\
 & R_{ij}R^2, R_{ij}R_{lm}R^{lm}, R_{ij}\nabla^2R, (\nabla^pR_{ik})(\nabla_pR_j^k), R_j^k\nabla^2R_{ik}, R_{ik}R_{jl}R^{kl}, \\
 & R_{ik}\nabla^k\nabla^lR_{jl}, (\nabla^lR_{ik})(\nabla^kR_{jl}), (\nabla^kR_{ik})(\nabla^lR_{jl}), (\nabla^l\nabla^kR_{ik})R_{jl}, \\
 & (\nabla_iR)(\nabla_jR), R\nabla_i\nabla_jR, (\nabla_iR_{kl})(\nabla_jR^{kl}), R_{kl}\nabla_i\nabla_jR^{kl}, \nabla_i\nabla_j\nabla^2R \\
 & \nabla_i\nabla_j\nabla^l\nabla^kR_{kl}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla^kR), (\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}), \\
 & (\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}), (\nabla_i\nabla^kR)R_{jk}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}), \\
 & (\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}), (\nabla_i\nabla_pR_{jk})R^{kp}, (\nabla_iR^{kp})(\nabla_pR_{jk}), (\nabla_i\nabla_pR^{kp})R_{jk}, \\
 & \nabla_i\nabla_k\nabla^2R_j^k, R_{ik}\nabla_j\nabla^kR, (\nabla^kR_{ik})(\nabla_jR), R_{ik}\nabla_j\nabla_lR^{kl}, (\nabla_lR_{ik})(\nabla_jR^{kl}), R_{ik}R_j^kR \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{ij}^{(3)}(G) = & (c_1 + c_9)R_i^kR_j^lR_{kl} + (c_7 - c_4)R_{ij}R_{kl}R^{kl} + (-2c_1 - c_2 + 2c_4)G_{ij}R_k^mR^{kl}R_{lm} + \\
 & + 2c_2R_i^kR_{jk}R + (c_1 + 2c_3)G_{ij}R_{kl}R^{kl}R - \left(\frac{c_1}{2} + 2c_2 + c_3\right)R_{ij}R^2 + \frac{1}{2}c_2G_{ij}R^3 + \\
 & + \frac{1}{2}(c_1 - c_1^2 + 3c_1c_2 + c_9 + 2c_{11})R^{kl}\nabla_i\nabla_jR_{kl} + (c_1 - c_6 - c_7)R_{ij}\nabla_k\nabla_lR^{kl} - \\
 & - (c_1 + c_2 + 2c_3)G_{ij}R\nabla_k\nabla_lR^{kl} - (c_5 + c_6)G_{ij}\nabla_k\nabla_l\nabla^2R^{kl} + \\
 & + \frac{1}{2}(2c_1(c_2 - 1) - 3c_2 + 3c_2^2 - 6c_3 - c_7)R\nabla_i\nabla_jR + \\
 & + \frac{1}{2}(2c_{10} + c_{11} + c_{12} - c_5)\nabla_i\nabla_j\nabla^2R - \frac{1}{2}(2c_{10} + c_{11} + c_{12} + c_6)\nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_lR^{kl} + \\
 & + \frac{1}{2}(c_2 + c_7 + c_9 - c_1c_2)R_{jk}\nabla_i\nabla^kR + \frac{1}{2}(c_2 + c_7 + c_9 - c_1c_2)R_{ik}\nabla_j\nabla^kR \\
 & + \left(c_{11} + \frac{1}{2}(c_1 - c_1^2 + 3c_1c_2 + c_9)\right)R^{kl}\nabla_i\nabla_lR_{jk} + \\
 & + \left(c_{11} + \frac{c_{12} + 8}{2}\right)R_j^k\nabla_i\nabla_lR_k^l + \frac{1}{2}c_8R_i^k\nabla_l\nabla_jR_k^l + \\
 & + \frac{1}{4}(c_1^2 - 1 + 2(4c_{10} + c_{11} + c_{12} - 2c_4 - 2c_9))\nabla_iR^{kl}\nabla_jR_{kl} + \\
 & + \left(\frac{1}{16} + \frac{3c_2^2}{4} + \frac{c_1}{2}(1 + 2c_2) - c_3 - c_7\right)\nabla_iR\nabla_jR + \\
 & + \frac{1}{2}(c_7 - c_1(1 + c_2))\nabla_jR\nabla_kR_i^k + \frac{1}{2}(c_7 - c_1(1 + c_2))\nabla_iR\nabla_kR_j^k - \\
 & - \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla_k\nabla_iR_j^k - \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla_k\nabla_jR_i^k + \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla^2R_{ij} + \\
 & + \frac{1}{2}(c_7 - c_1 - 2c_2 - 2c_5)R_{ij}\nabla^2R + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + 2c_2^2 + 2c_3)G_{ij}R\nabla^2R + \\
 & + \frac{1}{4}(c_1^2 + 2(2c_{10} - c_{11} - c_{12} + c_7) - c_1(2 + c_2))\nabla_iR_{jk}\nabla^kR + \\
 & + \frac{1}{4}(c_1^2 + 2(2c_{10} + c_7) - c_1(2 + c_2))\nabla_jR_{ik}\nabla^kR - \left(2c_8 + \frac{c_1^2}{2}\right)\nabla_kR_{jl}\nabla^lR_i^k +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}(1 + c_1(4 + c_2) - c_1^2 - 2(c_{10} + 2c_7 + c_8))\nabla_k R_{ij} \nabla^k R + \\
& + \frac{1}{4} \left(c_2^2 - \frac{1}{2} - c_1(2 + c_2) - 4c_3 - 2c_5 \right) G_{ij} \nabla_k R \nabla^k R + \\
& + \frac{1}{2}(c_1 - c_1^2 + 3c_{11} + 3c_{12} + c_9)\nabla_i R_j^k \nabla_l R_k^l + \frac{1}{2}(c_1 + c_9 + c_{12} - c_1^2)R^{kl} \nabla_l \nabla_j R_{ik} + \\
& + \frac{1}{2}(c_1 - c_1^2 + c_{11} + c_{12} + c_9)\nabla_j R_i^k \nabla_l R_k^l + \frac{1}{2}(c_1^2 - c_{11} - c_{12} - 2c_8)\nabla^k R_{ij} \nabla_l R_k^l + \\
& + \left(\frac{1}{2}(c_1 - 4)c - 2 + c_5 - c_6 \right) G_{ij} \nabla^k R \nabla_l R_k^l + \frac{1}{2}(c_1^2 - c_{12} + 2c_8)R^{kl} \nabla_k \nabla_l R_{ij} - \\
& - \frac{1}{2}(c_1 + c_8 + c_9 + c_{12})R_j^k \nabla_l \nabla_k R_i^l - \frac{1}{2}(c_1 + c_8 + c_9)R_i^k \nabla_l \nabla_k R_j^l \\
& + \frac{1}{2}(c_8 + c_{12})R_j^k \nabla^2 R_{ik} + \frac{1}{2}c_8 R_i^k \nabla^2 R_{jk} + \frac{1}{2}(c_5 + c_6)G_{ij} \nabla^2 \nabla^2 R + \\
& + \frac{1}{2}(c_1 + 2c_8 + c_9 + 2c_{11} + 2c_{12})\nabla_i R_{kl} \nabla^l R_j^k + \frac{1}{2}(c_1 + 2c_8 + c_9)\nabla_j R_{kl} \nabla^l R_i^k + \\
& + (2c_1 + 2c_2 - 2c_4 + 3c_6)G_{ij} R^{kl} \nabla_m \nabla_l R_k^m + \frac{1}{2}(4c_2 + 4c_5 + c_6)G_{ij} R^{kl} \nabla^2 R_{kl} + \\
& + \left(\frac{1}{4} + c_1 + 2c_2 - c_4 + 2c_5 + \frac{c_6}{2} \right) G_{ij} \nabla_m R_{kl} \nabla^m R^{kl} + (c_2 + c_6)G_{ij} \nabla_l R_{km} \nabla^m R^{kl} + \\
& + \frac{1}{4}(2c_1^2 + 8c_8 - 4c_1 - 4c_9 - 1)\nabla_l R_{jk} \nabla^l R_i^k + (c_2 + c_6)G_{ij} \nabla_k R^{kl} \nabla_m R_l^m + \\
& + \left(\frac{1}{2}c_1(c_2 - 2) + c_4 + c_5 - 2c_2 - \frac{c_6}{2} \right) G_{ij} R_{kl} \nabla^k \nabla^l R.
\end{aligned}$$