Horndeski theory on a spherically symmetric dynamical background.

based on papers with S. Mironov and V. Volkova
2408.01480, 2408.06329

Mikhail Sharov

INR RAS, ITMP MSU

MEPhi, 23 October 2024

Modified gravity
Motivation to study

- Solutions without singularities.
  1. Compact objects
  2. Cosmological solutions

Modified gravity
Motivation to study

- Solutions without singularities.
  1. Compact objects
  2. Cosmological solutions
- Other modified gravity solutions (e.g. hairy BH, neutron star)

Modified gravity
Motivation to study

- Solutions without singularities.
  1. Compact objects
  2. Cosmological solutions
- Other modified gravity solutions (e.g. hairy BH, neutron star)

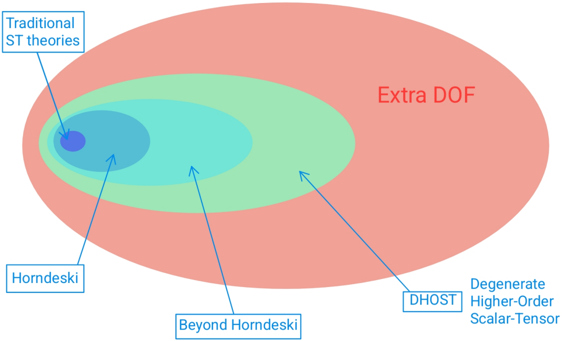
- Null Energy Condition: $T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geq 0$
- Penrose theorem: no singularity $\Rightarrow$ NEC-violation
- Null Convergence Condition: $R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geq 0$ (for modified gravity solutions)

Modified gravity

- Additional field nonminimally coupled to gravity
  1. Scalar-tensor theories
  2. Scalar-vector-tensor theories
  3. $\cdots$
- Absence of Ostrogradski ghosts

Modified gravity

- Additional field nonminimally coupled to gravity
  1. Scalar-tensor theories
  2. Scalar-vector-tensor theories
  3. ...
- Absence of Ostrogradski ghosts
- Landscape of scalar-tensor theories



Horndeski theory and its generalization

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_{\mathcal{BH}}\right),$$

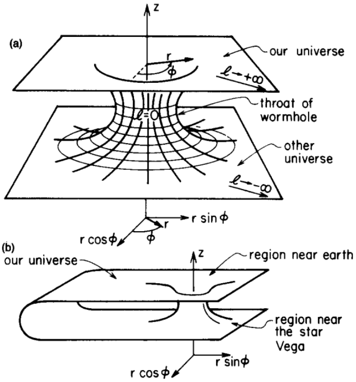
$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X),$$
$$\mathcal{L}_3 = -K(\pi, X)\Box\pi,$$
$$\mathcal{L}_4 = G_4(\pi, X)R + G_{4X}(\pi, X)\left[(\Box\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}\right],$$
$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X)G^{\mu\nu}\pi_{;\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\pi)^3 - 3\Box\pi\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} + 2\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\rho}\pi_{;\rho}{}^{\nu}\right],$$
$$\mathcal{L}_{\mathcal{BH}} = F_4(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'} +$$
$$+ F_5(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'}\pi_{;\sigma\sigma'},$$

$$X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\pi_{,\mu}\pi_{,\nu}$$

Time-dependent spherically symmetric background.

- Background scalar field: $\pi = \pi(r, t)$
- Background metric

$$ds^2 = -A(r,t)\,dt^2 + \frac{dr^2}{B(r,t)} + J^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$



Pertrubations.

- Perturbations

$$\pi = \bar{\pi} + \chi$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

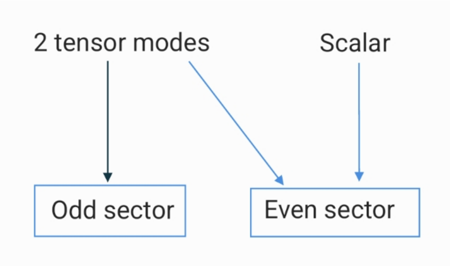
Pertrubations.

- Perturbations

$$\pi = \bar{\pi} + \chi$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

- Regge-Wheeler classification of perturbations
- Odd parity (axial) and even parity (polar) modes.



Subclass $L_2 + L_3$

- Only scalar perturbations remains.

Subclass $L_2 + L_3$

- Only scalar perturbations remains.
- Quadratic action:

$$L^{(2)} = A^{-2}\mathcal{K}^{00}\dot{\chi}^2 + \mathcal{K}^{tr}\dot{\chi}\chi' - \mathcal{K}^{rr}(\chi')^2 - J^{-2}\mathcal{K}^{\Omega}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\chi + \dots$$

Subclass $L_2 + L_3$

- Only scalar perturbations remains.
- Quadratic action:

$$L^{(2)} = A^{-2}\mathcal{K}^{00}\dot{\chi}^2 + \mathcal{K}^{tr}\dot{\chi}\chi' - \mathcal{K}^{rr}(\chi')^2 - J^{-2}\mathcal{K}^{\Omega}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\chi + \dots$$

- Absence of gradient instabilities:

$$\mathcal{K}^{tr}{k_r}^2 + 4\mathcal{K}^{00}\omega(\mathcal{K}^{rr}{k_r}^2 + \mathcal{K}^{\Omega}{k_\phi}^2) \geq 0$$

Subclass $L_2 + L_3$

- Only scalar perturbations remains.
- Quadratic action:

$$L^{(2)} = A^{-2}\mathcal{K}^{00}\dot{\chi}^2 + \mathcal{K}^{tr}\dot{\chi}\chi' - \mathcal{K}^{rr}(\chi')^2 - J^{-2}\mathcal{K}^{\Omega}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\chi + \dots$$

- Absence of gradient instabilities:

$$\mathcal{K}^{tr}{k_r}^2 + 4\mathcal{K}^{00}\omega(\mathcal{K}^{rr}{k_r}^2 + \mathcal{K}^{\Omega}{k_\phi}^2) \geq 0$$

- In case of $\mathcal{K}^{00} < 0$ и $\mathcal{K}^{rr} < 0$ χ-particles are ghosts.

Subclass $L_2 + L_3$

- Only scalar perturbations remains.
- Quadratic action:

$$L^{(2)} = A^{-2}\mathcal{K}^{00}\dot{\chi}^2 + \mathcal{K}^{tr}\dot{\chi}\chi' - \mathcal{K}^{rr}(\chi')^2 - J^{-2}\mathcal{K}^{\Omega}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\chi + \dots$$

- Absence of gradient instabilities:

$$\mathcal{K}^{tr}{k_r}^2 + 4\mathcal{K}^{00}\omega(\mathcal{K}^{rr}{k_r}^2 + \mathcal{K}^{\Omega}{k_\phi}^2) \geq 0$$

- In case of $\mathcal{K}^{00} < 0$ и $\mathcal{K}^{rr} < 0$ χ-particles are ghosts.
- Sound speeds

$$c_r = \frac{\partial\omega}{\partial k_r} = \frac{a}{b}\left(\frac{\mathcal{K}^{tr}}{\mathcal{K}^{00}} \pm \frac{\sqrt{(\mathcal{K}^{tr})^2 + 4\mathcal{K}^{00}\mathcal{K}^{rr}}}{2\mathcal{K}^{00}}\right)$$

$$c_\phi = \frac{\partial\omega}{\partial k_\phi} = \frac{a}{c}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{K}^{\Omega}}{\mathcal{K}^{00}}}\right)$$

No-go theorem.

- **Static** case in full Horndeski theory:

  Stability conditions $\Rightarrow$ no-go theorem.

No-go theorem.

- **Static** case in full Horndeski theory:

  Stability conditions ⇒ no-go theorem.

- **Dynamical** background in cubic subclass:

  Stability conditions ⇒ generalized no-go theorem.

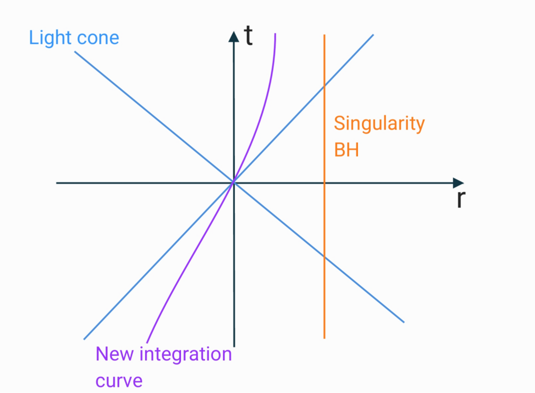
$$\begin{cases} \mathcal{K}^{00} > 0 \\ \mathcal{K}^{\Omega} \geq 0 \\ \mathcal{K}^{rr} \geq -\frac{(\mathcal{K}^{tr})^2}{4\mathcal{K}^{00}} \end{cases}$$

Generalized no-go in the cubic subclass.

- Now the no-go theorem applies not only to non-singular solutions

Generalized no-go in the cubic subclass.

- Now the no-go theorem applies not only to non-singular solutions
- Simple example: Bouncing Universe with BH



Odd parity sector. Horndeski theory + F4

- Quadratic action

$$\mathcal{L}^{(2)}_{odd} = \sqrt{\frac{B}{A}} J^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2(\ell-1)(\ell+2)} \cdot \Bigg[\frac{1}{A} \frac{\mathcal{F}\mathcal{H}^2}{\mathcal{Z}} \dot{Q}^2 - \frac{B \cdot \mathcal{K}\mathcal{H}^2}{\mathcal{Z}} (Q')^2 + 2 \frac{B}{A} \frac{\mathcal{J}\mathcal{H}^2}{\mathcal{Z}} Q' \dot{Q} - \frac{\ell(\ell+1)}{J^2} \cdot \mathcal{H} Q^2 - V(r) Q^2 \Bigg] \ ,$$

- Stability analysis and absence of the no-go theorem in the odd parity sector.

Odd parity sector. Horndeski theory + F4

- Quadratic action

$$\mathcal{L}^{(2)}_{odd} = \sqrt{\frac{B}{A}} J^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2(\ell-1)(\ell+2)} \cdot \left[\frac{1}{A} \frac{\mathcal{F}\mathcal{H}^2}{\mathcal{Z}} \dot{Q}^2 - \frac{B \cdot \mathcal{K}\mathcal{H}^2}{\mathcal{Z}} (Q')^2 \right.$$

$$\left. + 2 \frac{B}{A} \frac{\mathcal{J}\mathcal{H}^2}{\mathcal{Z}} Q' \dot{Q} - \frac{\ell(\ell+1)}{J^2} \cdot \mathcal{H} Q^2 - V(r) Q^2 \right] ,$$

- Stability analysis and absence of the no-go theorem in the odd parity sector.
- Propagation speeds

$$c_r^{(\pm)} = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{F}} \pm \frac{1}{\mathcal{F}} \sqrt{\mathcal{Z}} \leq 1, \qquad c_\theta^2 = \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{F}\mathcal{H}} \leq 1$$

Additional restrictions.

- After GW170817
- Restrictions for the propagation speeds

$$c_r^{(\pm)} = \sqrt{\frac{B}{A}\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{F}} \pm \frac{1}{\mathcal{F}}\sqrt{\mathcal{Z}}} = 1, \qquad c_\theta^2 = \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{F}\mathcal{H}} = 1,$$

Additional restrictions.

- After GW170817
- Restrictions for the propagation speeds

$$c_r^{(\pm)} = \sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{F}} \pm \frac{1}{\mathcal{F}}\sqrt{\mathcal{Z}} = 1, \qquad c_\theta^2 = \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{F}\mathcal{H}} = 1,$$

- The only viable subclass of BH theory
  1. $G_5(\pi, X) = 0$
  2. $F_4(\pi, X) = \frac{G_{4X}(\pi, X)}{2X}$
  3. Arbitrary $G_4(\pi, X)$

Kaluza-Klein compactification.

- Compactification $R^5 \longrightarrow R^4 \times S^1$

Kaluza-Klein compactification.

- Compactification $R^5 \longrightarrow R^4 \times S^1$
- Kaluza-Klein metric, 5D theory

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}$$

Kaluza-Klein compactification.

- Compactification $R^5 \longrightarrow R^4 \times S^1$
- Kaluza-Klein metric, 5D theory

$$g_{A\,B} = \begin{pmatrix} g_{\mu\,\nu} + \phi^2\, A_\mu\, A_\nu & \phi^2\, A_\mu \\ \phi^2\, A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}$$

- Horndeski action in 5D theory

$$\mathcal{S}_5 = \int \mathrm{d}^5 x \,\sqrt{-g_{(5)}}\,\Big(G_2(\pi,\, X) + G_3(\pi,\, X)\,\Box\pi$$

$$+ G_4\, R_{(5)} + G_{4,X}\, \left((\Box\pi)^2 - (\nabla_A \nabla_B \pi)^2\right) + G_5(\pi) G^{AB} \nabla_A \nabla_B \pi\Big)$$

- Cylindrical conditions.

KK compactification of Horndeski theory.

$$\phi(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4) + \mathcal{L}_{4A_\mu} + \mathcal{L}_{4\phi} =$$

$$\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\phi\,\Big[G_2(\pi,\,X) + G_3(\pi,\,X)\,\Box\pi + G_4(\pi,\,X)\,\left(R - \frac{1}{4}\phi^2\,F^2 - 2\frac{\Box\phi}{\phi}\right)$$

$$+G_{4,X}(\pi,\,X)\left((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)^2 + 2\,\frac{1}{\phi}\,\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\pi\,\Box\pi - \frac{1}{2}\phi^2\,F_\mu{}^\sigma\,F_{\nu\sigma}\,\nabla^\mu\pi\,\nabla^\nu\pi\right)\Big]$$

$$\phi\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_{5A_\mu} + \mathcal{L}_{5\phi} = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\phi\,G_5(\pi)\Big[\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,R\right)\nabla_\mu\nabla_\nu\pi$$

$$-\frac{1}{2\,\phi}R\,\nabla_\mu\phi\,\nabla^\mu\pi + \frac{1}{\phi}\left(\Box\phi\,\Box\pi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\mu\nabla^\nu\pi\right) + \frac{1}{2}\phi^2\,F_{\mu\nu}\,\nabla_\sigma F^{\nu\sigma}\,\nabla^\mu\pi$$

$$+\frac{1}{8}\phi\,F^{\mu\nu}\,F^{\sigma\rho}\left(3\,g_{\nu\rho}(-4\,g_{\lambda\mu}\,g_{\beta\sigma}+g_{\lambda\beta}\,g_{\mu\sigma})\,\nabla^\lambda\pi\nabla^\beta\phi+\phi\,g_{\sigma\mu}\,(-4\,\nabla_\nu\nabla_\rho\pi+g_{\rho\nu}\Box\pi)\right)\Big]$$

KK compactification of Horndeski theory.

$$R^5 \qquad \longrightarrow \qquad R^4 \times S^1$$

KK compactification of Horndeski theory.

$$R^5 \quad \longrightarrow \quad R^4 \times S^1$$

- Generalized Galileons $\longrightarrow$ Generalized Galileons
- 2nd derivatives in the action $\longrightarrow$ 2nd derivatives in the action
- no higher derivatives in EOMs $\longrightarrow$ no higher derivatives in EOMs
- Metric + scalar $\longrightarrow$ Metric + vector + scalar + scalar [U(1) gauge]

Time-dependent spherically symmetric background.

- Background metric

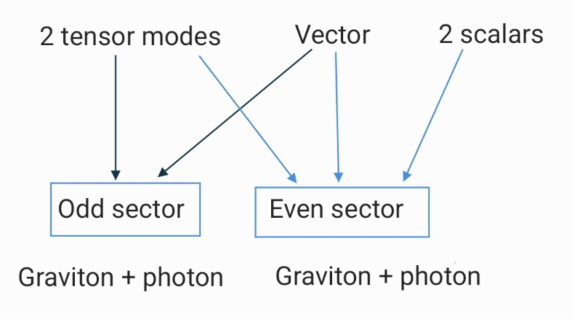
$$ds^2 = -A(r,t)\,dt^2 + \frac{dr^2}{B(r,t)} + J^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)$$

- Background fields

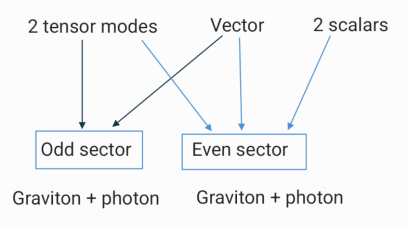
$$\pi = \pi(r,t), \qquad \phi = \phi(t,r), \qquad A_\mu = (A_0(t,r),\ A_1(t,r),\ 0,\ 0).$$

Classification of perturbations.

$$\pi = \bar{\pi} + \chi, \qquad g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$
$$\phi = \bar{\phi} + \delta\phi, \qquad A_\mu = \bar{A}_\mu + \delta A_\mu.$$



Speeds of graviton and modified photon



Odd | **Even**

1. Radial speeds

$$c_{r,Q}^{(\pm)} = c_{r,\mathcal{V}}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{B}{A}\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{F}} \pm \frac{1}{\mathcal{F}}\sqrt{\mathcal{Z}}} \neq 1. \quad \Big| \quad c_{r,g}^{(\pm)} = c_{r,\mathcal{V}}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{B}{A}\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{F}} \pm \frac{1}{\mathcal{F}}\sqrt{\mathcal{Z}}} \neq 1.$$

2. Angular speeds

$$c_{\theta,Q}^{2} = c_{\theta,\mathcal{V}}^{2} = \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{F}\mathcal{H}} \neq 1. \quad \Big| \quad \cdots\cdots$$

(The notations saved from not compactified theory)

Conclusion and outlook

- The general time-dependent spherically symmetric background was studied for the first time in terms of Horndeski theory.
- Generalized no-go theorem.
- KK compactification of Horndeski theory.
- $c_{GW} = c_\gamma$

The work on this project has been supported by Russian Science Foundation grant №24-72-10110

Сферически-симметричный случай. Четный сектор.

- 4D действие Галилеона после компактификации
$$S_5 = \int d^4x \sqrt{-g}\,\phi \left(G_4 \left(R - \frac{1}{4}\phi^2 F^2 - 2\frac{\Box\phi}{\phi} \right) + G_{4,X} \left((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)^2 + 2\,\frac{1}{\phi}\,\nabla_\mu\phi \nabla^\mu\pi\,\Box\pi - \frac{1}{2}\phi^2\,F_\mu{}^\sigma\,F_{\nu\sigma}\,\nabla^\mu\pi\,\nabla^\nu\pi \right) + G_2(\pi, X) + G_3(\pi, X)\,\Box\pi \right),$$

Сферически-симметричный случай. Четный сектор.

- 4D действие Галилеона после компактификации
$S_5 = \int d^4x \sqrt{-g}\, \phi \Big(G_4 \left(R - \frac{1}{4}\phi^2 F^2 - 2\frac{\Box\phi}{\phi} \right) + G_{4,X} \Big((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)^2 + 2\,\frac{1}{\phi}\,\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\pi\,\Box\pi - \frac{1}{2}\phi^2\, F_\mu{}^\sigma\, F_{\nu\sigma}\, \nabla^\mu\pi\,\nabla^\nu\pi \Big) + G_2(\pi,\, X) + G_3(\pi,\, X)\,\Box\pi \Big)\,,$
- Уравнения движени по-прежнему остаются второго порядка.
- Векторная мода возмущений

$$\bar{A}_\mu = (A_0(t,r), A_1(t,r), 0, 0) \qquad (2)$$

$$\delta A_t = \delta A_r = 0\,, \qquad \delta A_a = \sum_{\ell m} A^{(v)}_{\ell m}(t,r) E_{ab} \nabla^b Y^m_\ell(\theta,\varphi)\,. \qquad (3)$$

Сферически-симметричный случай. Четный сектор.

- 4D действие Галилеона после компактификации
$S_5 = \int d^4x \sqrt{-g}\, \phi \left(G_4 \left(R - \frac{1}{4}\phi^2 F^2 - 2\frac{\Box\phi}{\phi} \right) + G_{4,X} \left((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)^2 + 2\,\frac{1}{\phi}\, \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \pi\, \Box\pi - \frac{1}{2}\phi^2\, F_\mu{}^\sigma\, F_{\nu\sigma}\, \nabla^\mu \pi\, \nabla^\nu \pi \right) + G_2(\pi,\, X) + G_3(\pi,\, X)\, \Box\pi \right),$
- Уравнения движени по-прежнему остаются второго порядка.
- Векторная мода возмущений

$$\bar{A}_\mu = (A_0(t,r), A_1(t,r), 0, 0) \tag{2}$$

$$\delta A_t = \delta A_r = 0\,, \qquad \delta A_a = \sum_{\ell m} A^{(v)}_{\ell m}(t,r) E_{ab} \nabla^b Y^m_\ell(\theta,\varphi)\,. \tag{3}$$

- Скорости распространения векторных и тензорных возмущений совпадают.

Необходимые условия стабильности. Нечетный сектор.

- Отсутвие неустойчивостей:

$$
\begin{aligned}
\text{Нет духовых:} \quad & B_0 > 0 \\
\text{Нет угловых градиентных:} \quad & B_3 \geq 0 \\
\text{Нет радиальных градиентных:} \quad & B_2 \geq -\frac{{B_1}^2}{4B_0} \\
\text{Нет тахионных:} \quad & B_2 \geq -\frac{6B_3}{J^2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Необходимые условия стабильности. Нечетный сектор.

- Отсутвие неустойчивостей:

$$\begin{aligned} \text{Нет духовых:} &\quad B_0 > 0 \\ \text{Нет угловых градиентных:} &\quad B_3 \geq 0 \\ \text{Нет радиальных градиентных:} &\quad B_2 \geq -\frac{{B_1}^2}{4B_0} \\ \text{Нет тахионных:} &\quad B_2 \geq -\frac{6B_3}{J^2} \end{aligned} \tag{4}$$

- Скорости распространения возмущений:

$$c_r = -\frac{B_1}{2B_0} \pm \frac{\sqrt{B_1^2 + 4B_0 B_2}}{2B_0} \leq 1 \tag{5}$$

$$c_\phi^2 = \frac{B_3}{B_0} \leq 1 \tag{6}$$

Параметризация возмущений. Четный сектор.

$$\begin{cases} h_{tt} = A(t,r)\sum\limits_{\ell,m} H_{0,\ell m}(t,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ h_{tr} = \sum\limits_{\ell,m} H_{1,\ell m}(t,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ h_{rr} = \dfrac{1}{B(t,r)}\sum\limits_{\ell,m} H_{2,\ell m}(t,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ h_{ta} = \sum\limits_{\ell,m} \beta_{\ell m}(t,r)\partial_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ h_{ra} = \sum\limits_{\ell,m} \alpha_{\ell m}(t,r)\partial_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ h_{ab} = \sum\limits_{\ell,m} K_{\ell m}(t,r)g_{ab}Y_{\ell m}(\theta,\varphi) + \sum\limits_{\ell,m} G_{\ell m}(t,r)\nabla_a\nabla_b Y_{\ell m}(\theta,\varphi). \end{cases} \tag{7}$$

$$\pi(t,r,\theta,\varphi) = \pi(t,r) + \sum_{\ell,m} \chi_{\ell m}(t,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \tag{8}$$

Калибровочное преобразование

$$
\begin{aligned}
H_0 &\to H_0 + \frac{2}{a}\dot{M}_0 - \frac{a'}{a} b M_1 - \frac{\dot{a}}{a^2} M_0, \\
H_1 &\to H_1 + \dot{M}_1 + M_0' - \frac{a'}{a} M_0 + \frac{\dot{b}}{b}, \\
H_2 &\to H_2 + M_0 \frac{\dot{b}}{ba} + M_1 b' + 2bM_1{}', \\
\beta &\to \beta + M_0 + 2M_2 \dot{c} c^3 + \dot{M}_2 c^4, \\
\alpha &\to \alpha + M_1 + 2M_2 c' c^3 + M_2{}' c^4, \\
K &\to K - 2M_0 a \frac{\dot{c}}{c^2} + 2M_1 b \frac{c'}{c}, \\
G &\to G + 2M_2, \\
\chi &\to \chi + b\pi' M_1 - \frac{\dot{\pi}}{a} M_0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Полная фиксация калибровки.

- Имеющая статический предел.

$$\beta = 0, \quad K = 0, \quad G = 0. \tag{10}$$

Полная фиксация калибровки.

- Имеющая статический предел.

$$\beta = 0, \quad K = 0, \quad G = 0. \tag{10}$$

- Не имеющая статического предела.

$$\chi = 0, \quad K = 0, \quad G = 0. \tag{11}$$

Сингулярна при статическом скалярном поле π. Shift-symmetric solutions:

$$\pi(t, r) = \pi(r) + qt \tag{12}$$

Квадратичное действие. Четный сектор. G4

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{even} = {} & C_0 {H_0}^2 + C_1 H_0 H_1 + C_2 H_0 \beta + C_3 H_0 H_2 + C_4 H_0 \alpha + C_5 H_0 \chi + C_6 {H_1}^2 \\
& + C_7 H_1 \beta + C_8 H_1 H_2 + C_9 H_1 \alpha + C_{10} H_1 \chi + C_{11} \beta^2 + C_{12} \beta H_2 + C_{13} \beta \alpha \\
& + C_{14} \beta \chi + C_{15} {H_2}^2 + C_{16} H_2 \alpha + C_{17} H_2 \chi + C_{18} \alpha^2 + C_{19} \alpha \chi \\
& + C_{20} \chi^2 + C_{21} H_0 \dot{H}_2 + C_{22} H_0 \dot{\chi} + C_{23} H_1 \dot{H}_2 + C_{24} H_1 \dot{\alpha} \\
& + C_{25} H_1 \dot{\chi} + C_{26} \beta \dot{H}_2 + C_{27} \beta \dot{\alpha} + C_{28} \beta \dot{\chi} + C_{29} H_2 \dot{\chi} \\
& + C_{30} \alpha \dot{\chi} + C_{31} H_2 \ddot{\chi} + C_{32} H_0 \chi'' + C_{33} H_0 {H_1}' + C_{34} H_0 {H_2}' \\
& + C_{35} H_0 \alpha' + C_{36} H_0 \chi' + C_{37} H_1 \beta' + C_{38} H_1 \chi' + C_{39} \beta \alpha' \\
& + C_{40} \beta \chi' + C_{41} H_2 \chi' + C_{42} \alpha \chi' + C_{43} H_1 \partial_{tr} \chi + C_{44} \beta \partial_{tr} \alpha \\
& + C_{45} (\dot{\alpha})^2 + C_{46} (\dot{\chi})^2 + C_{47} \dot{\chi} \chi' + C_{48} (\beta')^2 + C_{49} (\chi')^2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Старший порядок в четном секторе.

- Квадратичное действие

$$S^{(2)}_{even} = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}k \sqrt{\frac{A}{B}} J^2 \left(\mathcal{K}_{ij} \dot{v}^i \dot{v}^j - k\mathcal{Y}_{ij} \dot{v}^i v^j - k^2 \mathcal{K}_{ij} v^i v^j + \ldots\right), \tag{14}$$

Старший порядок в четном секторе.

- Квадратичное действие

$$S^{(2)}_{even} = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}k \sqrt{\frac{A}{B}} J^2 \left(\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - k\mathcal{Y}_{ij}\dot{v}^i v^j - k^2\mathcal{K}_{ij}v^i v^j + \ldots\right), \tag{14}$$

- Дисперсионное соотношение:

$$\left(c^2_{r1,2}\mathcal{K}_{ij} + \frac{c_{r1,2}}{2}\left(\mathcal{Y}_{ij} - \mathcal{Y}_{ji}\right) + \mathcal{K}_{ij}\right) v^j = 0, \tag{15}$$

- Скорости распространения возмущений.

Старший порядок в четном секторе.

- Квадратичное действие

$$S^{(2)}_{even} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}k \sqrt{\frac{A}{B}} J^2 \left(\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - k\mathcal{Y}_{ij}\dot{v}^i v^j - k^2\mathcal{K}_{ij}v^i v^j + \ldots\right), \tag{14}$$

- Дисперсионное соотношение:

$$\left(c^2_{r1,2}\mathcal{K}_{ij} + \frac{c_{r1,2}}{2}\left(\mathcal{Y}_{ij} - \mathcal{Y}_{ji}\right) + \mathcal{K}_{ij}\right) v^j = 0, \tag{15}$$

- Скорости распространения возмущений.
- Матрица, определяющая градиентные неустойчивости.

$$\mathcal{R}^{1,2}_{ij} = \frac{c_{r1,2}}{2}\left(\mathcal{Y}_{ij} - \mathcal{Y}_{ji}\right) + \mathcal{K}_{ij} \tag{16}$$

Необходимые условия стабильности. Четный сектор. G4

Отсутсвие неустойчивостей:

- Духовых:

$$\mathcal{K}_{11} > 0, \qquad det\ \mathcal{K} > 0, \tag{17}$$

Необходимые условия стабильности. Четный сектор. G4

Отсутсвие неустойчивостей:

- Духовых:

$$\mathcal{K}_{11} > 0, \qquad det\ \mathcal{K} > 0, \tag{17}$$

- Радиальных градиентных:

$$\mathcal{R}_{11}^{1,2} > 0, \qquad det\ \mathcal{R}^{1,2} > 0 \tag{18}$$

Необходимые условия стабильности. Четный сектор. G4

Отсутсвие неустойчивостей:

- Духовых:

$$\mathcal{K}_{11} > 0, \qquad det\ \mathcal{K} > 0, \tag{17}$$

- Радиальных градиентных:

$$\mathcal{R}_{11}^{1,2} > 0, \qquad det\ \mathcal{R}^{1,2} > 0 \tag{18}$$

- Тахионных и угловых градиентных.

Статический случай

- Квадратичное действие.

$$S^{(2)}_{even} = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}r\sqrt{\frac{A}{B}}J^2\left(\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}v^{i\prime}v^{j\prime} - \mathcal{Q}_{ij}v^iv^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}v^iv^j\right), \tag{19}$$

Статический случай

- Квадратичное действие.

$$S^{(2)}_{even} = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}r\sqrt{\frac{A}{B}}J^2\left(\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}v^{i\prime}v^{j\prime} - \mathcal{Q}_{ij}v^iv^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}v^iv^j\right), \quad (19)$$

- Запрещающая теорема.

O. A. Evseev and O. I. Melichev, "No static spherically symmetric wormholes in Horndeski theory,"Phys. Rev. D 97 (2018) no.12, 124040.

Обобщения теории Хорндески.

- Статический случай - нет запрещающей теоремы.

Обобщения теории Хорндески.

- Статический случай - нет запрещающей теоремы.
- ADM формализм. Гамильтонов анализ.

Обобщения теории Хорндески.

- Статический случай - нет запрещающей теоремы.
- ADM формализм. Гамильтонов анализ.
- Проблемы обобщений теории Хорндески - количество динамических степеней свободы

Обобщения теории Хорндески.

- Статический случай - нет запрещающей теоремы.
- ADM формализм. Гамильтонов анализ.
- Проблемы обобщений теории Хорндески - количество динамических степеней свободы
- Наличие третьих производных скалярного поля в квадратичном действии.

Компактификация Калуцы-Клейна

- Проблема теории Хорндески и событие GW170817

Компактификация Калуцы-Клейна

- Проблема теории Хорндески и событие GW170817
- Теория Калуцы-Клейна

Компактификация Калуцы-Клейна

- Проблема теории Хорндески и событие GW170817
- Теория Калуцы-Клейна
- Метрика Калуцы-Клейна, 5D теория.

$$g_{A\,B} = \begin{pmatrix} g_{\mu\,\nu} + \phi^2\,A_\mu\,A_\nu & \phi^2\,A_\mu \\ \phi^2\,A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Компактификация Калуцы-Клейна

- Проблема теории Хорндески и событие GW170817
- Теория Калуцы-Клейна
- Метрика Калуцы-Клейна, 5D теория.

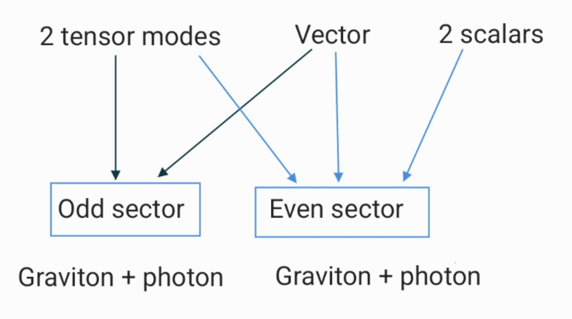
$$g_{A\,B} = \begin{pmatrix} g_{\mu\,\nu} + \phi^2\,A_\mu\,A_\nu & \phi^2\,A_\mu \\ \phi^2\,A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

- Действие в 5D теории Хорндески

$$\mathcal{S}_5 = \int \mathrm{d}^5 x\,\sqrt{-g_{(5)}}\,\Big(G_2(\pi,\,X) + G_3(\pi,\,X)\,\Box\pi \\ + G_4\,R_{(5)} + G_{4,X}\,\left((\Box\pi)^2 - (\nabla_A\nabla_B\pi)^2\right)\Big) \tag{21}$$

- Цилиндрические граничные условия.

Classification of perturbations.



Сферически-симметричный случай. Четный сектор.

- 4D действие Галилеона после компактификации
$$S_5 = \int d^4x \sqrt{-g}\,\phi \left(G_4 \left(R - \frac{1}{4}\phi^2 F^2 - 2\frac{\Box\phi}{\phi} \right) + G_{4,X} \left((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)^2 + 2\,\frac{1}{\phi}\,\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\pi\,\Box\pi - \frac{1}{2}\phi^2\,F_\mu{}^\sigma\,F_{\nu\sigma}\,\nabla^\mu\pi\,\nabla^\nu\pi \right) + G_2(\pi, X) + G_3(\pi, X)\,\Box\pi \right),$$

Сферически-симметричный случай. Четный сектор.

- 4D действие Галилеона после компактификации
  $S_5 = \int d^4x \sqrt{-g}\, \phi \Big(G_4 \left(R - \frac{1}{4}\phi^2 F^2 - 2\frac{\Box\phi}{\phi}\right) + G_{4,X} \Big((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)^2 + 2\,\frac{1}{\phi}\,\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\pi\,\Box\pi - \frac{1}{2}\phi^2\, F_\mu{}^\sigma\, F_{\nu\sigma}\,\nabla^\mu\pi\,\nabla^\nu\pi \Big) + G_2(\pi,\, X) + G_3(\pi,\, X)\,\Box\pi \Big)\,,$
- Уравнения движени по-прежнему остаются второго порядка.
- Векторная мода возмущений

$$\bar{A}_\mu = (A_0(t,r), A_1(t,r), 0, 0) \tag{22}$$

$$\delta A_t = \delta A_r = 0\,, \qquad \delta A_a = \sum_{\ell m} A^{(v)}_{\ell m}(t,r) E_{ab} \nabla^b Y^m_\ell(\theta,\varphi)\,. \tag{23}$$

Сферически-симметричный случай. Четный сектор.

- 4D действие Галилеона после компактификации
  $S_5 = \int d^4x \sqrt{-g}\, \phi \Big(G_4 \Big(R - \frac{1}{4}\phi^2 F^2 - 2\frac{\Box\phi}{\phi} \Big) + G_{4,X} \Big((\Box\pi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi)^2 + 2\,\frac{1}{\phi}\, \nabla_\mu\phi \nabla^\mu\pi\, \Box\pi - \frac{1}{2}\phi^2\, F_\mu{}^\sigma\, F_{\nu\sigma}\, \nabla^\mu\pi\, \nabla^\nu\pi \Big) + G_2(\pi,\, X) + G_3(\pi,\, X)\, \Box\pi \Big)\,,$
- Уравнения движени по-прежнему остаются второго порядка.
- Векторная мода возмущений

$$\bar{A}_\mu = (A_0(t,r), A_1(t,r), 0, 0) \tag{22}$$

$$\delta A_t = \delta A_r = 0\,, \qquad \delta A_a = \sum_{\ell m} A^{(v)}_{\ell m}(t,r) E_{ab} \nabla^b Y^m_\ell(\theta,\varphi)\,. \tag{23}$$

- Скорости распространения векторных и тензорных возмущений совпадают.

Слабая зависимость от времени

$$f[r,t] = \widetilde{f}[r] + \phi[r,t] \tag{24}$$

$$\lim_{t \to t0} \frac{\phi[r,t]}{\widetilde{f}[r]} = 0, t_0 \in G \tag{25}$$

The case $\widetilde{\mathcal{Q}} \neq 0$

$$\frac{\widetilde{\mathcal{Q}}'}{\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{Q}}^2} < -\frac{d-1}{d\widetilde{\mathcal{A}}} k\widetilde{a}\widetilde{c}^{d-2} + \frac{\varepsilon[r,t]}{\widetilde{\mathcal{Q}}^2} \tag{26}$$

$\widetilde{a}$ and $\widetilde{c}$ ограничены снизу положительными const.

$$\frac{\widetilde{\mathcal{Q}}'}{\widetilde{\mathcal{Q}}^2} < -C \tag{27}$$

$$\mathcal{Q}^{-1}(r) < \mathcal{Q}^{-1}(r') - \mathcal{C}(r'-r)\,. \tag{28}$$

Тогда $\mathcal{Q}$ всегда сингулярна.

Отсутсвие запрещающей теоремы

Следствие уравнений движения:

$$\frac{b^2}{a^3}\mathcal{Y}[r,t] = 2\frac{a^2}{b^2}\pi'^2\mathcal{K}^{00} + 2\frac{a}{bc}\partial_r\left(\frac{c}{ab^3}K_X\pi'^3\right) + \\ + \kappa K_X\pi'^3\frac{1}{b^3}\left(2\frac{c}{ab^3}K_X\pi'^3 + \frac{2}{\kappa}\frac{c'}{ab}\right) \\ - \left(T_0^0 + T_r^r + \frac{2}{\kappa}\frac{b}{ac}\partial_t\left(\frac{\partial_t c}{ab}\right)\right) \tag{29}$$

$$\frac{2}{ac^{d-2}}\psi'^2\mathcal{K}^{00}[r,t] = -\mathcal{Q}' - \frac{d-1}{d}\kappa ac^{d-2}\mathcal{Q}^2 + \mathcal{Y}[r,t], \tag{30}$$

где

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{c^{d-1}}\left(2\frac{c}{a}K_X\psi'^3 + \frac{d}{\kappa}\frac{c'}{a}\right) \tag{31}$$

O. A. Evseev and O. I. Melichev, “No static spherically symmetric wormholes in Horndeski theory,”Phys. Rev. D 97 (2018) no.12, 124040.

Комбинация уравнений Эйнштейна

$$S_\theta^\theta = c^2 E_{tt} + a E_{\theta\theta} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
S_\theta^\theta = &\Big(\left(a^2(\partial_r\psi)^2 - b^2(\partial_t\psi)^2\right) b^2 c^2 \partial_t a \partial_t b - a^5 b c \partial_{rr} c (\partial_r\psi)^2 - a^5 b (\partial_r c)^2 (\partial_r\psi)^2 \\
&+ a^5 c \partial_r b \partial_r c (\partial_r\psi)^2 + a^4 b c^2 \partial_{rr} a (\partial_r\psi)^2 + a^4 b c \partial_r a \partial_r c (\partial_r\psi)^2 - a^4 c^2 \partial_r a \partial_r b (\partial_r\psi)^2 \\
&- a^3 b^3 c \partial_{rr} c (\partial_t\psi)^2 - a^3 b^3 c \partial_{tt} c (\partial_r\psi)^2 + 4 a^3 b^3 c \partial_r\psi \partial_t\psi \partial_{tr} c + a^3 b^3 (\partial_r c)^2 (\partial_t\psi)^2 \\
&+ a^3 b^3 (\partial_t c)^2 (\partial_r\psi)^2 - a^3 b^2 c^2 \partial_{tt} b (\partial_r\psi)^2 + a^3 b^2 c \partial_r b \partial_r c (\partial_t\psi)^2 - 4 a^3 b^2 c \partial_t b \partial_r c \partial_r\psi \partial_t\psi \\
&+ a^3 b^2 c \partial_t b \partial_t c (\partial_r\psi)^2 - a^2 b^3 c^2 \partial_{rr} a (\partial_t\psi)^2 + a^2 b^3 c \partial_r a \partial_r c (\partial_t\psi)^2 - 4 a^2 b^3 c \partial_r a \partial_t c \partial_r\psi \partial_t\psi \\
&+ a^2 b^3 c \partial_t a \partial_t c (\partial_r\psi)^2 + a^2 b^2 c^2 \partial_r a \partial_r b (\partial_t\psi)^2 - a b^5 c \partial_{tt} c (\partial_t\psi)^2 - a b^5 (\partial_t c)^2 (\partial_t\psi)^2 \\
&+ a b^4 c^2 \partial_{tt} b (\partial_t\psi)^2 + a b^4 c \partial_t b \partial_t c (\partial_t\psi)^2 \\
&+ b^5 c \partial_t a \partial_t c (\partial_t\psi)^2\Big)\left(\left(a^2(\partial_r\psi)^2 - b^2(\partial_t\psi)^2\right) a^3 b^3 c^2\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{33}$$

V. A. Rubakov, "More about wormholes in generalized Galileon theories," Theor. Math. Phys., vol. 188, no. 2, pp. 1253– 1258, 2016.

Параметризация возмущений в нечетном секторе.

- Возмущения

$$\pi = \bar{\pi} + \chi \tag{34}$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{35}$$

Параметризация возмущений в нечетном секторе.

- Возмущения

$$\pi = \bar{\pi} + \chi \tag{34}$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{35}$$

- Regge–Wheeler's классификация возмущений

$$\begin{cases} h_{tt} = 0, \quad h_{tr} = 0, \quad h_{rr} = 0, \\ h_{ta} = \sum_{\ell,m} h_{0,\ell m}(t,r) E_{ab} \partial^b Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ h_{ra} = \sum_{\ell,m} h_{1,\ell m}(t,r) E_{ab} \partial^b Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \\ h_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{\ell,m} h_{2,\ell m}(t,r) \left[E_a{}^c \nabla_c \nabla_b Y_{\ell m}(\theta,\varphi) + E_b{}^c \nabla_c \nabla_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \right], \end{cases} \tag{36}$$

$$\chi = 0 \tag{37}$$

T. Kobayashi, "Horndeski theory and beyond: a review," Rept. Prog. Phys. 82, no.8, 086901 (2019).