Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

Отчет о научно-исследовательской работе на тему:

Динамика двойных первичных черных дыр в кластерах

Научный руководитель
ассисент ________ В. Д. Стасенко

Выполнил
студент группы Б21-102 ________ К. М. Гордильо

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

После открытия гравитационных волн коллабарацией LIGO-Virgo, сливающиеся первичные черные дыры (ПЧД) активно рассматриваются как их возможный источник [1–4]. Также существует ряд других указаний на существование ПЧД: наблюдение сверхмассивных черных дыр на больших красных смещениях [5], при некоторых массовых диапазонах ПЧД возможно объяснение темной материи [6], недавно обнаружен стохастический гравитационно-волновой фон может объяснен либо формированием ПЧД [7], либо их слиянием [8].

На ПЧД наложены существенные наблюдательные ограничения на их вклад в состав темной материи $f = \Omega_{PBH}/\Omega_{DM}$ [6; 9]. В контексте данной работы в частностности, вклад ПЧД с массами $\sim 10\,M_{\odot}$ ограничен на уровне $f \lesssim 10^{-3}$ по наблюдению темпа слияний черных дыр таких масс коллабарацией LIGO-Virgo-KAGRA (LVK). Это ограничение предполагает, что двойные ПЧД формируются в ранней Вселенной на РД стадии, что соответвует времени $< t_{eq} \approx 70$ тыс. лет (индекс eq означает момент перехода от РД к МД стадии). Далее сформированные двойные постепенно закручиваются из-за излучения гравитационных волн и в конечном итоге сливаются. Если доля ПЧД будет $f \gtrsim 10^{-3}$, то темп слияний ПЧД будет превышать наблюдения LVK. Однако эти ограничения не учитывают возможное разрушение двойных от момента ее формирования глубоко в ранней Вселенной до современного момента $t_0 = 13.8$ млрд. лет. В работах [10; 11] было показано, что при больших долях ПЧД $f \gtrsim 0.01$ активно происходит кластеризация ПЧД при красных смещениях $z > 10$. В таких кластерах ПЧД активно рассеиваются друг на друге в результате чего возможно разрушение или возмущение параметров двойной системы, что ведет к ослаблению ограничений до $f \sim 0.1$. Также существует ряд моделей предсказывающих изначальную кластеризацию ПЧД [12; 13] для которых подобное ослабление ограничений также релевантно. Для получения количественных результатов относительно разрушения или возмущения параметров двойной ПЧД, в данной работе моделируется задача задача трех тел — рассеяние двойной системы ПЧД на третьей ПЧД в кластере.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ПЧД В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В этой главе дается обзор формирования двойных ПЧД в ранней Вселенной [1; 14; 15]. На качественном уровне идея формирования двойных ПЧД на РД стадии состоит в том, что плотность двух ПЧД в некоторый момент времени t_d (индекс d означается decouple) окажется больше, чем плотность излучения. Происходит это из-за того, что плотность излучения падает как $\rho_r \propto s^{-4}$, в то время как плотность вещества $\rho_M \propto s^{-3}$, где s— это масштабный фактор. Также считается, что ПЧД случайно распределены в пространстве, в результате чего локально плотность двух ПЧД может быть сильно повышенной, что ведет в момент t_d к формированию пары.

Оценим момент формирования пары t_d. Введем среднее расстояние между ПЧД на момент t_{eq}

$$\overline{x} = \left(\frac{M}{\rho_{PBH}}\right)^{1/3} = \frac{1}{s_{eq} f^{1/3}} \left(\frac{M}{\Omega_{DM}\rho_c}\right)^{1/3}, \tag{1}$$

где $\rho_{PBH} = f\rho_{DM}$ — плотнотсь ПЧД, а также полагается современный масштабный фактор нормирован на единицу $s_0 = 1$, $\rho_c = 127\, M_\odot$ кпк$^{-3}$ — современная критическая плотность Вселенной и $\Omega_{DM} = \rho_{DM}/\rho_c = 0.25$ — доля темной материи в составе Вселенной. Пара ПЧД становится гравитационно-связанной в момент выполнения условия

$$\frac{M}{R^3} = \rho_r(t_d) = \rho_{r,eq}\left(\frac{s_{eq}}{s_d}\right)^4 \tag{2}$$

где $R = x s_d / s_{eq}$, где x — расстояние между двумя ПЧД на момент t_{eq}, если бы они продолжили расширяться вместе со Вселенной (собственное расстояние). Отметим, что в рассматриваемом предположении x меняется в пределах от 0 до $\overline{x}$. Тогда получим

$$\frac{s_{eq}}{s_d} = \frac{1+z_d}{1+z_{eq}} = f\left(\frac{\overline{x}}{x}\right)^3, \tag{3}$$

где $z_{eq} = 3400$— красное смещение РД-МД перехода. Видно, что чем ближе пара (маленькие x) тем раньше она формируется (больше z_d). Также отметим, что в момент РД-МД перехода z_{eq} формируются пары для которых $x = f^{1/3}\overline{x}$.

После отцепления от расширения Вселенной две ПЧД будут иметь ненулевой момент импульса, который создается приливными силами от третьей ближайшей ПЧД, поэтому лобовое столкновение двух ПЧД не происходит. В случае $f < 0.01$ момент импульса будет уже создавать инфляционными адиабатическими возмущениями [15]. Перпендикулярную составляющая скорости на момент формирования пары можно оценить

$$v_\perp \sim F_t \tau, \tag{4}$$

где $F_t = GMR/d^3$ — приливная сила на единицу массу от третьей ПЧД и $d = ys_d/s_{eq}$ — расстояние до нее и y имеет тот же смысл что и переменная x. Посольку расстояние до третьей ПЧД должно быть больше, чем расстояние между ПЧД формирующих пару, то $x < y$, также должны быть выполнено $y < \overline{x}$. Время в формуле (4) оценим как время действия приливной силы $\tau \sim H^{-1}$ — возраст Вселенной на момент формирования двойной $\tau \sim 1/\sqrt{G\rho_{r,d}}$. После формирования приливные силы "выключаются"и на динамику двойной не влияют. Тогда момент импульса будет

$$l \sim Rv_\perp \sim \left(\frac{R}{d}\right)^3 \sqrt{GMR}, \tag{5}$$

где мы учли $\rho_{r,d} = M/R^3$ на момент формирования пары. Введем безразмерный угловой момент $j = \sqrt{1-e^2}$, где e — эксцентриситет, тогда из результатов задачи Кеплера следует

$$j = \sqrt{\frac{|E|l^2}{M^3G^2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^3, \tag{6}$$

где энергия была оценена как $E = -GM/R$. Большая полуось в свою очередь с помощью (2) оценивается как $a = R$

$$a = \frac{x}{f}\left(\frac{x}{\overline{x}}\right)^3. \tag{7}$$

Полученные результаты с точностью до множителя порядка единицы совпадают с численным исследованием формирования двойной [15; 16].

Вероятность того, что расстояние между двумя ПЧД будет $(x, x+dx)$ и расстояние до третьей ПЧД, которая создает угловой момент двойной, $(y, y+dy)$

$$dP = \frac{18}{\overline{x}^6} x^2 y^2 dx dy \tag{8}$$

где пределы $0 < x < \overline{x}$ и $x < y < \overline{x}$. Видно, что часть распределения по y преимущественно набирается при больших значения $y \lesssim \overline{x}$, а значит $j \ll 1$, что соответствует высокоэксцентричным эллипсам. Для того, чтобы это явно показать перейдем от пемеренных x, y в распределении (8) к a, j с помощью формул перехода (6) и (7)

$$dP = \frac{3}{2} \left(\frac{f}{\overline{x}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{a}}{j^2} da dj \tag{9}$$

где пределы $(af/\overline{x})^{3/4} < j < 1$ и $0 < a < \overline{x}/f$. В этой формуле более явно видно, что распределение по j сильнее при $j \ll 1$.

Время жизни двойной система за счет излучения гравитационных волн

$$t_{gw} = \frac{3\, c^5 a^4 j^7}{170\, G^3 M^3}, \tag{10}$$

где c— скорость света. Оценим характерные начальные параметры двойной, сливающихся за время t_{gw}. Т.к. распределение (9) максимально при малых j, то будет считать, что характерное значение $j_* \sim (af/\overline{x})^{3/4}$ при заданной большой полуоси a, тогда

$$\begin{aligned} a_* &= \left(\frac{170 G^3 M^{19/4} t_{gw}}{3 c^5 f^7 \rho_{DM,eq}} \right)^{4/37} \\ &\approx 137\, f^{-28/37} \left(\frac{M}{10\, M_\odot} \right)^{19/37} \left(\frac{t_{gw}}{10\,\mathrm{Gyr}} \right)^{4/37} \ \mathrm{au} \end{aligned} \tag{11}$$

характерное значение больших полуосей для двойных, сливающихся в современную эпоху. Характерное значение углового момента в свою очередь

$$j_* \approx 0.014\, f^{16/37} \left(\frac{M}{10\, M_\odot} \right)^{5/37} \left(\frac{t_{gw}}{10\,\mathrm{Gyr}} \right)^{3/37}, \tag{12}$$

как и ожидалось двойные имеют очень маленькие угловые моменты, что соответствует эксцентристету $e \approx 0.9999$ для случая $f = 1$. Также отметим, что полученные зависимости от f и M и значения по порядку величины соответветствуют более тщательному рассчету [4].

Время жизни двойной определяется выражением:

$j = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$

$t = \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 j^7 \times 10^{10}$
где
$a_0 = 2.0 \times 10^{11} \left(\frac{M_{BH}}{M_\odot}\right)^{\frac{3}{4}}$ см

3. ДАЛЬНЫЕ СБЛИЖЕНИЯ С ДРУГИМИ ПЧД

Сближение считается дальнем если расстояние наибольшего сближения между двойной системой и третьей ПЧД r_p привышает большой полуоси двойной a по крайнее мере в несколько раз, и поэтому взаймодествие можно считать приливным.
Рассмотрим одиночную ПЧД, приближающуюся к двойной системе по гиперболической орбите с прицельным параметром b и относительной скоростью на бесконечности v. Сохранение энергии и момента импульса подразумевает следующие соотношения между b, v и r_p:

$$b^2 = {r_p}^2 + \frac{6Mr_p}{v^2} \tag{13}$$

$$r_p = \frac{b}{[1 + (\frac{3M}{bv^2})^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{3M}{bv^2}} \tag{14}$$

При сохранении углового момента скорость в перицентре равна $v_p = \frac{bv}{r_p}$.

Таким образом, характерное время взаимодействия определяется как

$$t_p \backsim \frac{r_p}{v} = \frac{{r_p}^2}{bv} \tag{15}$$

Изменение удельного углового момента имеет порядок

$$\Delta l \backsim \frac{M}{{r_p}^3} a^2 t_p = \frac{Ma^2}{r_p bv} \tag{16}$$

Изменение удельной энергии $\frac{E}{M}$ составляет не более порядка

$$\frac{\Delta E}{M} \backsim \frac{M}{{r_p}^3} a \sqrt{\frac{M}{a}} t_p \backsim \frac{M^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{r_p bv} \tag{17}$$

следовательно, дробное изменение большой полуоси составляет не более

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta E}{E} \backsim \frac{M^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}}{r_p bv} \tag{18}$$

Таким образом

$$\Delta j = \frac{\Delta l}{\sqrt{2Ma}} - \frac{1}{2} j \frac{\Delta a}{a} \backsim \frac{\Delta l}{\sqrt{Ma}} \backsim \frac{M^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}}{r_p bv} \tag{19}$$

4. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Для моделирования взаимодействия между двойной системой и третьим телом был использован код на Matlab, который в численном приближении решает и визуализирует задачу трех тел. Работа программы основана на методе Рунге-Кутты четвертого порядка, определяющий в каждом временном шаге положения и скорости каждой из тел. Максимальное время запускания кода и временной шаг можно регулировать

Начальные параметры двойной, то есть, эксцентриситет e и большая полуось a выбираются таким образом, чтобы начальное время жизни двойной t_{init} совпало, по порядку величины, с возрастом вселенной (хаббловским времени) $t_H = 1.37 \times 10^{10}$ лет.

$e = 0.99$

$a = 20$ a.u.

$t_{init} = 1.79 \times 10^{10}$ лет

Выбор начальных условий для третьего тела, то есть, прицельного параметра b и относительной скорости в бесконечности v_{inf}, гарантирует дальнейшее рассеивание.

$b \gg a$ (исследовалось несколько значений прицельного параметра)

$v_{inf} = 1$ км/с

На основе этих значений, код вычисляет начальную кинетическую энергию и момент импульса системы двойная-третьего тело как будто двойная была точечной.

Для каждого прицельного параметра были исследованы разные ориентации двойной вокруг оси OZ (от 0 до π по интервалам $\frac{\pi}{5}$) и разные ориентации рассеиваюшейся черной дыры вокруг оси OX (от 0 до 2π по интервалам $\frac{\pi}{5}$). В каждом случае было рассчитанно новое время жизни двойной системы, определенно ее новыми параметрами.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Как результат моделирования, для каждого прицельного параметра был получен набор новых значений времени жизни и построены следующие графики:

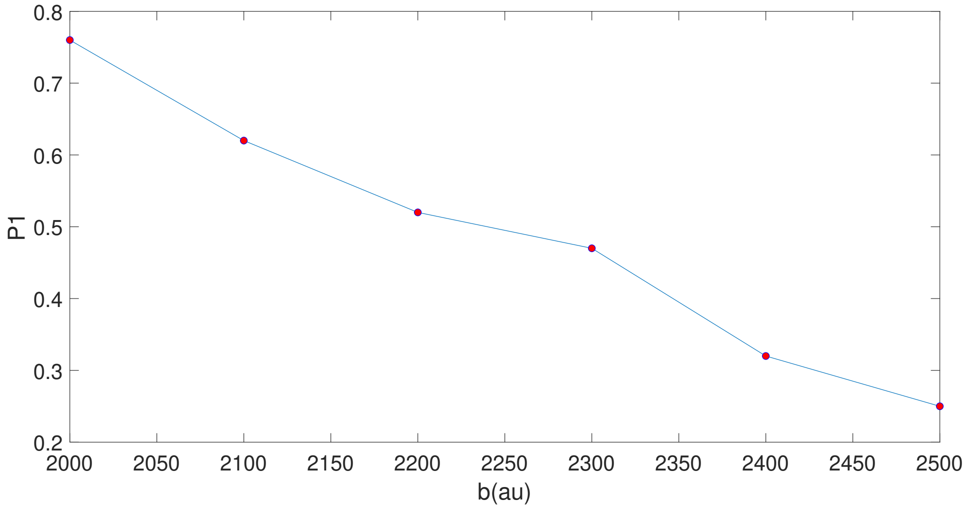


Рисунок 1 — Вероятность того, что время жизни двойной в результате рассеяния увеличится так $\frac{t}{t_0} \geq 10$

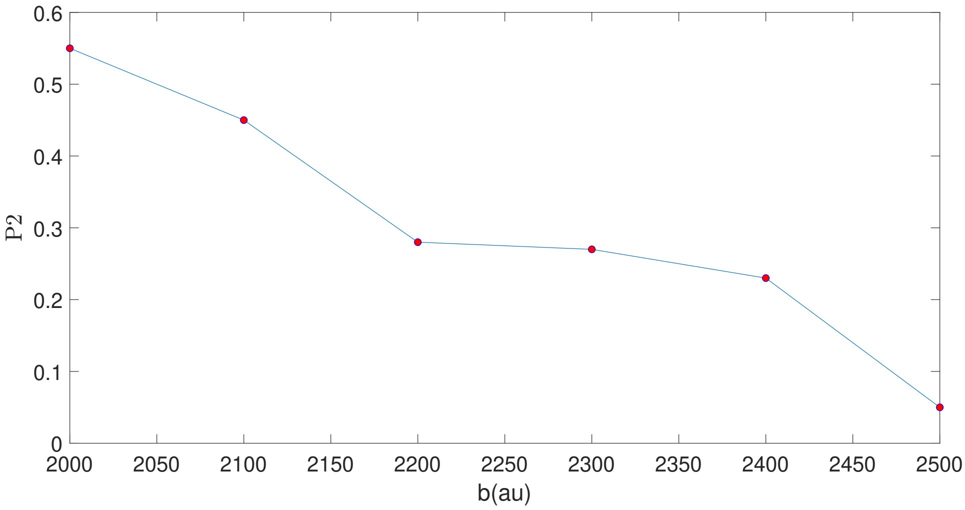


Рисунок 2 — Вероятность того, что время жизни двойной в результате рассеяния увеличится так $\frac{t}{t_0} \geq 100$

Оценим темп таких взаимодействий из «эн-сигма-вэ» соображений

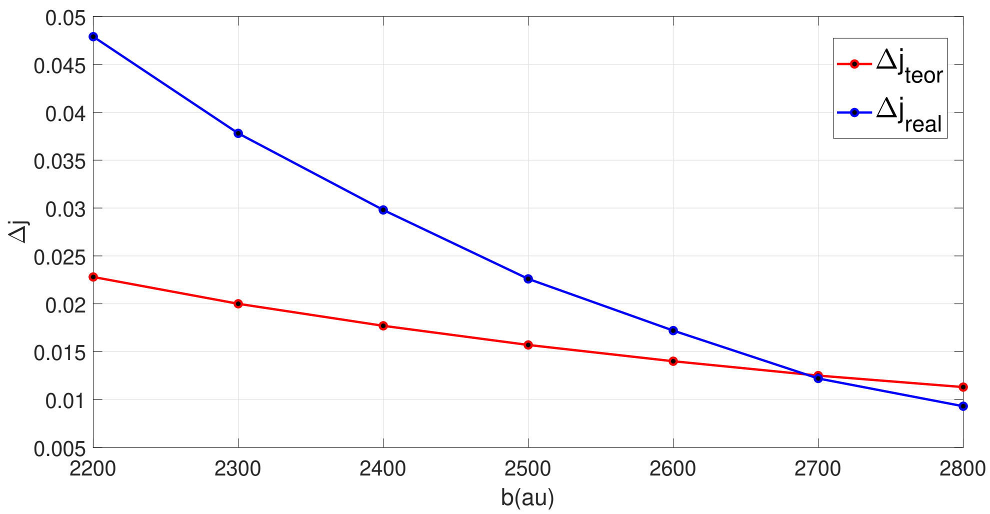
$$\Gamma \sim n\sigma v, \tag{20}$$

где n — концентрация ПЧД в кластере, $\sigma = \pi b^2$ — сечение рассеяния и v — относительная скорость на бесконечности. Характерное время между рассеяниями оценивается как $\tau \sim \Gamma^{-1}$

$$\tau \sim 30 \left(\frac{100\,\mathrm{pc}^{-3}}{n}\right) \left(\frac{2000\,\mathrm{au}}{b}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{km\ s}^{-1}}{v}\right) \mathrm{Myr} \tag{21}$$

видно, что характерное время между рассеяниями, ведущими к значительному увеличению времени жизни, значительно меньше в сравнение с возрастом Вселенной. Отметим, что не требуется большие значений локальной концентрации ПЧД. Можно ожидать, что к современному моменту регистрации событий слияний ПЧД, двойная усмеет много раз возмутиться, что приведет к сильному времени жизни и ослаблению ограничений. Далее в работе планируется моделировать последовательность рассеяний каждое из которых будет случайным образом разыграно для того чтобы получить параметры двойных в современную эпоху.

С целью проверки справедливости теоритической оценкой 19 была измерена величина Δj при разных ориентациях двойной вокруг оси OZ и рассеиваюшейся ПЧД вокруг оси OX. Для каждого значения прицельного параметра b было найдено усредненное значение Δj. Сравнительный график приведен ниже.



Также была смоделирована последовательность 10 рассеяний и получены следующие результаты:

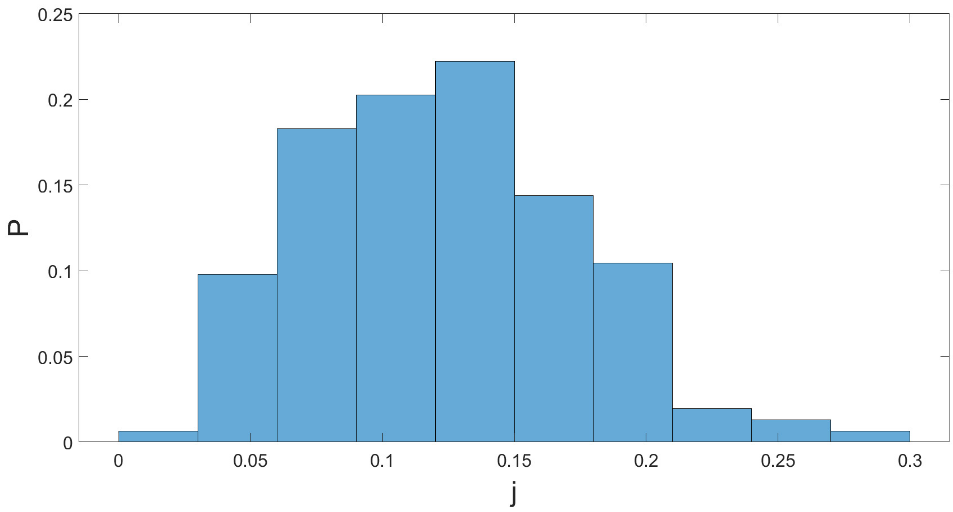


Рисунок 3 — Распределение j после последовательности 10 рассеяний в виде гистограммы (b = 2200au, a=20au, jo = 0.0447)

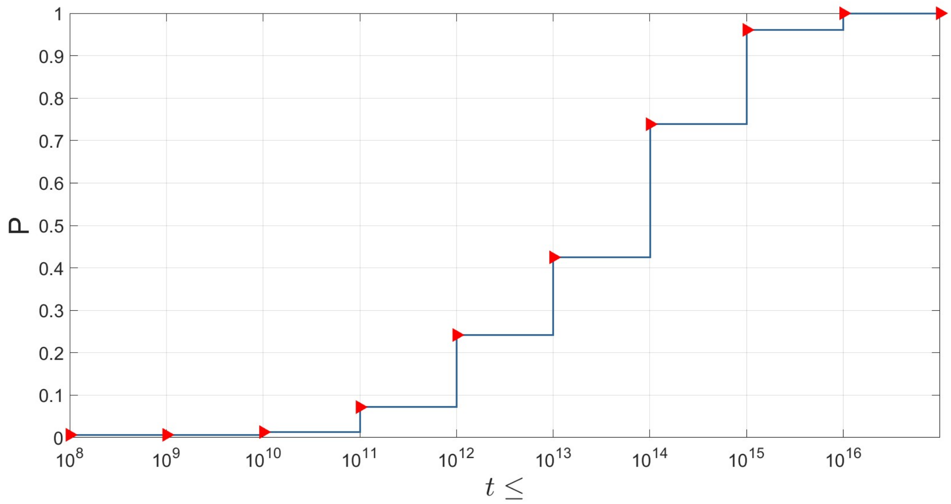


Рисунок 4 — Интегральная функция распределения t после последовательности 10 рассеяний (b=2200au, a=20au, to=1.7942e+10 лет)

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно ожидать, что к современному моменту регистрации событий слияний ПЧД, двойная усмеет много раз возмутиться, что приведет к значительному увеличению времени жизни и ослаблению ограничений. Далее в работе планируется моделировать последовательность рассеяний каждое из которых будет случайным образом разыграно для того чтобы получить параметры двойных в современную эпоху.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 / M. Sasaki [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, no. 6. — P. 061101. — arXiv: 1603.08338 [astro-ph.CO] ; — [Erratum: Phys.Rev.Lett. 121, 059901 (2018)].
2. Did LIGO detect dark matter? / S. Bird [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 20. — P. 201301. — arXiv: 1603.00464 [astro-ph.CO].
3. *Clesse S.*, *García-Bellido J.* The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: measuring their mass distribution with Advanced LIGO // Phys. Dark Univ. — 2017. — Vol. 15. — P. 142–147. — arXiv: 1603.05234 [astro-ph.CO].
4. *Ali-Haımoud Y.*, *Kovetz E. D.*, *Kamionkowski M.* Merger rate of primordial black-hole binaries // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96, no. 12. — P. 123523. — arXiv: 1709.06576 [astro-ph.CO].
5. A Luminous Quasar at Redshift 7.642 / F. Wang [et al.] // Astrophys. J. Lett. — 2021. — Vol. 907, no. 1. — P. L1. — arXiv: 2101.03179 [astro-ph.GA].
6. Observational Evidence for Primordial Black Holes: A Positivist Perspective / B. Carr [et al.]. — 2023. — arXiv: 2306.03903 [astro-ph.CO].
7. *De Luca V.*, *Franciolini G.*, *Riotto A.* NANOGrav Data Hints at Primordial Black Holes as Dark Matter // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Vol. 126, no. 4. — P. 041303. — arXiv: 2009.08268 [astro-ph.CO].
8. Do pulsar timing arrays observe merging primordial black holes? / P. F. Depta [et al.]. — 2023. — arXiv: 2306.17836 [astro-ph.CO].
9. *Carr B.*, *Kuhnel F.* Primordial black holes as dark matter candidates // SciPost Phys. Lect. Notes. — 2022. — Vol. 48. — P. 1. — arXiv: 2110.02821 [astro-ph.CO].

10. *Vaskonen V.*, *Veermäe H.* Lower bound on the primordial black hole merger rate // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 101, no. 4. — P. 043015. — arXiv: 1908.09752 [astro-ph.CO].
11. *Stasenko V.*, *Belotsky K.* Influence of early dark matter haloes on the primordial black holes merger rate // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2023. — Vol. 526, no. 3. — P. 4308–4314. — arXiv: 2307.12924 [astro-ph.CO].
12. Cosmic conundra explained by thermal history and primordial black holes / B. Carr [et al.] // Phys. Dark Univ. — 2021. — Vol. 31. — P. 100755. — arXiv: 1906.08217 [astro-ph.CO].
13. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].
14. Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries / T. Nakamura [et al.] // Astrophys. J. Lett. — 1997. — Vol. 487. — P. L139–L142. — arXiv: astro-ph/9708060.
15. *Eroshenko Y. N.* Gravitational waves from primordial black holes collisions in binary systems // J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — Vol. 1051, no. 1. — P. 012010. — arXiv: 1604.04932 [astro-ph.CO].
16. Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation / K. Ioka [et al.] // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol. 58. — P. 063003. — arXiv: astro-ph/9807018.