Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

Институт ядерной физики и технологий Кафедра №40 «Физика
элементарных частиц»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

БЕТА-ФУНКЦИЯ СИГМА-МОДЕЛЕЙ С ТРЁХМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ПОЛЕЙ В РАЗНЫХ СХЕМАХ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц., PhD. _______ М. Н. Алфимов

Студент _______ А. В. Поляков

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучение того, как изменяется β-функция в трехмерном пространстве полей при ковариантном возмущении метрики. Данные вычисления проделаны в пакетах xTensor и xPert в Wolfram Mathematica, а так же рассматривается частный случай $O(4)$ сигма модель.

Сигма модели могут оказаться лучше других известных теорий. Например, линейная сигма модель проще и точнее позволяет вычислить зарядовый радиус пионов и каонов, а так же массы пионов и некоторых нуклонов, чем хиральная теория возмущения [1]. Нелинейные сигма модели могут применяться в физике конденсированного состояния [2], в частности при описания квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3 [3].

Так же сигма модели могут найти применения в теории струн, например действие Полякова выглядит как [4]

$$S = \frac{1}{2}T_0 \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} G_{\mu\nu}(x) \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu, \tag{0.1}$$

где g^{ab} — метрика на поверхности, заметаемой струной, $G_{\mu\nu}$ — метрика в пространстве, x^μ — координаты бозонных струн. Если вместо g^{ab} рассматривать метрику Минковского, то получится действие сигма модели (1.1).

В квантовой хромодинамике не получается описать такое явление как Конфайнмент с помощи теории возмущения. В этой связи для качественного описания непертурбативных явлений можно использовать игрушечные модели, схожие с КХД. В сигма моделях например наблюдается явление ассимптотической свободы и некоторых других явлений из КХД [5].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной работе рассматривается σ модель, в которой скалярное поле отображается в риманово многообразие, действие в котором записывается как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(x) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n x, \tag{1.1}$$

где x – координата на многообразии, а G_{ij} – метрический тензор, для которой выполняется уравнение ренорм-группы (РГ) [6].

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G), \tag{1.2}$$

где $\dot{G}_{ij} = \frac{d}{dt} G_{ij}$ – производная метрики по масштабу энергии или так называемый поток Риччи.

Бета функцию можно разложить по степеням $\hbar$

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \beta_{ij}^{(3)}(G) + \ldots \tag{1.3}$$

где $\hbar$ – параметр, аналогичный постоянной Планка.

В схеме минимального вычитания (MS) известны следующие выражения [7] для первых порядков β-функции.

$$
\begin{aligned}
\beta^{(1)}_{ij}(G) &= R_{ij},\\
\beta^{(2)}_{ij}(G) &= \frac{1}{2}R_{iklm}R_j{}^{klm},\\
\beta^{(3)}_{ij}(G) &= \frac{1}{8}\nabla_k R_{ilmn}\nabla^k R_j{}^{lmn} - \frac{1}{16}\nabla_i R_{klmn}\nabla_j R^{klmn} -\\
&\quad - \frac{1}{2}R_{imnk}R_{jpq}{}^{k}R^{mqnp} - \frac{3}{8}R_{iklj}R^{kmnp}R^{l}{}_{mnp}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

В случаи, когда многообразие трехмерное тензор Римана можно выразить через тензор Риччи, метрический тензор и скалярную кривизну следующим образом.

$$
R_{ijkl} = G_{jl}R_{ik} - G_{jk}R_{il} - G_{il}R_{jk} + G_{ik}R_{jl} + \frac{1}{2}R(G_{il}G_{jk} - G_{ik}G_{jl}). \tag{1.5}
$$

Тогда бета функции (1.4) можно представит как

$$
\begin{aligned}
\beta^{(1)}_{ij}(G) &= R_{ij},\\
\beta^{(2)}_{ij}(G) &= \left(R_{kl}R^{kl} + \frac{1}{2}R^2\right)G_{ij} + R_{ij}R - R_i{}^{k}R_{jk},\\
\beta^{(3)}_{ij}(G) &= \left(\frac{3}{4}R_k{}^{m}R^{kl}R_{lm} - \frac{7}{8}R_{kl}R^{kl}R + \frac{1}{4}R^3 - \frac{1}{8}(\nabla_k R)(\nabla^k R) +\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{4}(\nabla_m R_{kl})(\nabla^m R^{kl})\right)G_{ij} + \frac{5}{2}R_{ij}R_{kl}R^{kl} - \frac{11}{8}R_{ij}R^2 +\\
&\quad + \frac{1}{4}(\nabla_k R_{ij})(\nabla^k R) - 3R_i{}^{k}R_j{}^{l}R_{kl} + \frac{19}{8}R_i^k R_{jk}R - \frac{1}{4}(\nabla_l R_{jk})(\nabla^l R_i{}^{k}) -\\
&\quad - \frac{1}{4}(\nabla_i R^{kl})(\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16}(\nabla_i R)(\nabla^j R).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Примечательно, что возмущая метрику мы можем избавиться от расхождений в следующих приближения по $\hbar$.

2. ВОЗМУЩЕНИЕ МЕТРИКИ

Наша задача выяснить как изменяется бета функция при переопределении метрики. Пусть метрика преобразуется следующим образом

$$
\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + G^{(0)}_{ij} + G^{(1)}_{ij} + G^{(2)}_{ij} + G^{(3)}_{ij} + \ldots \tag{2.1}
$$

где $G^{(L)}_{ij}$ – слагаемое с размерной характеристикой $\hbar^L$. Это делается для того, чтобы устранить расходимости в следующих приближениях по $\hbar$.

Заметим, что бета функция выражается только через тензор Риччи R_{ij}, скалярную кривизну R, метрический тензор G_{ij} и ковариантные производные ∇_i. Метрике G_{ij} приписывается размерная характеристика $\hbar^{-1}$, отсюда G^{ij} имеет размерную характеристику $\hbar$. Ковариантная производная и тензор Риччи имеют нулевую размерную характристику $\hbar^0 = 1$, а скалярная кривизна, будучи сверткой тензора Риччи и метрического тензора имеет размерность $\hbar$.

Можно заметить, что если тензор состоит из N_R символов R и N_∇ символов ∇, то его размерная характеристика равна $N_R + \frac{1}{2}N_\nabla - 1$.

Во-первых из этого наблюдения можно сделать вывод, что $\beta^{(L)}_{ij}(G)$ имеет размерную характеристику $\hbar^{L-1}$, во-вторых можно перечислить все возможные тензоры порядка $\hbar^0$, $\hbar^1$ и $\hbar^2$

$$\begin{aligned} l_0 &= \{G_{ij}R, R_{ij}\} \\ l_1 &= \{G_{ij}R^2, G_{ij}R_{kl}R^{kl}, G_{ij}\nabla^2 R, G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl}, R_{ij}R, \\ &\quad \nabla^2 R_{ij}, R_{il}R_j{}^l, \nabla_i\nabla_j R, \nabla_i\nabla^k R_{jk}, \nabla^k\nabla_i R_{jk}\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Количество тензоров порядка $\hbar^2$ слишком велико, поэтому их список вынесен в **Приложение**. Возможно в данном списке какие-то тензоры не учтены или наоборот выписаны линейно зависимые.

Тогда поправки к метрике $G_{ij}^{(L)}$ можно представить как линейные комбинации тензоров l_L, для краткости выпишем только $G_{ij}^{(0)}$ и $G_{ij}^{(1)}$

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(0)} &= c_1 G_{ij}R + c_2 R_{ij}, \\ G_{ij}^{(1)} &= c_3 G_{ij}R^2 + c_4 G_{ij}R_{kl}R^{kl} + c_5 G_{ij}\nabla^2 R + c_6 G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl} + c_7 R_{ij}R + \\ &\quad + c_8\nabla^2 R_{ij} + c_9 R_{il}R_j{}^l + c_{10}\nabla_i\nabla_j R + c_{11}\nabla_i\nabla^k R_{jk} + c_{12}\nabla^k\nabla_i R_{jk}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

С помощью пакетов xTensor и xPert в Wolfram Mathematica из уравнения ренорм-группы (1.2) была вычислена бета функция при новой метрике (2.1)

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(1)}(G) &= R_{ij}, \\ \beta_{ij}^{(2)}(G) &= -R_i^k R_{jk} + (1+c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1-c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2 G_{ij}\nabla^2 R - c_2 G_{ij}\nabla_k\nabla_l R^{kl}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Формула для $\beta_{ij}^{(3)}(G)$ оказалась слишком громоздкой, поэтому она помещена в **Приложение**.

3. ОДНОПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВЕНИЕ

Рассмотрим частный случай $O(4)$ сигма модель. Если рассматривать первое приближение ($\hbar^0$), то уравнению ренорм-группы 1.2 удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}d\varphi_1^2 + r^2 d\varphi_2^2\right), \tag{3.1}$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Для данной метрики мы искали векторное поле в виде $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \frac{1}{2}\ln|1-\kappa^2 r^2|$ и нашли ограничения на параметры $\hbar$ и κ в виде дифференциальных уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\hbar} &= 0; \\ \dot{\kappa} &= \hbar(\kappa^2 - 1), \end{aligned} \tag{3.2}$$

то есть $\hbar = 0$ и $\kappa = \mathrm{arctg}\hbar t$.

Примечательно то, что при $\kappa = 0$ метрика 3.1 является метрикой трехмерной сферы, а при $\kappa = 1$ переходит в плоскость. то есть κ является параметром деформации модели.

4. ДВУХПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Метрика 3.1 во втором приближении ($\hbar^1$) не удовлетворяет РГ уравнению 1.2. Будем искать поправку к метрике в следующем виде:

$$G_{ij}^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $f(r)$ – произвольная функция, которая зависят только от r, так как мы предполагаем, что изометрии относительно φ_1 и φ_2 сохранятся.

Символы Кристоффеля порядка $\hbar^0$ и $\hbar^1$ равны:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{r}_{rr}{}^{(0)} &= r\frac{\kappa^2+1-2\kappa^2 r^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} \\
\Gamma^{r}_{rr}{}^{(1)} &= -r\frac{\kappa^2+1-2\kappa^2 r^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}f(r) \\
\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)} &= -r\frac{(\kappa^2-1)(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2} \\
\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(1)} &= r\frac{(\kappa^2-1)(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}f(r) \\
\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(0)} &= -r(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2) \\
\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(1)} &= r(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)f(r)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

В этом приближении мы имеем следующие уравнения:

$$\dot{G}_{ij}+\partial_i V_j^{(1)}+\partial_J V_i^{(1)}-2V_k^{(0)}\Gamma^{k}_{ij}{}^{(1)}-2V_k^{(1)}\Gamma^{k}_{ij}{}^{(0)} = -\left(\beta_{ij}^{(1)}(G^{(0)})+\beta_{ij}^{0}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta_{ij}^{0}(G^{(0)})\right). \tag{4.3}$$

Поправку к бета функции по $\hbar^1$ диагональны и равны:

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}) &= \frac{\hbar\left(2r^4k^6-2r^2\left(r^2+2\right)k^4+4r^2k^2+2k^2-2\right)}{\left(r^2-1\right)k\left(r^2k^2-1\right)^3}+ \\
&+c_2\frac{\hbar\left(r^4\left(4r^4-1\right)k^8-12r^6k^6+4r^4k^6+2r^2k^6+3\left(3r^4-4r^2+1\right)k^4+6r^2k^2-3\right)}{\left(r^2-1\right)k\left(r^2k^2-1\right)^3} \\
\beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) &= \frac{\left(r^2-1\right)\hbar\left(-2r^6k^6+2r^4k^6+4r^4k^4-2r^2k^4-4r^2k^2+2\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2}+ \\
&+c_2\frac{\left(r^2-1\right)\hbar\left(2r^6k^6+r^2k^6-6r^4k^4+2r^2k^4+3\left(r^2-2\right)k^2+k^4+3\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2} \\
\beta_{33}^{(1)}(G^{(0)}) &= -\frac{r^2\hbar\left(k^2-1\right)\left(-2r^4k^4+2r^2k^4+2r^2k^2-2\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2}- \\
&-c_2\frac{r^2\hbar\left(k^2-1\right)\left(r^4\left(2r^2-1\right)k^6+r^2\left(2-9r^2\right)k^4+3\left(4r^2-1\right)k^2-3\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2} \\
\beta_{11}^{0}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta_{11}^{0}(G^{(0)}) &= \frac{f'(r)\left(r^2k^2-1\right)^2\left(r^4k^2-2r^2+1\right)}{2r\left(r^2-1\right)\left(r^2k^2-1\right)^3} \\
\beta_{22}^{0}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta_{22}^{0}(G^{(0)}) &= \frac{\hbar\left(r^2-1\right)\left(k^2-1\right)\left(rf'(r)\left(r^2k^2-1\right)-4f(r)\right)}{2\left(r^2k^2-1\right)^2} \\
\beta_{33}^{0}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta_{33}^{0}(G^{(0)}) &= \frac{1}{2}\hbar r\left(\left(r^2-1\right)f'(r)+4f(r)\right)\left(r^2k^2-1\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из недиагональных уравнений получаем условие на $V^{(1)}$

$$\begin{cases} 2V_r^{(1)} {\Gamma^r_{r\varphi_1}}^{(0)} = \partial_r V_{\varphi_1}^{(1)} - \partial_{\varphi_1} V_r^{(1)} \\ 2V_r^{(1)} {\Gamma^r_{r\varphi_2}}^{(0)} = \partial_r V_{\varphi_2}^{(1)} - \partial_{\varphi_2} V_r^{(1)}, \end{cases} \tag{4.5}$$

которое имеет решение $V_r^{(1)} = V(r)$ и $V_\varphi = 0$. Запишем второе и третье диагональное уравнение:

$$\begin{cases} -2V_r^{(1)} {\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(0)} - 2V_r^{(0)} {\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} \\ -2V_r^{(1)} {\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(0)} - 2V_r^{(0)} {\Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Заметим, что это два разных уравнения на $V_r^{(1)}$, значит они должны быть совместными, то есть

$$\frac{{\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(0)}}{{\Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}}^{(0)}} = \frac{{\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(1)}}{{\Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}}^{(1)}} = \frac{(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)}}{(\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)}}. \tag{4.7}$$

Несложно проверить, что

$$\frac{{\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(0)}}{{\Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}}^{(0)}} = \frac{{\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(1)}}{{\Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}}^{(1)}} = \frac{\kappa^2 - 1}{(1-\kappa^2 r^2)^2}, \tag{4.8}$$

а значит

$$(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} = (\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)} \frac{\kappa^2 - 1}{(1-\kappa^2 r^2)^2}. \tag{4.9}$$

Отсюда получим, что

$$2f(r)\hbar(\kappa^2 r^4 - 1) = \beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1}\beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}), \tag{4.10}$$

то есть мы нашли $f(r)$ для любого параметра c_2. Теперь можно найти $V_r^{(1)}$ из 4.6 и получить ограничения на $\hbar$ и κ из уравнения

$$\dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} + 2V_r^{(1)} {\Gamma^r_{rr}}^{(0)} + 2V_r^{(0)} {\Gamma^r_{rr}}^{(1)} = -(\beta_{rr})^{(1)}, \tag{4.11}$$

однако полученные уравнения оказались слишком громоздкими.

5. АНАЛОГИЯ С O(3)

Так как прямыми вычислениями не удалось подобрать $f(r)$, то можно попробовать посмотреть на добавку к метрике в $O(3)$. В данной модели метрика в двухпетлевом случае выглядит как [8]

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{1 - \frac{\hbar\kappa(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} dr^2 + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} d\varphi_1^2\right). \tag{5.1}$$

Как можно заметить в однопетлевом случае она совпадает с первыми двумя компонентами (3.1). Поэтому можно сделать предположение, что

$$f(r) = A\kappa \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}, \tag{5.2}$$

где A — произвольная константа. Теперь нам требуется проверить, что уравнения (4.6) должны быть совместны для такой $f(r)$. Отсюда следует условие

$$\frac{1}{{\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(0)}}\left((\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} - 2V_r^{(0)} {\Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}}^{(1)}\right) = \frac{1}{{\Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}}^{(0)}}\left((\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)} - 2V_r^{(0)} {\Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}}^{(1)}\right), \tag{5.3}$$

то есть теперь требуется подобрать константы c_2 и A таким образом, чтобы это уравнение выполнялось.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной исследовательской работы было рассмотрено понятие нелинейной интегрируемой $O(4)$ сигма модели. Основным объектом исследования стало изучение первых трех порядков бета-функции из РГ уравнения (1.2), а так же их вид при возмущении метрики (2.1, 2.4), которые были получены с помощью пакетов xTensor и xPert в Wolfram Mathematica. Было проверено, что в однопетлевом случае метрика 3.1 удовлетворяет РГ уравнению 1.2, а так же была предпринята попытка поиска поправок в двухпетлевом случае. Дальнейшая работа будет посвящена поиску констант c_2 и A, чтобы удовлетворить условию 5.3, получению $V_r^{(1)}$, а так же поиску условий на κ и $\hbar$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory, arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [arXiv:hep-ph/0601196].

[2] S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, *GROUND STATE ENERGIES OF THE NONLINEAR SIGMA MODEL AND THE HEISENBERG SPIN CHAINS, Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1110.

[3] P. Fendley, *Critical points in two-dimensional replica sigma models*, 2000.

[4] R. Kallosh and A.A. Tseytlin, *Simplifying superstring action on ads5 × s5, Journal of High Energy Physics* **1998** (1998) 016–016.

[5] M.C. Abbott, Z. Bajnok, J. Balog, □. Hegedűs and S. Sadeghian, *Resurgence in the o(4) sigma model, Journal of High Energy Physics* **2021** (2021) .

[6] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models, Journal of High Energy Physics* (2018) [arXiv:1804.03399].

[7] D.H. Friedan, *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions, Annals Phys.* **163** (1985) 318.

[8] M. Alfimov and A. Litvinov, *On loop corrections to integrable 2d sigma model backgrounds, Journal of High Energy Physics* **2022** (2022) .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список тензоров порядка $\hbar^2$

$$
\begin{aligned}
l_2 = \{&G_{ij}R^3, G_{ij}RR_{kl}R^{kl}, G_{ij}R_{kl}R^k_pR^{pl}, G_{ij}R\nabla^2R, G_{ij}\nabla_lR\nabla^lR,\\
&G_{ij}R_{lm}\nabla^l\nabla^mR, G_{ij}(\nabla^lR_{l,m})(\nabla^mR), G_{ij}R\nabla^l\nabla^mR_{lm}, G_{ij}R^{lm}\nabla^2R_{lm},\\
&G_{ij}(\nabla^pR^{lm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}R^{pm}\nabla^l\nabla_pR_{lm}, G_{ij}(\nabla_pR^{pm})(\nabla^lR_{lm}),\\
&G_{ij}(\nabla^lR^{pm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}\nabla^l\nabla^m\nabla_l\nabla_m, G_{ij}\nabla_p\nabla^m\nabla^p\nabla_lR_{lm},\\
&R_{ij}R^2, R_{ij}R_{lm}R^{lm}, R_{ij}\nabla^2R, (\nabla^pR_{ik})(\nabla_pR^k_j), R^k_j\nabla^2R_{ik}, R_{ik}R_{jl}R^{kl},\\
&R_{ik}\nabla^k\nabla^lR_{jl}, (\nabla^lR_{ik})(\nabla^kR_{jl}), (\nabla^kR_{ik})(\nabla^lR_{jl}), (\nabla^l\nabla^kR_{ik})R_{jl},\\
&(\nabla_iR)(\nabla_jR), R\nabla_i\nabla_jR, (\nabla_iR_{kl})(\nabla_jR^{kl}), R_{kl}\nabla_i\nabla_jR^{kl}, \nabla_i\nabla_j\nabla^2R\\
&\nabla_i\nabla_j\nabla^l\nabla^kR_{kl}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla^kR), (\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}),\\
&(\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}), (\nabla_i\nabla^kR)R_{jk}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}),\\
&(\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}), (\nabla_i\nabla_pR_{jk})R^{kp}, (\nabla_iR^{kp})(\nabla_pR_{jk}), (\nabla_i\nabla_pR^{kp})R_{jk},\\
&\nabla_i\nabla_k\nabla^2R^k_j, R_{ik}\nabla_j\nabla^kR, (\nabla^kR_{ik})(\nabla_jR), R_{ik}\nabla_j\nabla_lR^{kl}, (\nabla_lR_{ik})(\nabla_jR^{kl}), R_{ik}R^k_jR\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{(3)}_{ij}(G) = &(c_1+c_9)R_i{}^kR_j{}^lR_{kl} + (c_7-c_4)R_{ij}R_{kl}R^{kl} + (-2c_1-c_2+2c_4)G_{ij}R_k{}^mR^{kl}R_{lm}+\\
&+2c_2R_i{}^kR_{jk}R + (c_1+2c_3)G_{ij}R_{kl}R^{kl}R - \left(\frac{c_1}{2}+2c_2+c_3\right)R_{ij}R^2 + \frac{1}{2}c_2G_{ij}R^3+\\
&+\frac{1}{2}(c_1-c_1^2+3c_12+c_9+2c_{11})R^{kl}\nabla_i\nabla_jR_{kl} + (c_1-c_6-c_7)R_{ij}\nabla_k\nabla_lR^{kl}-\\
&-(c_1+c_2+2c_3)G_{ij}R\nabla_k\nabla_lR^{kl} - (c_5+c_6)G_{ij}\nabla_k\nabla_l\nabla^2R^{kl}+\\
&+\frac{1}{2}(2c_1(c_2-1)-3c_2+3c_2^2-6c_3-c_7)R\nabla_i\nabla_jR+\\
&+\frac{1}{2}(2c_{10}+c_{11}+c_{12}-c_5)\nabla_i\nabla_j\nabla^2R - \frac{1}{2}(2c_{10}+c_{11}+c_{12}+c_6)\nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_lR^{kl}+\\
&+\frac{1}{2}(c_2+c_7+c_9-c_1c_2)R_{jk}\nabla_i\nabla^kR + +\frac{1}{2}(c_2+c_7+c_9-c_1c_2)R_{ik}\nabla_j\nabla^kR\\
&+\left(c_{11}+\frac{1}{2}(c_1-c_1^2+3c_12+c_9)\right)R^{kl}\nabla_i\nabla_lR_{jk}+\\
&+\left(c_{11}+\frac{c_{12}+8}{2}\right)R_j{}^k\nabla_i\nabla_lR_k{}^l + \frac{1}{2}c_8R_i{}^k\nabla_l\nabla_jR^l_k+\\
&+\frac{1}{4}(c_1^2-1+2(4c_{10}+c_{11}+c_{12}-2c_4-2c_9))\nabla_iR^{kl}\nabla_jR_{kl}+\\
&+\left(\frac{1}{16}+\frac{3c_2^2}{4}+\frac{c_1}{2}(1+2c_2)-c_3-c_7\right)\nabla_iR\nabla_jR+\\
&+\frac{1}{2}(c_7-c_1(1+c_2))\nabla_jR\nabla_kR_i{}^k + \frac{1}{2}(c_7-c_1(1+c_2))\nabla_iR\nabla_kR_j{}^k-\\
&-\frac{1}{2}c_1c_2R\nabla_k\nabla_iR_j{}^k - \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla_k\nabla_jR_i{}^k + \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla^2R_{ij}+\\
&+\frac{1}{2}(c_7-c_1-2c_2-2c_5)R_{ij}\nabla^2R + \frac{1}{2}(c_1+c_2+2c_2^2+2c_3)G_{ij}R\nabla^2R+\\
&+\frac{1}{4}(c_1^2+2(2c_{10}-c_{11}-c_{12}+c_7)-c_1(2+c_2))\nabla_iR_{jk}\nabla^kR+\\
&+\frac{1}{4}(c_1^2+2(2c_{10}+c_7)-c_1(2+c_2))\nabla_jR_{ik}\nabla^kR - \left(2c_8+\frac{c_1^2}{2}\right)\nabla_kR_{jl}\nabla^lR_i{}^k+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}(1+c_1(4+c_2)-c_1^2-2(c_{10}+2c_7+c_8))\nabla_k R_{ij}\nabla^k R+\\
&+\frac{1}{4}\left(c_2^2-\frac{1}{2}-c_1(2+c_2)-4c_3-2c_5\right)G_{ij}\nabla_k R\nabla^k R+\\
&+\frac{1}{2}(c_1-c_1^2+3c_{11}+3c_{12}+c_9)\nabla_i R_j{}^k\nabla_l R_k{}^l+\frac{1}{2}(c_1+c_9+c_{12}-c_1^2)R^{kl}\nabla_l\nabla_j R_{ik}+\\
&+\frac{1}{2}(c_1-c_1^2+c_{11}+c_{12}+c_9)\nabla_j R_i{}^k\nabla_l R_k{}^l+\frac{1}{2}(c_1^2-c_{11}-c_{12}-2c_8)\nabla^k R_{ij}\nabla_l R_k{}^l+\\
&+\left(\frac{1}{2}(c_1-4)c-2+c_5-c_6\right)G_{ij}\nabla^k R\nabla_l R_k{}^l+\frac{1}{2}(c_1^2-c_{12}+2c_8)R^{kl}\nabla_k\nabla_l R_{ij}-\\
&-\frac{1}{2}(c_1+c_8+c_9+c_{12})R_j{}^k\nabla_l\nabla_k R_i{}^l-\frac{1}{2}(c_1+c_8+c_9)R_i{}^k\nabla_l\nabla_k R_j{}^l\\
&+\frac{1}{2}(c_8+c_12)R_j{}^k\nabla^2 R_{ik}+\frac{1}{2}c_8 R_i{}^k\nabla^2 R_{jk}+\frac{1}{2}(c_5+c_6)G_{ij}\nabla^2\nabla^2 R+\\
&+\frac{1}{2}(c_1+2c_8+c_9+2c_{11}+2c_{12})\nabla_i R_{kl}\nabla^l R_j{}^k+\frac{1}{2}(c_1+2c_8+c_9)\nabla_j R_{kl}\nabla^l R_i{}^k+\\
&+(2c_1+2c_2-2c_4+3c_6)G_{ij}R^{kl}\nabla_m\nabla_l R_k{}^m+\frac{1}{2}(4c_2+4c_5+c_6)G_{ij}R^{kl}\nabla^2 R_{kl}+\\
&+\left(\frac{1}{4}+c_1+2c_2-c_4+2c_5+\frac{c_6}{2}\right)G_{ij}\nabla_m R_{kl}\nabla^m R^{kl}+(c_2+c_6)G_{ij}\nabla_l R_{km}\nabla^m R^{kl}+\\
&+\frac{1}{4}(2c_1^2+8c_8-4c_1-4c_9-1)\nabla_l R_{jk}\nabla^l R_i{}^k+(c_2+c_6)G_{ij}\nabla_k R^{kl}\nabla_m R_l{}^m+\\
&+\left(\frac{1}{2}c_1(c_2-2)+c_4+c_5-2c_2-\frac{c_6}{2}\right)G_{ij}R_{kl}\nabla^k\nabla^l R.
\end{aligned}
$$