МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

УДК 539.121.667

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

«Разработка программного обеспечения по визуализации результатов измерений макета ПЭТ»

Студент Васильева П. Ф. __________
Научный руководитель Дубинин Ф. А. __________

Москва
2023 г.

Оглавление

Введение

В настоящее время возрастает интерес к диагностическим аппаратам, таким как ПЭТ и ОФЭКТ. В медицине повышается востребованность в их точности и большей распространенности. В связи с этим, в НИЦ «Курчатовский институт» был собран прототип ПЭТ, который в последствии должен будет улучшить точность измерений и уменьшить стоимость сборки.

Для нового ПЭТ понадобится написать новое программное обеспечение, которое позволит достаточно просто считывать полученные данные и сразу получать необходимую томограмму, в чем и состоит моя задача.

ПЭТ

На данный момент существует много различных приборов для получения томограммы. Наиболее популярными и распространенными в медицине сейчас являются ОФЭКТ- (однофотонная эмиссионная компьютерная томография) и ПЭТ- (позитронная эмиссионная томография) сканеры.

Ниже представлен макет ПЭТ-сканера, с помощью которого были проведены измерения (Рис. 1). Он состоит из сцинтилляторов (используется GAGG), кремниевых детекторов (SiPM) и считывающих плат, расположенных по кругу. В качестве источника использовался $^{44}_{22}Ti$.

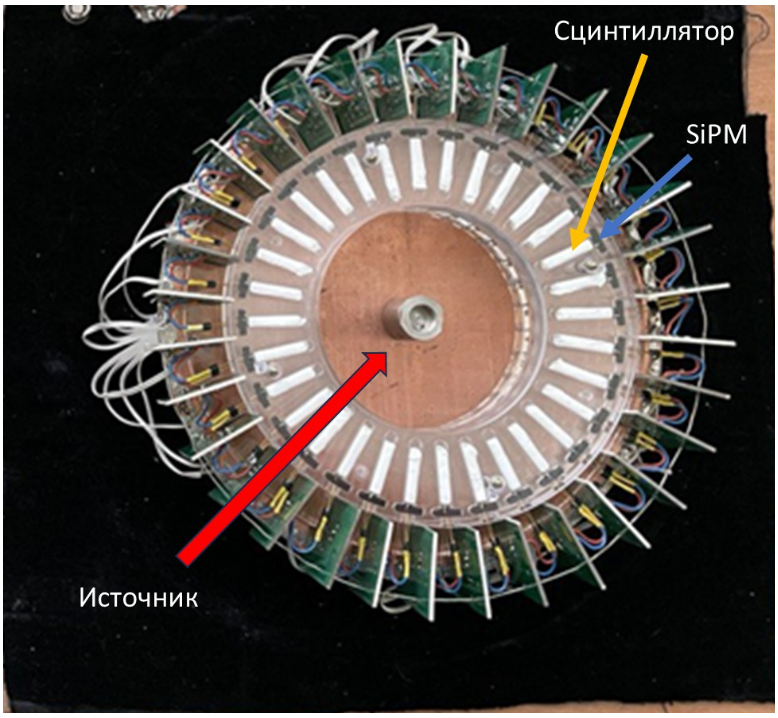

Рис. 1. Макет ПЭТ.

Основной принцип работы ПЭТ состоит примерно в следующем (Рис. 2). Пациенту вводят препарат, содержащий β^+ -активное вещество и большое количество глюкозы, чтобы он сконцентрировался в новообразованиях. Активное вещество испускает позитрон, который аннигилирует с электроном среды, в результате чего вылетают два γ-кванта:

$$ee \rightarrow \gamma\gamma$$

Основным недостатком ПЭТ-сканеров является их стоимость.

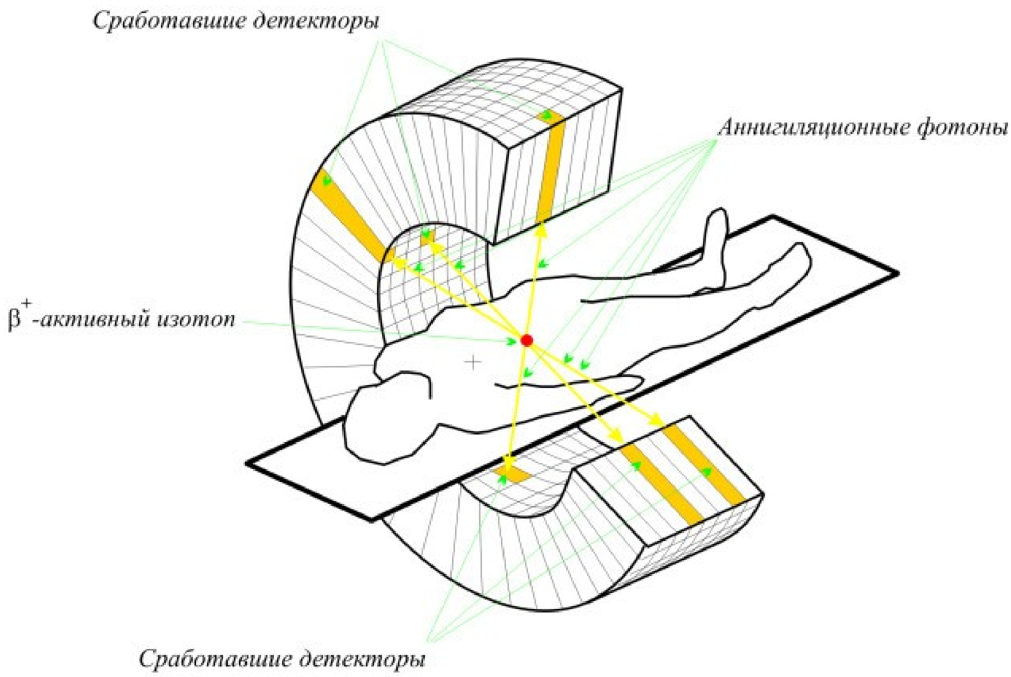

Рис. 2. Принцип работы ПЭТ.

Преимущества ПЭТ:

- Высокая диагностическая точность.
- Одно исследование заменяет собой несколько видов диагностики.
- Возможность охватить все органы в одном исследовании.
- Диагностика заболеваний на ранних стадиях.

Томография

Начнем с самого начала: что такое томография? Фактически, это достаточно большой раздел математики, отвечающий за восстановление изображений, с помощью набора массива данных [1]. Существуют много различных видов томографии и для каждого вида существует еще несколько алгоритмов по восстановлению изображения.

Допустим у нас имеется двумерный массив чисел, в котором числа могут быть произвольными. Этот массив можно изобразить на картинке. Для выявления максимального контраста удобно определить минимальное и максимальное значения в массиве, запомнить их, а на картинке показывать числа в интервале от 0 до 1 после линейного преобразования массива. Так удобно делать по той причине, что шкала соответствия значений в массиве цветам на картинке имеет стандартный вид.

Но можно делать и наоборот. Из имеющейся картинки получить двумерный массив чисел.

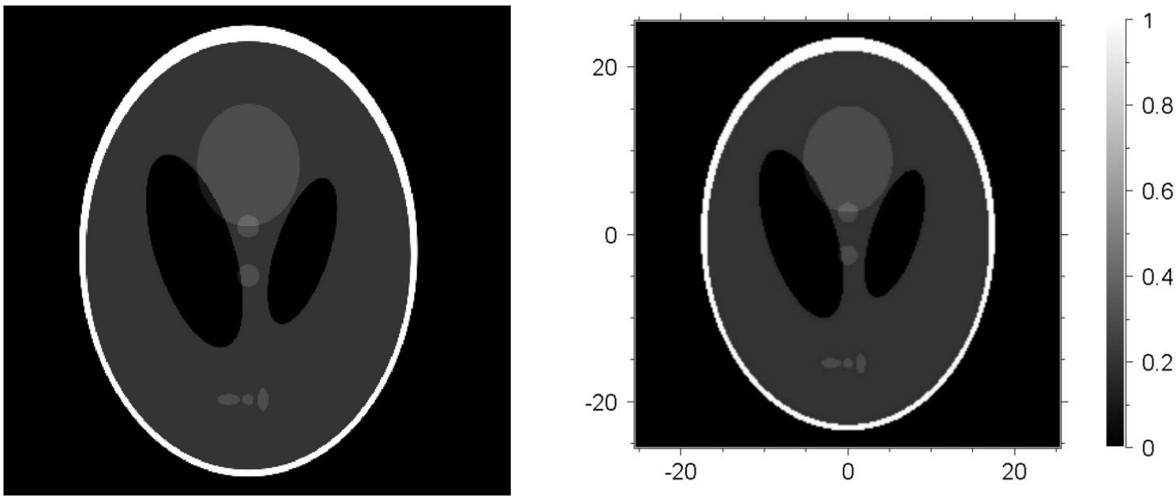

Рис. 3. Картинка (слева) и изображение числового массива (справа).

На Рис. 3 слева показана картинка размером 512×512 пикселей в png формате. Справа изображен числовой массив стандартного вида, полученный из байтов первой картинки, в интервале от 0 до 255, перерисованный снова в картинку.

Следует отметить, что картинка – это один из многих источников создания двумерного массива чисел. Нас интересует именно двумерный массив чисел. Его можно создавать разными способами, в том числе вычислить с помощью формул или измерить прибором. Нам не важно, как конкретно создан массив чисел.

Следующим шагом является вращение полученного массива данных. При практическом использовании томографии двумерного массива чисел нет, его как раз необходимо получить. Есть объект, который просвечивается насквозь, и вращается именно объект. Исследование объекта подобным образом и дает нам информацию для томографии. Но математически мы можем заменить объект числовым массивом и его тоже можно вращать.

Синограмма

Томография – это метод преобразования одного набора данных в другой набор данных. На входе для этого метода дается синограмма. А на выходе получается томограмма. Синограмма содержит информацию о проекциях объекта при его вращении с постоянным шагом в интервале от 0 до 180 градусов. Проекция представляет собой одномерный массив, каждая точка в котором равна сумме значений двумерного массива по другому направлению.

Математически наш объект представляет собой двумерный массив чисел. На экране компьютера картинка имеет горизонталь и вертикаль. Проекция может быть горизонталью, в каждой точке которой записаны суммы всех точек массива по вертикали (или наоборот).

Синограмма – это снова двумерный массив, но его размерность иная. По горизонтали она совпадает с исходным массивом. То есть если исходный массив имел размер 512×512, то будет 512. А по вертикали размер равен числу проекций. Например, если вращение идет с шагом 2 градуса, то будет всего 90 проекций. А массив будет иметь размер 512×90.

В этом месте надо установить связь между математикой и реальной жизнью, на примере медицины. С математической точки зрения синограмма содержит сумму всех точек массива по одному направлению. И это важно. В медицине просвечивают объект плоской волной, например, рентгеновского излучения, и измеряют ослабление интенсивности лучей в каждой точке плоского фронта.

Считается, что ослабление происходит по экспоненциальному закону, а аргументом экспоненты является интеграл от функции $f(x,y)$ по второму аргументу, то есть вдоль направления лучей со знаком минус. Функция $f(x,y)$ представляет собой произведение коэффициента поглощения на плотность материала.

Именно функция $f(x,y)$ и интересует медиков. Но вместо нее мы получаем интеграл по второму аргументу. Этот интеграл получается после логарифмирования данных интенсивности и смены знака на противоположный.

Проведем небольшую аналогию с математикой. В математике суммируются точки, в томографии мы получаем сумму проекций в результатте измерений. Если в процессе измерения мы не получаем сумму после логарифмирования, то применять томографию нельзя.

В результате определенных преобразований, о которых будет рассказано ниже, мы получаем синограмму из проведенных измерений. Уже из полученной синограммы получается томограмма (желаемое изображение). В зависимость от частоты вращения, мы получаем разные результаты для восстановленного изображения из синограммы (Рис. 4).

Рис. 4. 1 – синограмма; 2 – томограмма (число проекций 90); 3 – томограмма (число проекций 180).

Преобразование Радона

Метод восстановления изображения посредством преобразования Радона является одним из самых точных, простых и широко-распространенных, особенно в области томографии.

При исследовании внутренней структуры объекта его просвечивают излучением. Просвечивая тело с одного направления, получают плоское (двумерное) теневое изображение трехмерного тела. Просвечивая тело с другого направления, получают другое теневое изображение тела и дополнительную информацию о его внутренней структуре. Просвечивая тело еще с одного направления, получают новую информацию и т.д. Имея большое количество проекционных снимков с различных направлений, можно с достаточной степенью точности восстановить внутреннюю структуру объекта, а точнее функцию плотности поглощения излучения.

Задачей томографии является восстановление трехмерной функции $\mu(x,y,z)$ плотности поглощения излучения. [2] В такой постановке задача весьма сложна и в классической томографии трехмерный объект представляют в виде набора тонких срезов. Внутри каждого среза плотность μ считают функцией только двух переменных. При исследовании систему источники-приемники устраивают таким образом, чтобы регистрировать только данные на лучах, лежащих в плоскости среза. Схема сканирования одного слоя представлена на Рис. 5.

Детекторы регистрируют данные и, полученная по ним функция R, зависит от одной переменной s (при фиксированном направлении зондирования, определяемом углом φ). Восстановить по одной проекции $R_\varphi(s)$ функцию двух переменных $\mu(x,y)$ невозможно. Для того, чтобы получить набор данных, достаточный для восстановления, применяют зондирование объекта с различных направлений, варьируя угол φ. Поворачивая систему «источники – детекторы», получают множество проекций $R(s,\varphi)$слоя (параметр φ обозначает угол зондирования), по которым можно восстановить двумерную функцию $\mu(x, y)$. Схема сканирования слоя с различных направлений показана на Рис. 6.

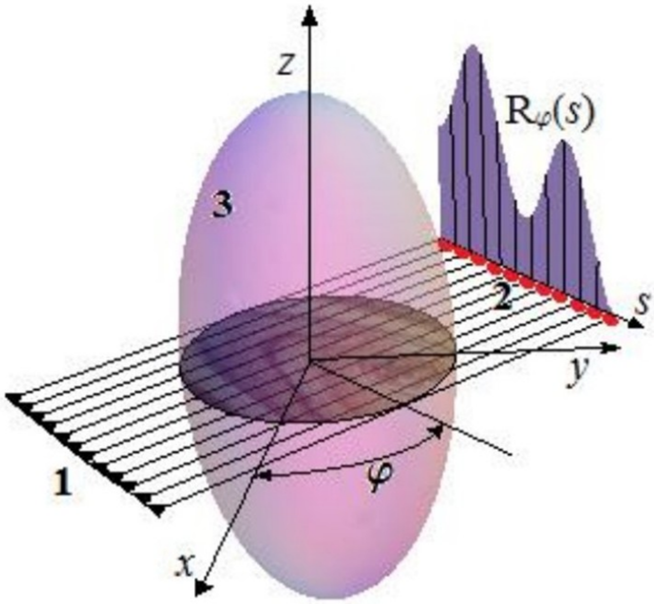

Рис. 5. Зондирование трехмерного объекта (1 – источники; 2 – детекторы; 3 – объект).

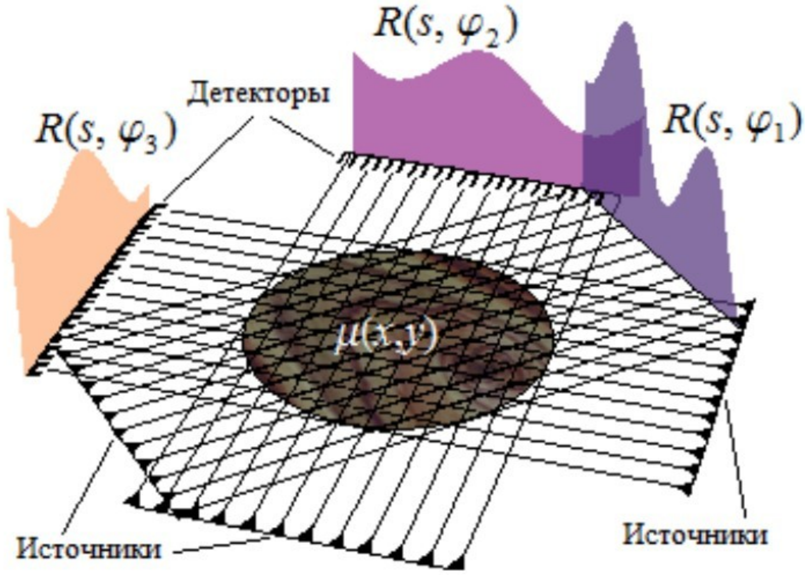

Рис. 6. Схема получения проекций $R(s, \varphi)$ одного слоя.

Определив функцию $\mu(x, y)$ для одного слоя, систему «источники – детекторы» сдвигают в направлении оси z для получения информации о следующем близком слое и т.д. Затем, по двумерным функциям $\mu_{z_i}(x, y)$ в сечениях z_i, где z – координата перпендикулярная сечению, получают трехмерную функцию плотности поглощения $\mu(x, y, z)$. При этом основные трудности возникают при исследовании отдельного слоя, т.е. при восстановлении функции $\mu_z(x, y)$.

Подобный способ сбора данных составляет основу реконструктивной томографии. На исследуемое тело воздействует излучение, проникающее внутрь объекта. Оно взаимодействует с веществом, составляющим объект, и на выходе регистрируется излучение, прошедшее через тело. При обработке полученных данных используются следующие предположения: траектория луча считается прямолинейной и выполняется линейный закон поглощения излучения в веществе.

Прямое преобразование

Пусть функция двух действительных переменных $f(x, y)$ определена на всей плоскости и достаточно быстро убывает на бесконечности так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. Преобразованием Радона (ПР) функции $f(x, y)$ называется функция

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi)\, dt \tag{1}$$

Геометрический смысл преобразования Радона $R(s,\varphi)$ состоит в том, что это интегралы от функции $f(x, y)$ вдоль прямых L, перпендикулярных вектору $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, проходящих на расстоянии s (измеренном вдоль вектора $\vec{n}$ с соответствующим знаком) от начала координат (Рис. 7).

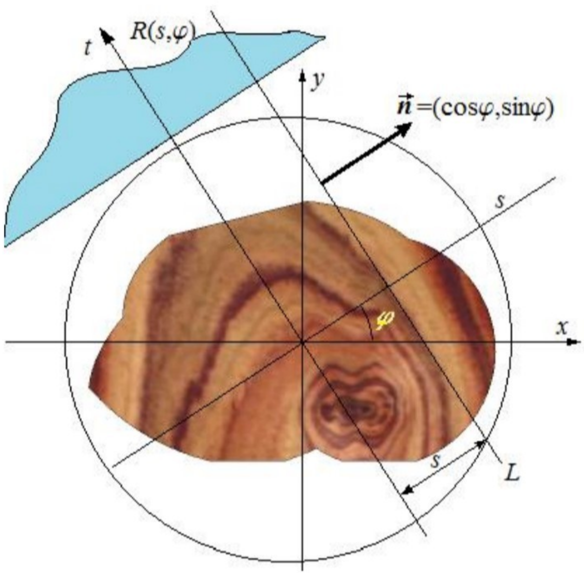

Рис. 7. К преобразованию Радона функции двух переменных.

Обратное преобразование. Метод Фурье синтеза

Начнем с интегрального преобразования Фуре (ПФ). Если $f(x)$ есть функция (вещественная или комплекснозначная) вещественной переменной x, то ее преобразование Фурье, если оно существует, задается формулой

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\,dx \tag{2}$$

Тогда обратное преобразование Фурье (ОПФ)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega x}\,dx \tag{3}$$

Аналогичным образом для функции $f(x,y)$ двух вещественных переменных x,y преобразованием Фурье принято называть интеграл вида:

$$F(w_1,w_2)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(w_1 x+w_2 y)}dx\,dy \quad , \tag{4}$$

который получается двукратным применением одномерного преобразования Фурье по каждой из переменных. Параметры w_1,w_2 иногда называют координатами в частотной области или координатами в фурье — пространстве. Тогда обратное преобразование в данном случае:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} F(w_1,w_2)e^{-i(w_1 x+w_2 y)}dw_1\,dw_2 \tag{5}$$

Рассмотрим двумерное преобразование Фурье функции $f(x,y)$. На мгновение зафиксируем параметры w_1,w_2 и рассмотрим в плоскости XY прямую $w_1 x+w_2 y=s$. Выражение $w_1 x+w_2 y$, стоящее в показателе степени экспоненты в (4), постоянно вдоль этой прямой и меняется быстрее всего если двигаться перпендикулярно прямой вдоль вектора (w_1,w_2) . Поэтому в (4) удобно перейти к новым координатам (s,t) , первая из которых направлена перпендикулярно прямой, а вторая t – вдоль прямой. Связь между координатами определяется формулами:

$$\begin{aligned} x&=s\cos\varphi-t\sin\varphi \\ y&=s\sin\varphi+t\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} s&=x\cos\varphi+y\sin\varphi \\ t&=y\cos\varphi-x\sin\varphi \end{aligned}$$

Где φ — угол, который образует вектор (w_1,w_2) с положительным направлением оси X. В частотной плоскости для вектора $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2)$ используем полярные координаты

$$\boldsymbol{w}=(w_1, w_2)=\omega\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi) \ ,$$

с тем же углом φ, который использован при построении системы координат (s, t). Это можно сделать потому, что вектор $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2)$ в частотной плоскости имеет тот же наклон, что и вектор (w_1, w_2) в плоскости XY. Тогда интеграл (4) примет вид

$$F(w_1, w_2)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi)e^{-i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}ds\,dt$$

Но $s=x\cos\varphi + y\sin\varphi$, поэтому

$$F(w_1, w_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi)dt \tag{6}$$

Легко увидеть, что внутренний интеграл (5) является преобразованием Радона функции $f(x, y)$. Тогда

$$F(w_1, w_2)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} R[f](s, \varphi)e^{-i\omega s}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{R}(\omega, \varphi) \tag{7}$$

где $\widetilde{R}(\omega, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R[f](s, \varphi)e^{-i\omega s}ds$ - одномерное преобразование Фурье радоновского образа $R[f](s, \varphi)$ по переменной *s*.

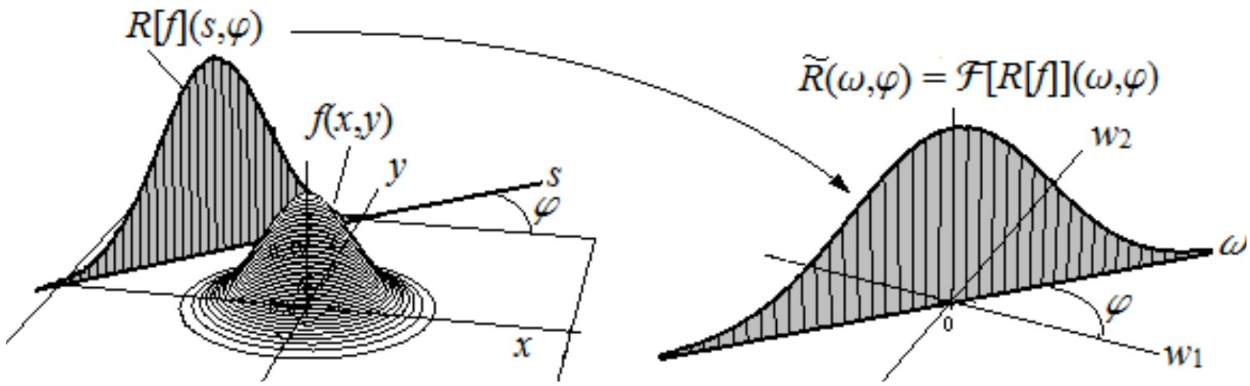

Рис. 8: Центральное сечение двумерно ПФ как одномерное ПФ радоновского образа

Одномерный Фурье образ $\widetilde{R}(\omega, \varphi)$ проекции $R[f](s, \varphi)$, полученной при повороте системы «источник – детектор» на угол φ, является сечением двумерного Фурье образа $F(w_1, w_2)$ по линии, повёрнутой на угол φ и проходящей через начало координат. Это значит, что из одномерных Фурье образов проекций $\widetilde{R}(\omega,\varphi)$ можно набрать (синтезировать) двумерный Фурье образ $F(w_1, w_2)$ искомого изображения (рис. 9). Тогда само изображение $f(x, y)$ можно восстановить с помощью двумерного обратного преобразования Фурье.

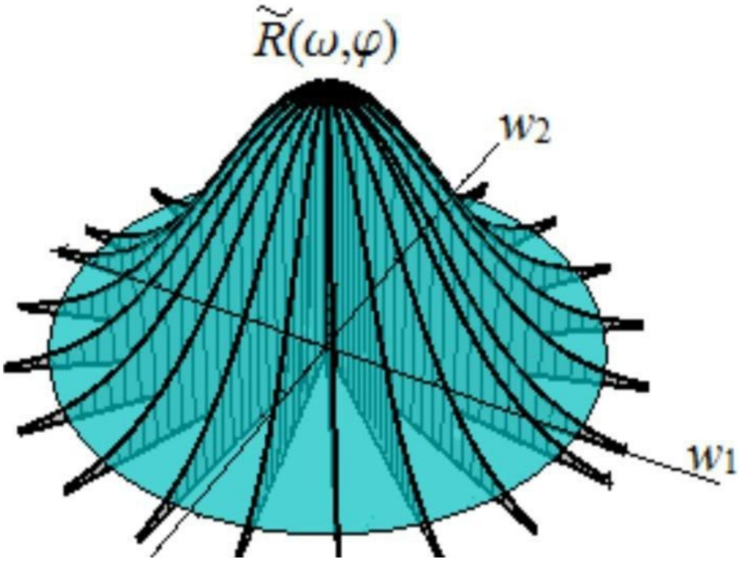

Рис. 9: Двумерное ПФ как множество одномерных ПФ радоновских образов.

Полученные результаты

В результате изучения обратного преобразования Радона, был изучен Matlab, а конкретно его функция восстановления изображения iradon, после чего были получены восстановленные изображения источника для различных положений, различных типов сцинтилляторов и различного количества детекторов.

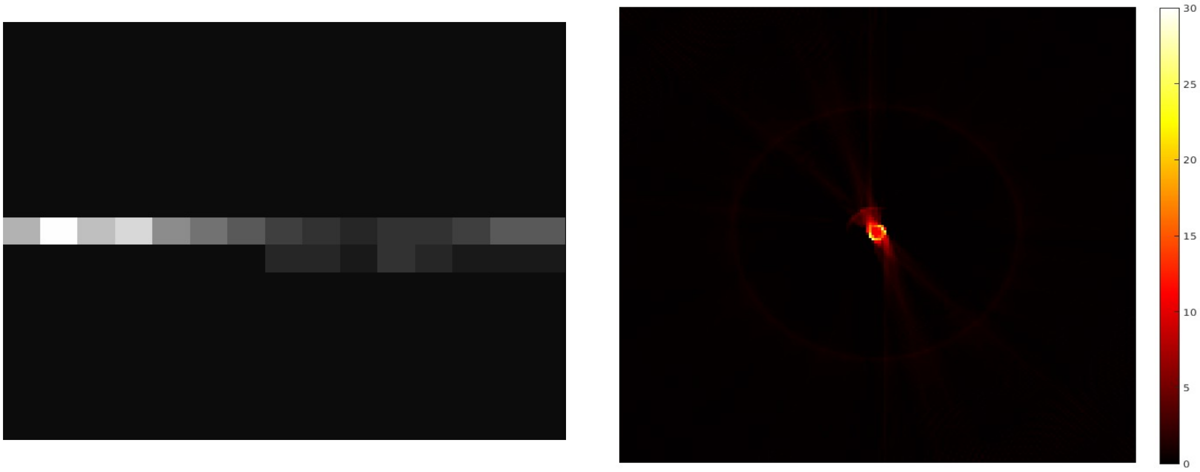

Рис. 10. Пример получения томограммы (реальные данные)
Центральное положение источника.

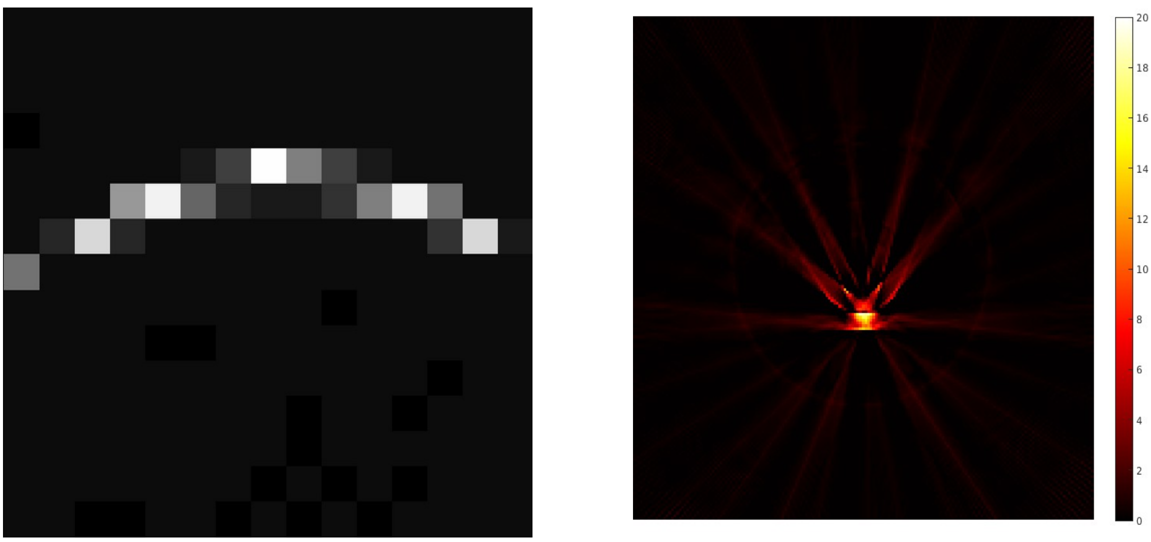

Рис. 11. Пример получения томограммы (реальные данные)
Нецентральное положение источника.

Рис. 12. Пример получения томограммы (моделированные данные)
Нецентральное положение источника. GAGG.

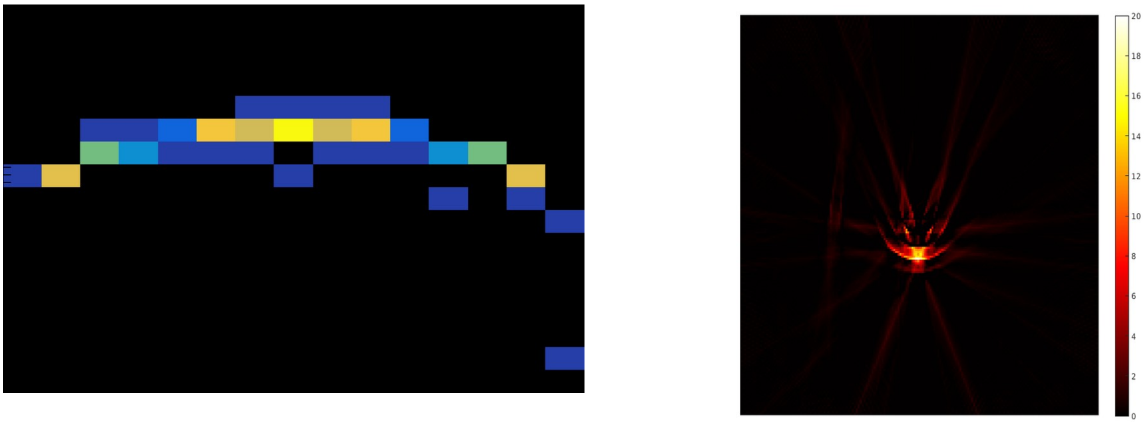

Рис. 13. Пример получения томограммы (моделированные данные)
Нецентральное положение источника. BGO

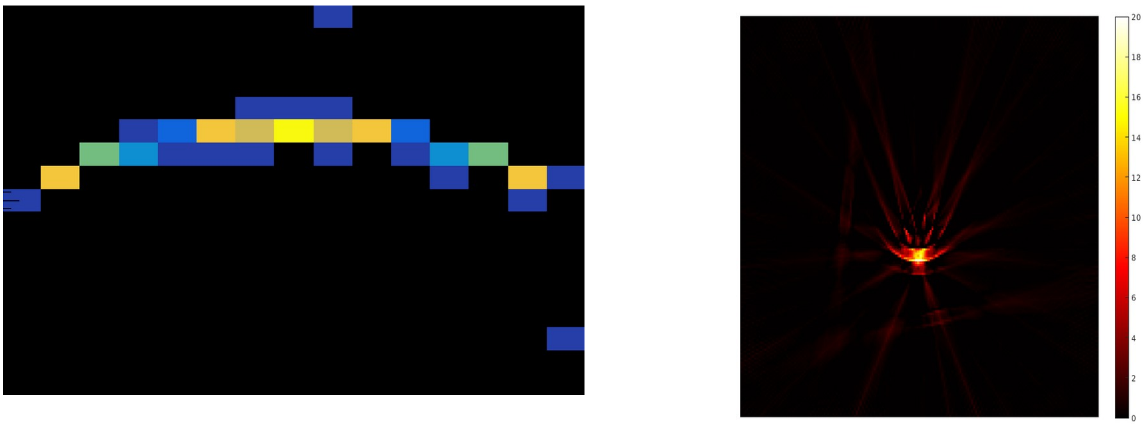

Рис. 14. Пример получения томограммы (моделированные данные)
Нецентральное положение источника. LSO

Рис. 15. Восстановленное изображение из экспериментальных данных + моделирования дополнительных детекторов. Центральное положение.

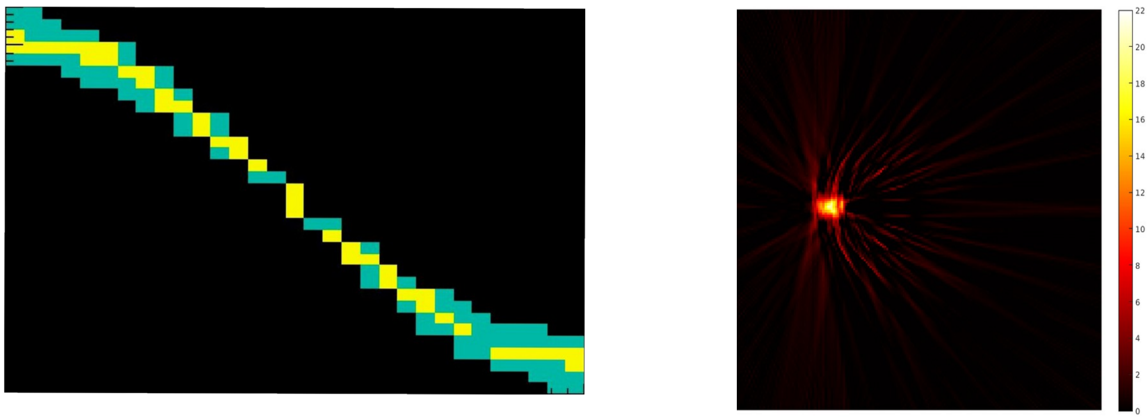

Рис. 16. Восстановленное изображение из экспериментальных данных + моделирования дополнительных детекторов. Нецентральное положение.

Заключение

- На примере фантома изучена зависимость качества восстанавливаемого изображения от параметров функции iradon.Matlab.
- Восстановлено изображение из реальных результатов для двух различных положений источника. (менее 5 мм в диаметре vs 1×1,5 см восстановленное изображение).
- Восстановлено и проведено сравнение изображений для различного количества детекторов и разного вида сцинтилляторов.

Список используемых источников

1. В. Г. Кон. О томографии для студентов.
   URL:: https://kohnvict.narod.ru/pdf/1/26-l7c-tomography.pdf
2. П. Г. Доля. Введение в математические методы компьютерной томографии.
   URL::http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20150715155132_e76e359e30e3b.pdf
3. В. К. Клочко, В. П. Кузнецов. Методы восстановления изображений и оценивания аппаратной функции по прореженной матрице наблюжений.
   DOI: 10.15372/AUT20160602.
4. И. С. Грузман. Математические задачи компьютерной томографии.