

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР И
ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ**

научный руководитель

доцент, доктор физико-
математических наук

Барабанов Алексей Леонидович

студент

Мико Сотер

Москва 2024

Содержание

1	Введение	2
1.1	Определения и аббревиатуры	2
1.2	Различие между процессом первого шанса и процессом с несколькими шансами	2
2	Модель BROSA (MM-RNRM)	3
2.1	Обобщенные формы Лоуренса	3
2.2	Поверхностная энергия ядра	7
2.3	Энергия кулоновского отталкивания	8
3	Ядерная деформация	8
4	Заключение	9

1 Введение

1.1 Определения и аббревиатуры

Реакция ядерного деления - Процесс расщепления атомных ядер на два (редко на три) ядра с одинаковыми массами – осколками деления. В результате реакций могут образовываться и другие продукты: легкие ядра (в основном альфа-частицы), нейтроны и гамма-кванты. Деление может быть самопроизвольным и вынужденным (в результате взаимодействия с другими частицами, особенно с нейтронами). Деление тяжелых ядер — экзоэнергетический процесс, в результате которого высвобождается большое количество энергии в виде кинетической энергии продуктов реакции, а также излучения.

Барьер деления - Энергия активации, необходимая для того, чтобы ядро атома подверглось делению.

MM-RNRM: Multi-Mode Random Neck-Rupture Model

ADS: Accelerator Driven Systems

При делении при промежуточных энергиях возникают два фактора, которые усложняют описание по сравнению с низкоэнергетическим делением: **деление с несколькими шансами** и **изменяющиеся характеристики деления при высокой энергии**.

1.2 Различие между процессом первого шанса и процессом с несколькими шансами

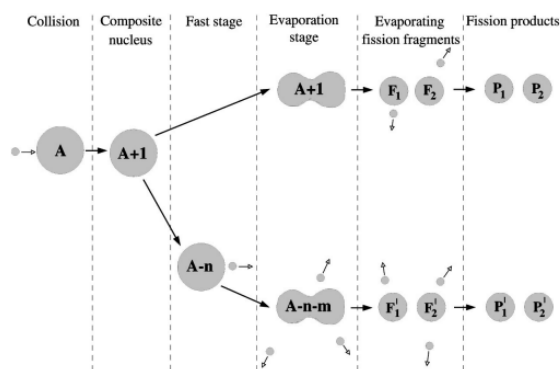


Рис. 1: Схематический рисунок, иллюстрирующий процесс деления [1]

- Если энергия возбуждения ядра мала, и оно делится на два осколка, то это деление первого шанса. Образуются два возбужденных фрагмента F_1, F_2 . Осколки теряют свою энергию, испуская нейтроны и гамма-кванты. В конце концов остаются два продукта деления P_1, P_2 .
- Если энергия возбуждения ядра достаточно высока, то ядро может испустить n нейтронов на первой стадии реакции, m нейтронов в процессе деления, и образуются два возбужденных фрагмента F'_1, F'_2 .
$$\xrightarrow{\text{испускание частиц}} P_1, P_2$$

2 Модель BROSA (MM-RNRM)

Модель BROSA состоит из двух элементов: многоканальной эволюции к этапу разрыва ядра на осколки и модели случайного разрыва шейки между осколками. На этапе разрыва вытянутое ядро состоит из двух предварительно сформированных фрагментов, соединенных шейкой. Согласно модели RNRM (Random Neck Rupture Model) разрыв шейки происходит в случайном месте. В результате образуются два фрагмента деления [1].

При делении ядро эволюционирует от деформации основного состояния к предразрывной деформации. Ключевой вопрос заключается в том, каковы оптимальные траектории? В частности, какова максимальная энергия вдоль оптимальной траектории (высота барьера), каковы симметрии ядра на барьере (в седловой точке) и какова плотность уровней на барьере? С момента открытия деления принято рассчитывать потенциальную энергию ядра в зависимости от формы в терминах модели жидкой капли, в которой потенциальная энергия представляет собой сумму поверхностной и кулоновской энергий. Это описание было впервые использовано Мейтнером и Фришем, но вскоре поставлено на более количественную основу в основополагающей статье Бора и Уилера

2.1 Обобщенные формы Лоуренса

При отслеживании ядра на его пути к расщеплению требуется параметризация его формы, которая способна описать все возможные деформации между основным (сферическим) состоянием и удлинённой (вообще говоря, асимметричной) формой ядра. Ядро состоит из двух предварительно сформированных фрагментов, соединённых шейкой. Модель BROSA использует обобщённые формы Лоуренса для параметризации деформированного ядра:

$$\rho^2(\xi) = (l^2 - \xi^2) \sum_{n=0}^N a_n (\xi - z)^n \quad (1)$$

Форма ядра задается формулой, определяющей зависимость параметра ρ от параметра ξ (см. рисунок 2), а также пятью параметрами:

l - мера удлинения ядра

r - радиус шейки

z - положение самого тонкого места на шейке или самого толстого места, если шейки нет

c - кривизна шейки

s - положение центра масс.

Коэффициенты a_n ($n=0\dots4$) выражаются через эти пять параметров с помощью следующих условий: радиус шейки должен быть равен r при $\xi = z$, первая производная должна быть равна нулю при $\xi = z$, вторая производная связана с кривизной при $\xi = z$, объем сохраняется, и центр масс покоится.

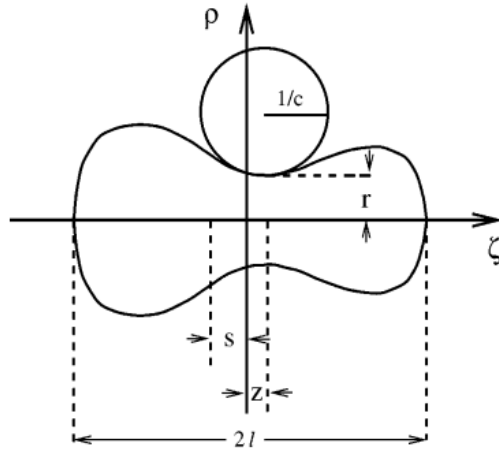


Рис. 2: Геометрический смысл пяти степеней свободы l , r , z , s , and c .

Если $\xi = z$ то

$$\rho^2 = (l^2 - z^2)(a_0 + a_1(\xi - z) + a_2(\xi - z)^2 + a_3(\xi - z)^3 + a_4(\xi - z)^4) = (l^2 - z^2)^2 a_0 = r^2 \quad (2)$$

откуда получаем

$$a_0 = \frac{r^2}{(l^2 - z^2)} \quad (3)$$

Радиус кривизны определяется кривизной окружности, уравнение которой имеет вид

$$(\xi - z)^2 + \left(\rho - \left(r + \frac{1}{c}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{c}\right)^2 \quad (4)$$

поскольку поведение кривизны окружности такое же, как кривизна шейки ядра при $\xi = z$, следовательно, производные одинаковы в этой точке, то есть:

$$\rho'|_{\xi=z} = 0 \quad (5)$$

$$2\rho\rho' = (-2\xi)\left(\sum_{n=0}^4 a_n(\xi - z)^n\right) + (l^2 - z^2)(a_1 + 2a_2(\xi - z) + 3a_3(\xi - z)^2 + 4a_4(\xi - z)^3) \quad (6)$$

Решая уравнение (6), получим,

$$a_1 = \frac{2za_0}{(l^2 - z^2)} \quad (7)$$

Вторая производная функции, описывающей окружность шейки ядра, равна c . Поскольку радиус шейки при $\xi = z$ ведет себя как окружность, кривизна которой равна c , то

$$\rho''|_{\xi=z} = c \quad (8)$$

$$2\rho'^2 + 2\rho\rho'' = -4\xi(a_1 + 2a_2(\xi - z) + 3a_3(\xi - z)^2 + 4a_4(\xi - z)^3) - 2\left(\sum_{n=0}^4 a_n(\xi - z)^n\right) + (l^2 - z^2)(2a_2 + 6a_3(\xi - z) + 12a_4(\xi - z)^2) \quad (9)$$

Решая уравнение, получим:

$$a_2 = \frac{rc}{(l^2 - z^2)} + \frac{l^2 + 3z^2}{(l^2 - z^2)^2} a_0 \quad (10)$$

Исходя из сохранения объема и постоянства положения центра масс, мы можем определить два других коэффициента. Для простоты будем считать, что в основном состоянии объем ядра сферический. Параметр z определяет положение самой тонкой точки на шейке или самой толстой точки фигуры, если шейка отсутствует. Пятый параметр s обозначает положение центра тяжести. Плоскость $\xi = 0$ определяется путем разрезания ядра на две части равной длины l . В случае сферического основного состояния l и r совпадают с радиусом составного ядра r_{CN} .

Чтобы определить объем ядра в процессе деления, мы предположим, что для любой точки поперечное сечение ядра представляет собой окружность с радиусом ρ . Тогда объём V ядра определяется выражением:

$$V = \sum_i \pi \rho_i^2 \Delta \xi = \int_{-l}^l \pi \rho^2(\xi) d\xi \quad (11)$$

положение центра масс определяется на основе классического определения центра масс

$$R_c = \frac{\sum_i \eta \pi \rho_i^2 \Delta \xi \xi_i}{\sum_i \eta \pi \rho_i^2 \Delta \xi} = \frac{\int_{-l}^l \rho^2(\xi) \xi d\xi}{\int_{-l}^l \rho^2(\xi) d\xi} = s \quad (12)$$

Интегрируя выражения (11) и (12) при $z = 0$, получаем

$$V = \frac{4}{3} \pi l^3 (a_0 - z a_1) + \frac{4}{15} \pi l^3 [(l^2 + 5z^2) a_2 - z(3l^2 + 5z^2) a_3] + \frac{4}{105} \pi l^3 (3l^4 + 56l^2 z^2 + 140z^4) a_4 \quad (13)$$

$$\frac{sV}{\pi} = \frac{4}{15} l^5 (a_1 - 2z a_2) + \frac{4}{35} l^5 [(l^2 + 7z^2) a_3 - 12z(3l^2 + 7z^2) a_4] \quad (14)$$

Решая систему уравнений (13) и (14) получаем

$$a_3 = \frac{1680\pi l^7 z a_0 + 3920\pi l^5 z^3 a_0}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} + \frac{84\pi l^9 a_1 + 2856\pi l^7 z^2 a_1 + 4900\pi l^5 z^4 a_1}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} - \frac{315sVl^4 + 1260zVl^4 + 4410sz^2Vl^2 + 2940z^3l^2V + 3675sz^4V}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} \quad (15)$$

$$a_4 = \frac{420\pi l^7 a_0 + 2940\pi l^5 z^2 a_0 + 1008\pi l^7 z a_1 + 3920\pi l^5 z^3 a_1}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} - \frac{84\pi l^9 a_2 + 2184\pi l^7 z^2 a_2 + 4900\pi l^5 z^4 a_2}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} - \frac{315l^4V + 2205l^2szV + 2205l^2z^2V + 3675sz^3V}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} \quad (16)$$

Мы получили приближенные формулы для постоянных a_{0-4} через параметры, определяющие степени свободы:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{r^2}{(l^2 - z^2)}; & a_1 &= \frac{2za_0}{(l^2 - z^2)} \\
a_2 &= \frac{rc}{(l^2 - z^2)} + \frac{l^2 + 3z^2}{(l^2 - z^2)^2}a_0 \\
a_3 &= \frac{1680\pi l^7 z a_0 + 3920\pi l^5 z^3 a_0}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} + \\
&+ \frac{84\pi l^9 a_1 + 2856\pi l^7 z^2 a_1 + 4900\pi l^5 z^4 a_1}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} - \\
&\frac{315sVl^4 + 1260zVl^4 + 4410sz^2Vl^2 + 2940z^3l^2V + 3675sz^4V}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} \\
a_4 &= \frac{420\pi l^7 a_0 + 2940\pi l^5 z^2 a_0 + 1008\pi l^7 z a_1 + 3920\pi l^5 z^3 a_1}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} - \\
&\frac{84\pi l^9 a_2 + 2184\pi l^7 z^2 a_2 + 4900\pi l^5 z^4 a_2}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6} - \\
&\frac{315l^4V + 2205l^2szV + 2205l^2z^2V + 3675sz^3V}{-36\pi l^{11} + 252\pi l^9 z^2 + 84\pi l^7 z^4 + 980\pi l^5 z^6}
\end{aligned} \tag{17}$$

Важно подчеркнуть, что этот подход удобен для описания формы делящегося ядра [4]. Чтобы учесть более высокие компоненты деформации, мы должны принять во внимание различные другие факторы, такие как зарядовые коэффициенты, масса фрагментов, температура и т.д.

Пример 1: Вот несколько примеров, иллюстрирующих изменение формы ядра при различных значениях параметров, отвечающих за степени свободы — см. рисунок ??.

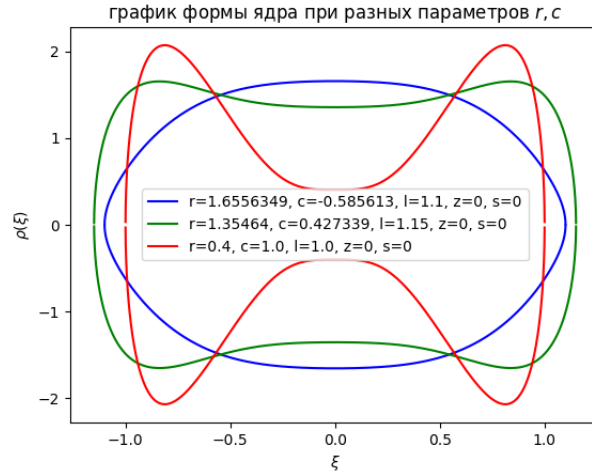


Рис. 3: Различные формы ядра на пути к делению

Рассмотрим компьютерно сгенерированные формы ядра урана [4] (слева на рис. 4) и

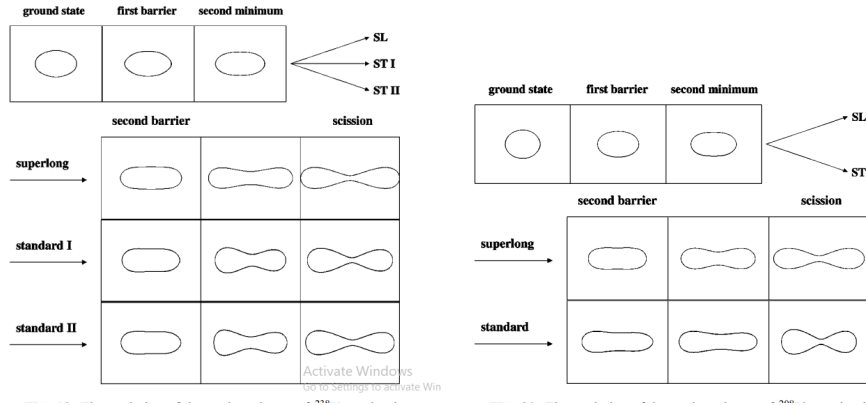


Рис. 4: Эволюция ядерных форм ^{238}U (слева) и ^{208}Pb (справа), начинающаяся в основном состоянии.

свинца (справа на рис. 4). Мы наблюдаем эволюцию формы ядра между основным состоянием и различными формами. Ядро ^{238}U сначала обладает деформацией основного состояния. Далее оно удлиняется на пути к делению. Характерная шейка появляется вскоре после прохождения второго барьера. В сверхдлинной моде ядро более вытянуто, чем в любой другой моде деления [2, 3]. Кроме того, тут имеет место симметричное распределение массы. Для асимметричных режимов стандарта I и II слева находится более тяжелый из двух образующихся фрагментов. Из рисунка видно, что осколки деления, возникающие после разрыва шейки, являются сильно деформированными.

2.2 Поверхностная энергия ядра

Энергия деформации может быть получена макроскопически-микроскопическим методом Струтинского. Основными составляющими являются энергия капли жидкости и оболочечная поправка.

В принципе, потенциальная энергия ядра также может быть получена непосредственно с помощью капельной модели. В этой модели ядро рассматривается как капля несжимаемой жидкости. Поверхностная потенциальная энергия может быть получена с помощью формулы:

$$W = \sigma S, \quad (18)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, S – площадь поверхности ядра как капли в капельной модели. Её можно вычислить по формуле:

$$S = \int_{-l}^l 2\pi\rho(\xi)\sqrt{1 + \rho'^2(x)}d\xi \quad (19)$$

Предположим, что мы выбрали для поиска фигуры параметры, соответствующие следую-

щим наборам [2]:

$$\begin{aligned}l &= 1.140 \cdots (0.035) \cdots 2.085 \\r &= r_0 \cdots (-0.02) \cdots r_0 - 0.038 \\z &= 0.00 \cdots (0.02) \cdots 0.46 \\c &= c_0 \cdots (0.09) \cdots c_0 + 1.53 \\s &= 0.0000 \cdots (-0.0175) \cdots - 0.2975\end{aligned}$$

для каждого параметра указано начальное значение, в скобках – шаг, конечное значение. При этом:

$$\begin{aligned}r_0 &= l^{-0.5} + 0.05 \\c_0 &= -l^{-2.5} - 0.5\end{aligned}$$

Этот выбор параметров формы даёт более 4 миллионов различных форм для каждого ядра.

2.3 Энергия кулоновского отталкивания

Ядро атома состоит из протонов и нейтронов, которые в совокупности называются нуклонами. Протоны, будучи положительно заряженными, оказывают друг на друга отталкивающее действие в соответствии с законом Кулона, который гласит, что одинаковые заряды отталкиваются. Эта сила отталкивания является важным фактором стабильности ядра, поскольку она конкурирует с сильным ядерным взаимодействием, которое удерживает нуклоны вместе. Модель капли жидкости, которая сравнивает ядро с каплей несжимаемой жидкости, позволяет оценить эту энергию, учитывая объем ядра и его поверхностные эффекты, а также кулоновские силы отталкивания.

$$E_c = a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (20)$$

где Z – атомный номер, a_c – коэффициент кулоновской энергии, A – массовое число

Понимание энергии Кулона имеет решающее значение при изучении барьеров деления, которые представляют собой энергетические препятствия, которые необходимо преодолеть, чтобы ядро подверглось делению.

3 Ядерная деформация

На рис. 5 показаны рассчитанные асимметричные и симметричные моды деления ядра ^{243}Am . Видно, что в асимметричной моде происходит деление на большой сферический фрагмент и более мелкий удлинённый деформированный фрагмент.

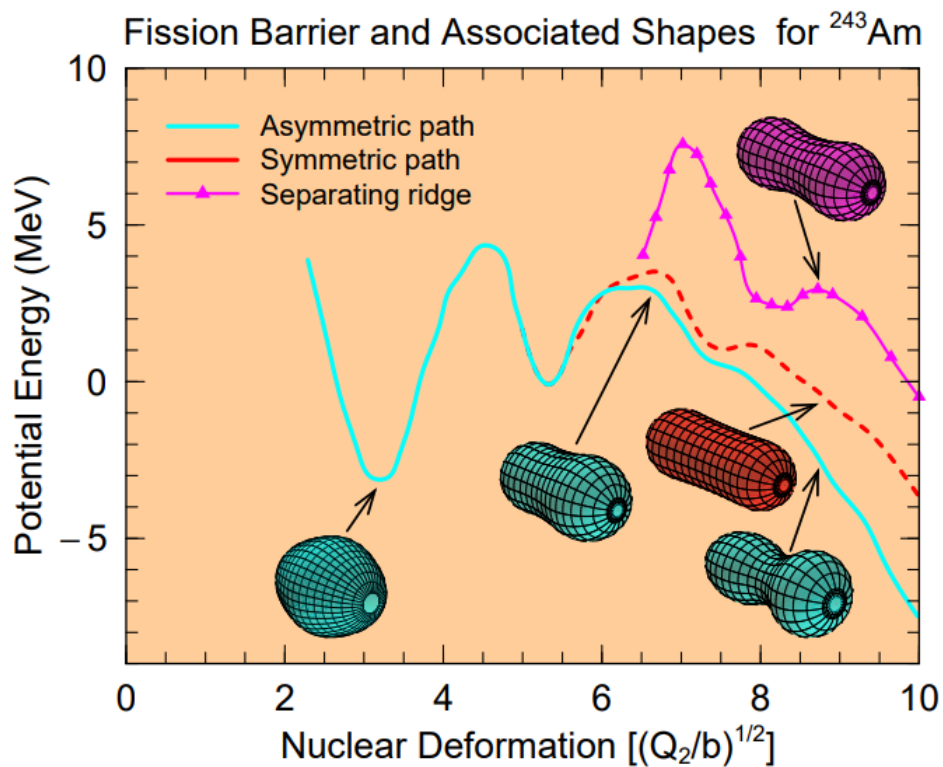


Рис. 5: Барьеры деления ^{243}Am , соответствующие различным модам деления.

4 Заключение

- Изучена макроскопическая модель, в которой поверхность жидкой капли задаётся пятью параметрами (5 степеней свободы).
- Выведены формулы для коэффициентов $a_0 - a_4$, входящие в формулу Лоуренса. Эти коэффициенты выражены через 5 параметров, задающих форму деформированного ядра.
- Для некоторых значений параметров, описывающих деформацию ядра, построены формы ядер.
- Получено выражение для площади поверхности деформированного ядра в зависимости от пяти параметров.
- Планируется вычислить энергию кулоновского отталкивания в зависимости от удлинения ядра и воспроизвести барьер деления в капельной модели.

Список литературы

- [1] M. Duijvestijn and Franz-Josef Hambsch. Mass distributions in nucleon-induced fission at intermediate energies. *Phys. Rev. C*, 64, 06 2001.
- [2] Tieshuan Fan, Zhiming Wang, Xin Zhu, Wenjie Zhu, and C. L. Zhong. Study of five-dimensional potential-energy surfaces for actinide isotopes by the macroscopic-microscopic method. *EPJ Web Conf.*, 146:04033, 2017.
- [3] Peter Möller, David G. Madland, Arnold John Sierk, and Akira Iwamoto. Nuclear fission modes and fragment mass asymmetries in a five-dimensional deformation space. *Nature*, 409:785–790, 2001.
- [4] Peter Möller, Arnold J. Sierk, Takatoshi Ichikawa, Akira Iwamoto, Ragnar Bengtsson, Henrik Uhrenholt, and Sven Åberg. Heavy-element fission barriers. *Phys. Rev. C*, 79:064304, Jun 2009.