Бета-функция сигма-моделей с трёхмерным пространством полей в разных схемах перенормировки

Поляков Андрей Вадимович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе

Москва, 7 мая 2024 г.

Мотивировка

Сигма-модели находят множество применений
Например в квантовой хромодинамике не получается описать такое явление как Конфайнмент с помощи теории возмущения. В этой связи для качественного описания непертурбативных явлений можно использовать игрушечные модели, схожие с КХД. В сигма моделях например наблюдается явление ассимптотической свободы и некоторых других явлений из КХД. [Michael C. Abbott, Resurgence in the O (4) sigma model, 2021]
Так же она находит применение в физике конденсированного состояния [S. C. Zhang, GROUND STATE ENERGIES OF THE NONLINEAR SIGMA MODEL AND THE HEISENBERG SPIN CHAINS, 1989]
В частности в описании квантового эффекта Холла [P. Fendley, Critical points in two-dimensional replica sigma models, 2000]

Сигма-модель

В данной работе рассматривается $O(4)$ σ модель, в которой пространство полей является римоновым многообразием.
Выбирая метрику в этом пространстве можно избавиться от расходимостей.
Задача данной работы узнать как выглядит эта метрика в различных порядках по $\hbar$.
Действие в σ моделях записывается как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(x) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n x,$$

где x — координата на многообразии, а G_{ij} — метрика, для которой выполняется уравнение ренорм-группы (РГ).

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G), ,$$

где V — векторное поля, связанное с заменой координат.

Однопетлевой случай

В однопетлевом случае уравнению ренорм-группы удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\, d\varphi_1^2 + r^2\, d\varphi_2^2\right),$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии (t — логарифм масштаба энергии), а так же получили, что

$$\dot{\hbar} = 0;$$
$$\dot{\kappa} = \hbar(\kappa^2 - 1).$$

Двухпетлевой случай

Нам известно разложение β функции по $\hbar$, а так же мы вычислили как возмущение метрики G она изменяется. Примечательно, что в возмущение G учавствуют две константы c_1 и c_2, но вклад в β вносит только c_2.

По аналогии с $O(3)$ моделью мы предполагаем, что добавка к метрике выглядит как

$$G_{ij}^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Результаты вычислений

Из уравнения

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G),$$

мы получили 3 уравнения. Из условия совместности 2-го и 3-го уравнения нам удалось найти функцию $f(r)$ в виде

$$f(r) = \frac{1}{2\hbar(\kappa^2 r^4 - 1)} \left(\beta^{(1)}_{22}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1} \beta^{(1)}_{11}(G^{(0)}) \right),$$

где $\beta^{(1)}$ — бета функция порядка $\hbar$ в произвольной схеме.

Однако дальнейшие вычисления становятся затруднительны, так как не понятно как выбрать константу c_2, чтобы сократить выражения. Исследуемая метрика похожа на метрику в $O(3)$ случае, поэтому было сделано предположение, что добавка во втором приближении такаяже, то есть

$$f(r) = A\kappa \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}$$

Заключение

Были получены значения β-функции в первых трех порядках при возмущении метрики.

Было проверено, что метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\, d\varphi_1^2 + r^2\, d\varphi_2^2\right),$$

удовлетворяет РГ уравнению в первом приближении $(\hbar^0)$.

Было сделано ряд предположений относительно второго приближения, чтобы упростить уравнения.

Дальнейшая работа будет посвящена поиску констант c_2 и A, чтобы удовлетворить условию совместности уравнений, получению $V_r^{(1)}$, а так же поиску условий на κ и $\hbar$.