

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИОННОГО ЛИНЗИРОВАНИЯ НА
КЛАСТЕРЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР**

Студент _____ Б. Ю. Мучкинова

Научный руководитель _____ Е. С. Шлепкина

Научный консультант,
д.ф.-м.н. _____ К. М. Белоцкий

Москва 2024

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИОННОГО ЛИНЗИРОВАНИЯ НА
КЛАСТЕРЕ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР**

Студент _____ Б. Ю. Мучкинова

Научный руководитель _____ Е. С. Шлепкина

Научный консультант,
д.ф.-м.н. _____ К. М. Белоцкий

Рецензент,
д.ф.-м.н. _____ В. А. Гани

Секретарь ГЭК,
к.ф.-м.н. _____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,
д.ф.-м.н., проф. _____ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Предварительные оценки характеристик кластеров ПЧД для их поиска по эффекту микролинзирования	5
1.1 Параметры кластера	5
1.2 Основные характеристики	6
1.2.1 Оптическая толщина	6
1.2.2 Оценка эффективного радиуса $R_{1/2}$	9
1.2.3 Оценка τ для одного кластера и всего неба с учетом всех кластеров	10
1.2.4 Прозрачность неба для одиночных ПЧД	11
1.2.5 Количество звезд, испытавших эффект микролинзирования на одном кластере	12
1.2.6 Приближенная оценка количества событий линзирования на всех кластерах	14
2 Оценки наблюдаемости эффектов гравитационного микролинзирования	15
2.1 Оптическая толщина кластеров ПЧД и фактор перекрытия	15
2.1.1 Оптическая толщина кластера	15
2.1.2 Оптическая толщина кластеров	16
2.2 Вероятность двойного события для одного кластера	19
2.3 Возможные особенности линзирования на кластере	20
2.4 Проверка методики расчета по воспроизведению результатов МАСНО	23
2.5 Вероятность повторного события на кластере ПЧД	25
2.6 Количество кластеров на фоне БМО	26

2.7	Период между событиями линзирования одной звезды на кла- стере ПЧД	26
2.8	Период между событиями для одиночных ПЧД	28
3	Заключение	29
	Список использованных источников	30

ВВЕДЕНИЕ

Открытие LIGO/Virgo [1] гравитационных волн от слияний десятков черных дыр солнечной массы привело к повышенному интересу к первичным черным дырам (ПЧД) как кандидатам в скрытую массу (СМ) [2–5]. ПЧД — это черные дыры, которые могут образоваться в ранней Вселенной [6; 7]. Одной из моделей формирования ПЧД является образование в результате коллапса доменных стенок [8; 9]. ПЧД могут формировать скопления. Это может происходить за счет случайного (пуассоновского) пространственного распределения одиночных ПЧД или за счет специфики самого механизма их рождения [10–17].

Одним из наблюдательных проявлений ЧД может являться эффект гравитационного микролинзирования удаленных светил (звезд, квазаров и др.).

Гравитационное микролинзирование — это временное усиление яркости фоновой звезды, которое возникает, когда компактный объект проходит близко к лучу зрения звезды [18]. Различные обзоры микролинзирования наложили жесткие ограничения на количество компактных объектов в гало Млечного Пути.

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСТЕРОВ ПЧД ДЛЯ ИХ ПОИСКА ПО ЭФФЕКТУ МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ

Особенностью настоящей задачи является то, что вероятность эффекта линзирования может рассматриваться как «моментальная», то есть на момент наблюдения, так и на временном интервале. О вероятности в первом случае говорит такая величина, как оптическая толщина. В данной работе выстраивается методика для подсчета второй вероятности, то есть количество событий линзирования за заданный промежуток времени, которое получают наблюдения. Методика оценки нужного результата включает обе вероятности.

При исследовании гравитационных линз часто оказывается достаточным рассмотрение эффекта в приближении тонкой линзы. Это сильно упрощает вычисления, и оправдано тем, что характерные масштабы (расстояние от наблюдателя до источника и линзы) много больше, чем характерный размер линзы (т. е. области, где преимущественно происходит отклонение лучей света).

Кратко обозначим основные характеристики кластеров ПЧД.

1.1 ПАРАМЕТРЫ КЛАСТЕРА

Параметры кластера брались, следуя работе [8]

- $R = 1$ пк – радиус кластера;
- $M = 10^4 M_{\odot}$ – масса кластера;
- $r_0 = 0.1R$ – радиус ядра кластера («кора»);
- профиль плотности кластера ПЧД, который задается следующим со-

отношением:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{8r_0^3}, & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho_0}{(r + r_0)^3}, & r_0 < r < R \end{cases}.$$

1.2 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.2.1 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА

Событие микролинзирования происходит, когда компактный объект проходит через «трубку» микролинзирования, радиус которой R_E – радиус Хвольсона-Эйнштейна:

$$R_E^2 = \frac{4Gm_{\text{ПВН}}}{c^2} \frac{D_d D_{\text{ds}}}{D_s} = 2r_{\odot} \frac{D_d D_{\text{ds}}}{D_s} \frac{M_{\odot}}{m_{\text{ПВН}}}, \quad (1.1)$$

где G – гравитационная постоянная, c – скорость света, $D_s = 50$ кпк – расстояние между фоновым источником (Большое Магелланово Облако) и наблюдателем, D_d – расстояние между линзой (ПЧД) и наблюдателем, которая для простых численных оценок бралась 10 кпк, D_{ds} – расстояние между ПЧД и источником, $r_{\odot} = 2.95$ км – гравитационный радиус Солнца, M_{\odot} – масса Солнца.

Оптическую толщину τ можно определить как число ПЧД, которые помещаются в «трубку» микролинзирования радиуса R_E :

$$\tau = \int \pi R_E^2 \frac{\rho(r)}{m_{\text{ПВН}}} dx. \quad (1.2)$$

Интегрирование производится по хорде – лучу зрения, вдоль которой направим ось x (рисунок 1.1).

Результаты расчета оптической толщины приведены на рисунке 1.2.

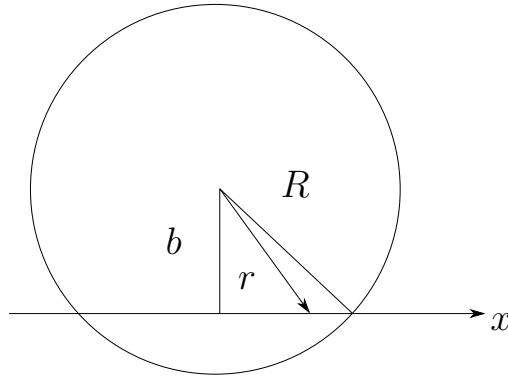


Рисунок 1.1 — Схематичное изображение кластера, b — прицельный параметр, r — расстояние от центра кластера

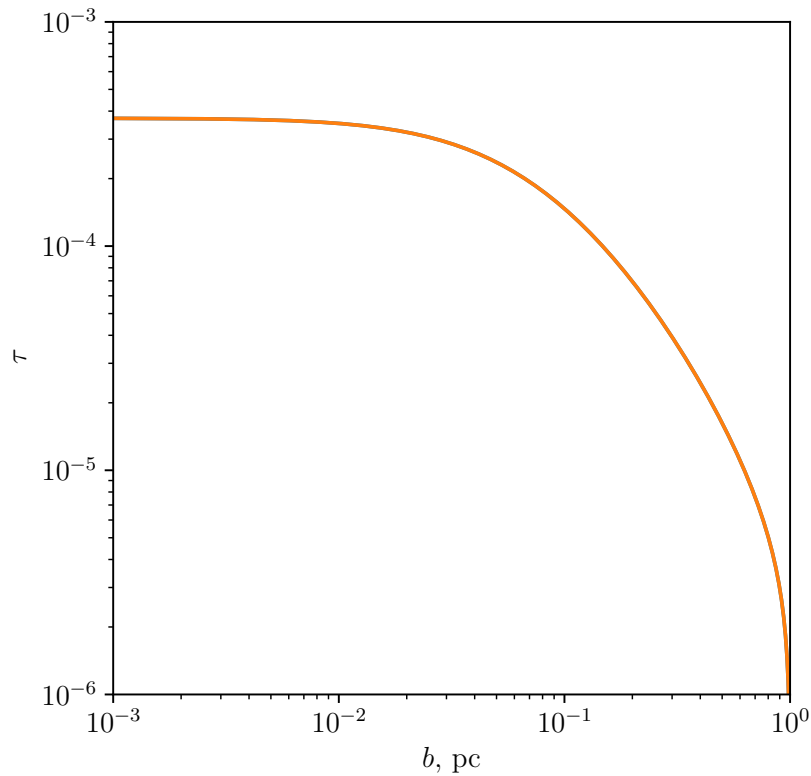


Рисунок 1.2 — Зависимость оптической толщины τ от прицельного параметра b

Также вычислить оптическую толщину можно другим способом, когда линзы распределены по всему объему пространства между наблюдателем и светилом [19]. Луч зрения представляет собой конус Хвольсона-Эйнштейна. Тогда оптической толщиной называется часть телесного угла, покрываемого кругами Хвольсона-Эйнштейна. Предположим, что все линзы имеют одинаковую массу $m_{\text{РВН}}$. В тонком слое, находящемся на расстоя-

нии D_d от наблюдателя, толщина которого ΔD_d , можно выбрать такое расстояние R_m , что внутри поверхности площадью πR_m^2 находится в среднем одна линза. Здесь ρ – средняя плотность линз, то есть $\rho = m_{\text{РВН}}/(\pi R_m^2 \Delta D_d)$.

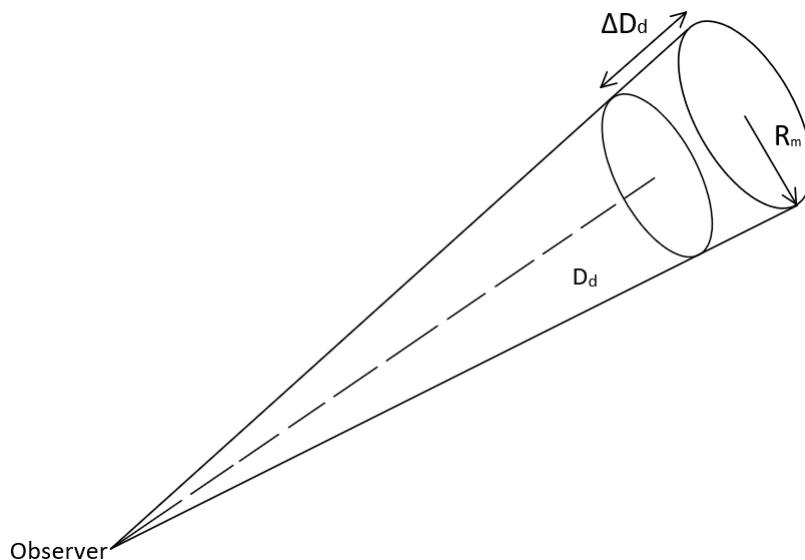


Рисунок 1.3 — Рассматриваемый слой толщиной ΔD_d на расстоянии D_d от наблюдателя, R_m – радиус поверхности, внутри площади которой имеется в среднем одна линза

Каждой ПЧД соответствует сечение πR_E^2 , где R_E – радиус Хвольсона-Эйнштейна, соответствующий гравитационной ПЧД с массой $m_{\text{РВН}}$. Вклад этого слоя в оптическую толщину задается соотношением:

$$\Delta\tau = \Delta N_{\text{РВН}} \frac{\pi R_E^2}{\pi R_m^2} = \left[\frac{4\pi G\rho D_d(D_s - D_d)}{c^2 D_s} \right] \Delta D_d. \quad (1.3)$$

Тогда общая оптическая толщина, обусловленная влиянием всех ПЧД, находящихся между источником и наблюдателем, может вычисляться как

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{D_d=0}^{D_s} \Delta\tau = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G\rho}{c^2} \frac{D_d(D_s - D_d)}{D_s} dD_d = \\ &= \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \int_0^1 \rho(x)x(1-x)dx, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $x = D_d/D_s$ – безразмерное расстояние от наблюдателя до ПЧД.

1.2.2 ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА $R_{1/2}$

Для оценки степени приближения зависимости численных результатов от учета профиля плотности оценим радиус $R_{1/2}$, равный прицельному параметру, охватывающему вокруг центра кластера половину его массы (рисунок 1.4).

$$\int_V \rho'(r) dV = \frac{N_{\text{РВН}}}{2}, \quad (1.5)$$

где профиль плотности кластера ПЧД, который задается следующим соотношением:

$$\rho'(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{8r_0^3}, & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho_0}{(r + r_0)^3}, & r_0 < r < R, \end{cases}$$

$R = 1$ пк – радиус кластера, $r_0 = 0.1R$ – радиус коры, $N_{\text{РВН}} = 10^4$ – количество ПЧД в кластере. Константа ρ_0 вычисляется из соотношения:

$$N_{\text{РВН}} = \int \rho' dV, \quad dV = 4\pi r^2 dr.$$

$$\rho_0 = \frac{N_{\text{РВН}}}{\frac{\pi}{6} + 4\pi \left(\ln \frac{R + r_0}{2r_0} + \frac{3r_0^2 + 4Rr_0}{2(R + r_0)^2} - \frac{7}{8} \right)}.$$

Проинтегрируем (1.5) в цилиндрической системе координат: $s = \sqrt{y^2 + z^2}$, тогда $dV = 2\pi s ds dx$:

$$\int_0^{r_0} ds \int_{-\sqrt{r_0^2 - s^2}}^{\sqrt{r_0^2 - s^2}} 2\pi s \frac{\rho_0 dx}{8r_0^3} + 2\pi \rho_0 \int_{r_0}^{R_{1/2}} s ds \int_{-\sqrt{R_{1/2}^2 - s^2}}^{\sqrt{R_{1/2}^2 - s^2}} \frac{dx}{(r_0 + \sqrt{s^2 + x^2})^3} = \frac{N_{\text{РВН}}}{2}. \quad (1.6)$$

Решая (1.6), получим, что $R_{1/2} = 0.502R$. То есть половина массы сосредоточена в половине радиуса кластера, эффект профиля плотности дает поправку фактор 2^2 .

$R_{1/2}$ соответствует углу θ_{max} , который вычисляется по формуле:

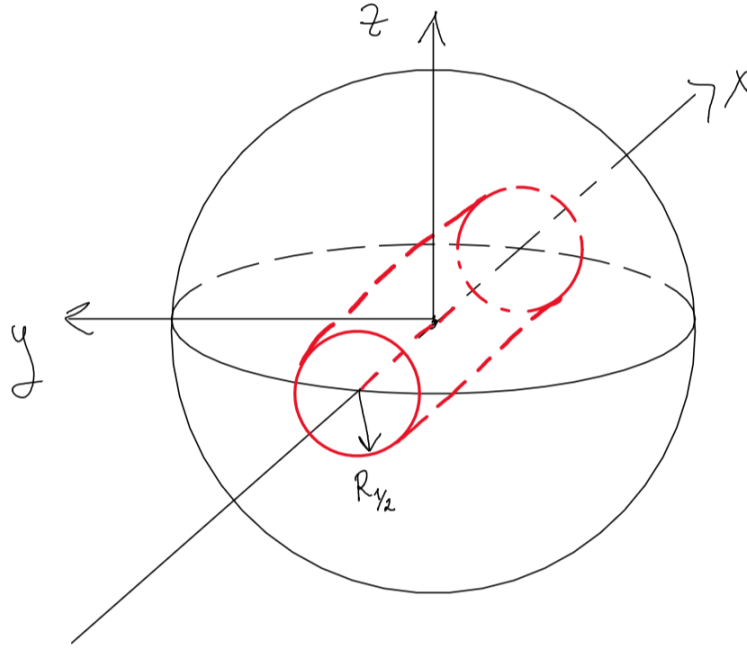


Рисунок 1.4 — Схематичное изображение кластера, вдоль оси x направлен луч зрения

$$\theta_{\max} = \frac{R_{1/2}}{D_d} = \frac{0.502 \text{ пк}}{10 \text{ кпк}} = 2.88 \cdot 10^{-3} \text{ гр.} \quad (1.7)$$

1.2.3 ОЦЕНКА τ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСТЕРА И ВСЕГО НЕБА С УЧЕТОМ ВСЕХ КЛАСТЕРОВ

Вычислим усредненную оптическую толщину τ_{cl} для кластера ПЧД:

$$\tau_{cl} = \frac{\int_0^{R/D_d} \tau(\tilde{b}) 2\pi\tilde{b}d\tilde{b}}{\pi(R/D_d)^2}, \quad (1.8)$$

где \tilde{b} – прицельный параметр в угловых единицах, $\tilde{b} = \frac{b}{D_d}$.

$$\tau_{cl} = \frac{\int_{-x_1}^{x_1} dx \int_0^{R/D_d} \pi R_E^2 \frac{\rho(\tilde{b})}{m_{PBH}} 2\pi\tilde{b}d\tilde{b}}{\pi(R/D_d)^2} = 1.59 \cdot 10^{-5}, \quad (1.9)$$

где $x_1 = \sqrt{R^2 - b^2}$.

Домножив τ_{cl} на долю неба, покрываемую кластерами ПЧД, получим

прозрачность неба $\langle \tau_{\text{cl}} \rangle$ для ПЧД, собранных в кластеры на расстоянии D_d :

$$\langle \tau_{\text{cl}} \rangle = \tau_{\text{cl}} N_{\text{cl}} \frac{\pi R^2}{4\pi D_d^2} = \tau_{\text{cl}} \frac{M_{\text{Gal}}}{M} \frac{\pi R^2}{4\pi D_d^2} = 3.98 \cdot 10^{-6}, \quad (1.10)$$

где $N_{\text{cl}} = \frac{M_{\text{Gal}}}{M}$ – количество кластеров ПЧД на небе, считая, что вся скрытая масса сосредоточена в кластерах ПЧД, M_{Gal} – масса Галактики.

1.2.4 ПРОЗРАЧНОСТЬ НЕБА ДЛЯ ОДИНОЧНЫХ ПЧД

Вычислим прозрачность неба для одиночных ПЧД, собранных на одном расстоянии D_d , сравнивая различные приближения оценки этого.

Первый способ: Вычислим прозрачность неба по формуле (1.4)

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho D_d (D_s - D_d)}{c^2 D_s} dD_d = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \int_0^1 \rho(x) x(1-x) dx, \quad (1.11)$$

где $x = D_d/D_s$ – безразмерное расстояние от наблюдателя до ПЧД.

Поскольку одиночные ПЧД равномерно распределены на поверхности сферы радиуса $D_d = 10$ кпк, то средняя плотность ПЧД задается соотношением:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_d^2} \delta(D_d - \bar{D}_d) = \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_s^2} \delta\left(D_s \left(x - \frac{\bar{D}_d}{D_s}\right)\right) = \\ &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_s^3} \delta(x - \bar{x}), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\bar{x} = \bar{D}_d/D_s$.

Тогда прозрачность неба для одиночных ПЧД будет задаваться соотношением:

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_s^3} \int_0^1 \frac{\delta(x - \bar{x}) x(1-x)}{x^2} dx = \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_s} \int_0^1 \delta(x - \bar{x}) \frac{(1-x)}{x} dx = \\ &= \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_s} \cdot 4 = 3.95 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Второй способ: Вычислим прозрачность неба по более простой формуле, умножив количество ПЧД на долю неба, покрываемую всеми ПЧД, исходя из следующей формулы:

$$\langle \tau \rangle = \frac{M_{\text{Gal}}}{m} \frac{\pi R_{\text{E}}^2}{4\pi D_{\text{d}}^2} = \frac{M_{\text{Gal}}}{M_{\odot}} \frac{r_{\odot} D_{\text{ds}}}{2D_{\text{s}} D_{\text{d}}} = 4 \cdot 10^{-6}. \quad (1.14)$$

Видим, что формулы (1.10), (1.13) и (1.14) дают одинаковые результаты. При этом в (1.10) считалось для кластеров, в которых содержатся все ПЧД. Видно, что в среднем прозрачность неба, как и ожидалось, не зависит от того, как сгруппированы ПЧД (не имеет значения, до тех пор пока нет эффекта наложения). Таким образом, проверку подходов в вычислениях можно считать успешной.

1.2.5 КОЛИЧЕСТВО ЗВЕЗД, ИСПЫТАВШИХ ЭФФЕКТ МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ НА ОДНОМ КЛАСТЕРЕ

Вычислим количество фоновых звезд \mathcal{N} , испытавших эффект микролинзирования на одном кластере:

$$\mathcal{N} = \int_0^R \tau(b) n 2\pi b db,$$

где n – средняя концентрация фоновых звезд на участке площади, замечаемой кластером ПЧД.

Средняя концентрация фоновых звезд была взята из карты Большого Магелланова Облака (БМО, Large Magellanic Cloud (LMC)), построенной на данных эксперимента МАСНО [20] (рисунок 1.5). По рисунку видно, что $n \approx 80 \frac{\text{звезд}}{\text{ед. пл.}}$. За единицу площади на рисунке 1.5 взята площадь квадрата со стороной, равной диаметру кластера.

Тогда вероятность одной фоновой звезды испытать эффект микролинзирования будет задаваться соотношением:

$$\mathcal{N} = \iint \pi R_{\text{E}}^2 \frac{\rho(r)}{m} n 2\pi b db dx = 1.0 \cdot 10^{-3}. \quad (1.15)$$

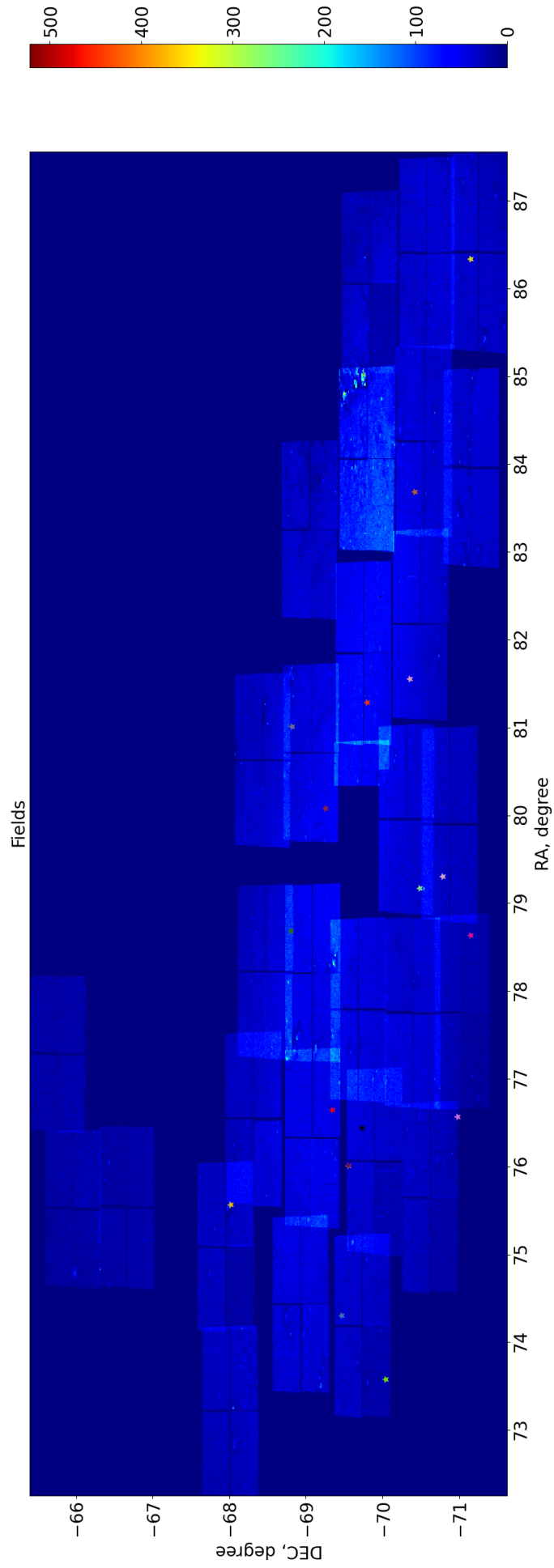


Рисунок 1.5 — Карта Большого Магелланова Облака

1.2.6 ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА СОБЫТИЙ ЛИНЗИРОВАНИЯ НА ВСЕХ КЛАСТЕРАХ

Считая, что вся скрытая масса сосредоточена в кластерах ПЧД, найдем количество кластеров на небе:

$$N_{\text{cl}} = \frac{M_{\text{Gal}}}{M} = \frac{10^{12} M_{\odot}}{10^4 M_{\odot}} = 10^8. \quad (1.16)$$

Угловые размеры БМО следующие: $10.75^\circ \times 9.17^\circ$. Таким образом, БМО занимает $\frac{S_{\text{LMC}}}{S_{\text{sky}}} = \frac{98.3025}{41252.96125} = 2.38 \cdot 10^{-3}$ долю неба. Тогда количество кластеров на фоне БМО составит

$$N_{\text{cl LMC}} = N_{\text{cl}} \frac{S_{\text{LMC}}}{S_{\text{sky}}} = 2.38 \cdot 10^5. \quad (1.17)$$

Таким образом, количество звезд, попавших в область всех кластеров на фоне БМО и испытывающих эффект микролинзирования равно:

$$\mathcal{N}_{\text{DM}} = \mathcal{N} \cdot N_{\text{cl LMC}} = 2.38 \cdot 10^2. \quad (1.18)$$

2 ОЦЕНКИ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЭФФЕКТОВ ГРАВИТАЦИОННОГО МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ

2.1 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА КЛАСТЕРОВ ПЧД И ФАКТОР ПЕРЕКРЫТИЯ

Оценим, как различные профили распределения кластеров ПЧД в пространстве влияют на оптическую толщину, а также фактор наложения кластеров друг на друга.

2.1.1 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА КЛАСТЕРА

Вычислим τ – оптическую толщину кластера ПЧД.

$$\tau = N_{\text{РВН}} \frac{\pi \theta_{\text{E}}^2}{\pi \theta_{\text{cl}}^2} = \frac{M_{\text{cl}}}{m_{\text{РВН}}} \frac{\theta_{\text{E}}^2}{\left(\frac{R}{D_{\text{d}}}\right)^2} = \frac{M_{\text{cl}}}{m_{\text{РВН}}} \theta_{\text{E}}^2 \left(\frac{D_{\text{d}}}{R}\right)^2 = 1.57 \cdot 10^{-5}, \quad (2.1)$$

где $N_{\text{РВН}}$ – количество ПЧД в кластере, $\theta_{\text{E}} = \frac{R_{\text{E}}}{D_{\text{d}}}$ – угловой радиус Хвольсона-Эйнштейна, $\theta_{\text{cl}} = \frac{R}{D_{\text{d}}}$ – угловой радиус кластера.

В формуле (1.8) эта же величина была посчитана с учетом распределения плотности ПЧД внутри кластера. Видно, что ответы совпадают. Таким образом, мы убеждаемся, что расчет оптической толщины в отсутствии экранирования, как и ожидалось, не зависит от пространственного распределения линз внутри кластера, если они на одном расстоянии D_{d} . То есть все определяется полной массой ПЧД в кластере, что будет дополнительно показано ниже.

2.1.2 ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА КЛАСТЕРОВ

Оценим для дополнительной проверки разрабатываемой методики расчета оптическую толщину \mathcal{T} кластеров ПЧД в различных приближениях.

Вычислим оптическую толщину по формуле (1.4):

- 1) Кластеры ПЧД равномерно распределены в объеме сферы радиуса $D_s = 50$ кпк:

$$\mathcal{T} = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho D_d (D_s - D_d)}{c^2 D_s} dD_d = \frac{4\pi G \rho}{c^2} D_s^2 \int_0^1 x(1-x) dx, \quad (2.2)$$

где $x = \frac{D_d}{D_s}$ – обезразмеренное расстояние от наблюдателя до ПЧД.
 ρ – плотность кластеров ПЧД, заданная следующим соотношением:
 $\rho = \frac{M_{\text{Gal}}}{\frac{4\pi}{3} D_s^3}$.

Таким образом, оптическая толщина кластеров, равномерно распределенных в объеме сферы радиуса $D_s = 50$ кпк составит:

$$\mathcal{T} = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{\frac{4\pi}{3} D_s^3} \frac{1}{6} = \frac{GM_{\text{Gal}}}{2c^2 D_s} = 4.94 \cdot 10^{-7}. \quad (2.3)$$

- 2) Кластеры ПЧД равномерно распределены на поверхности сферы радиуса $D_d = 10$ кпк:

$$\mathcal{T} = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho D_d (D_s - D_d)}{c^2 D_s} dD_d = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \int_0^1 \rho(x) x(1-x) dx, \quad (2.4)$$

где плотность ПЧД задается соотношением:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_d^2} \delta(D_d - \bar{D}_d) = \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_s^2} \delta\left(D_s \left(x - \frac{\bar{D}_d}{D_s}\right)\right) = \\ &= \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi x^2 D_s^3} \delta(x - \bar{x}), \end{aligned}$$

где $\bar{x} = \bar{D}_d/D_s$.

Тогда оптическая толщина кластеров, равномерно распределенных на поверхности сферы радиуса $D_s = 10$ кпк составит:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{4\pi D_s^3} \int_0^1 \frac{\delta(x - \bar{x}) x(1-x)}{x^2} dx = \\ &= \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_s} \int_0^1 \delta(x - \bar{x}) \frac{(1-x)}{x} = \frac{GM_{\text{Gal}}}{c^2 D_s} \cdot 4 = 3.95 \cdot 10^{-6}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Видим, что этот результат совпадает с формулами (1.10), (1.13) и (1.14), что подтверждает то, что если имеются линзы на одинаковом расстоянии от наблюдателя, неважно, как они распределены по пространству и массе.

- 3) Кластеры ПЧД равномерно распределены в объеме сферы радиуса $D_d = 10$ кпк:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{4\pi G \rho}{c^2} D_s^2 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \frac{M_{\text{Gal}}}{\frac{4\pi}{3} D_d^3} \frac{1}{6} = \frac{GM_{\text{Gal}} D_s^2}{2c^2 D_d^3} = \\ &= 6.18 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Можно заметить, что оптическая толщина кластеров (одиночных ПЧД) сильно зависит от их распределения по расстоянию до них. Поэтому важно в этом случае (в отличие от профиля плотности внутри кластера) брать более правильный профиль их распределения в Галактике. В связи с этим, в дальнейшем, для более точных расчетов будем использовать профиль Наварро-Френка-Уайта.

- 4) Сделаем соответствующую оценку для профиля Наварро-Френка-Уайта [21]:

$$\rho_{\text{NFW}} = \frac{\rho_0}{\frac{R(D_d)}{R_c} \left(1 + \frac{R(D_d)}{R_c}\right)^2}, \quad (2.7)$$

где $\rho_0 = 0.0067 M_{\odot} \cdot \text{пк}^{-3}$, $R_c = 20$ кпк – параметры распределения, $R = (D^2 + R_0^2 - 2R_0 D \cos \alpha \cos \beta)^{1/2}$ – расстояние, отсчитываемое от центра галактики в направлении БМО, D_d – расстояние, отсчитываемое от Земли в направлении БМО, $R_0 = 8.5$ кпк – расстояние от

центра галактики до Солнца, $\alpha = -33^\circ$, $\beta = 280^\circ$ – углы в направлении БМО.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho_{\text{NFW}}}{c^2} \frac{D_d(D_s - D_d)}{D_s} dD_d = \\ &= \frac{4\pi G \rho_0}{c^2 D_s} \int_0^{D_s} \frac{D_d(D_s - D_d) dD_d}{\frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20} \left(1 + \frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20}\right)^2} = \\ &= 0.45 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поделив (2.8) на (2.1) получим фактор наложения η – долю площади БМО, которую покрывают кластеры ПЧД:

$$\eta = \frac{\mathcal{T}}{\tau} = \frac{0.45 \cdot 10^{-6}}{1.573 \cdot 10^{-5}} = 0.029. \quad (2.9)$$

Фактор наложения можно получить другим способом:

$$\eta = \int_0^{D_s} \Delta\Omega \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 \frac{\pi\theta_{\text{cl}}^2}{\Delta\Omega} dD_d, \quad (2.10)$$

где $\Delta\Omega = 0.03$ ср – телесный угол, под которым видно БМО с Земли.

Тогда

$$\begin{aligned} \eta &= \int_0^{D_s} \Delta\Omega \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 \frac{\pi\theta_{\text{cl}}^2}{\Delta\Omega} dD_d = \int_0^{D_s} \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 \pi \left(\frac{R}{D_d}\right)^2 dD_d = \\ &= \frac{\rho_0 \pi R^2}{M_{\text{ckl}}} \int_0^{50} \frac{dx}{\frac{\sqrt{x^2 + 8.5^2 - 2.48x}}{20} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 8.5^2 - 2.48x}}{20}\right)^2} = \\ &= 0.035. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Видно, что критерии оценки эффекта наложения (2.9) и (2.10) при выбранных параметрах дают практически одинаковый результат.

2.2 ВЕРОЯТНОСТЬ ДВОЙНОГО СОБЫТИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСТЕРА

Оценим N_1 – вероятность двойного события для одного кластера, считая его плоским диском:

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}}, \quad (2.12)$$

где $l = vt$ – расстояние которое пройдет фоновая звезда за время $t = 10$ лет, $v = 200$ км/с – ее скорость, $\lambda = (n_\theta \theta_E)^{-1}$ – средняя длина свободного пробега фоновой звезды относительно эффекта линзирования, n_θ – угловая двумерная концентрация ПЧД, N_{star} – количество звезд на фоне одного кластера.

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}} = n_\theta \theta_E \cdot \frac{vt}{D_d} N_{\text{star}} \sim \frac{\theta_E \theta}{\theta_1^2} N_{\text{star}} = \tau \frac{\theta}{\theta_E} N_{\text{star}}, \quad (2.13)$$

где τ – оптическая толщина кластера, $\theta = \frac{vt}{D_d} = 2.09 \cdot 10^{-7}$, θ_1 – среднее угловое расстояние между ПЧД в кластере, θ_E – угловой радиус Хвольсона-Эйнштейна, который задается соотношением:

$$\theta_E = \frac{R_E}{D_d} = \sqrt{2r_\odot \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{m_{\text{PBH}}}{M_\odot}} = 3.97 \cdot 10^{-9} \left(\frac{m_{\text{PBH}}}{M_\odot} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Оптическая толщина определена следующим соотношением:

$$\tau = N_{\text{PBH}} \frac{\pi \theta_E^2}{\pi \theta_{\text{cl}}^2} = \frac{M_{\text{cl}}}{m_{\text{PBH}}} \frac{\theta_E^2}{\left(\frac{R}{D_d} \right)^2}, \quad (2.15)$$

где N_{PBH} – количество ПЧД в кластере, $\theta_{\text{cl}} = \frac{R}{D_d}$ – угловой радиус кластера. Таким образом,

$$N_1 = 8.29 \cdot 10^{-4} \left(\frac{M_\odot}{m_{\text{PBH}}} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ ПК}}{R} \right)^2 N_{\text{star}}. \quad (2.16)$$

Значение N_{star} получено из карты БМО (рисунок 1.5). Для каждого значения радиуса было вычислено свое значение N_{star} .

Был получен график зависимости вероятности двойного события на кластере от его радиуса при различных значениях масс m ПЧД (рисунок 2.1).

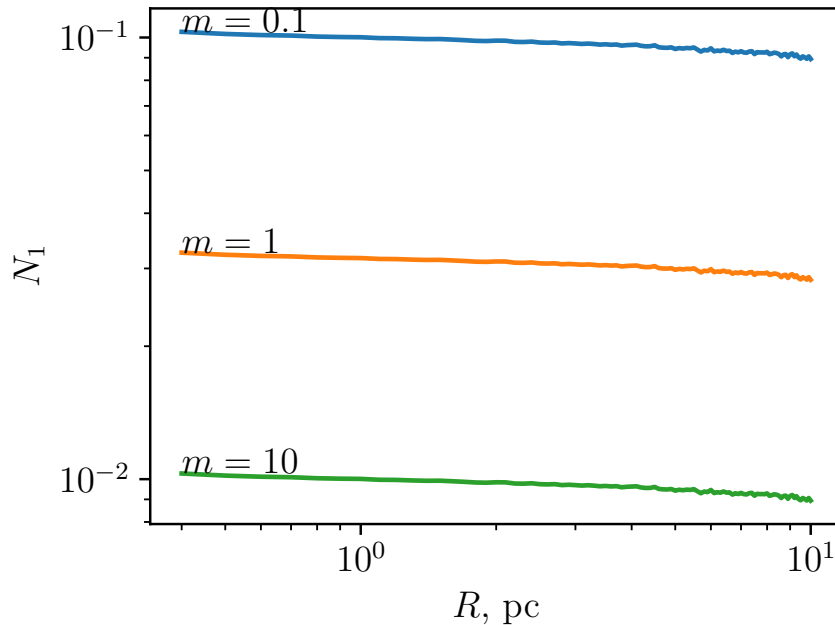


Рисунок 2.1 — График зависимости вероятности двойного события на кластере от его радиуса при различных значениях масс m ПЧД (в солнечных массах)

Исходя из рисунка 2.1, можно сделать вывод, что вероятность двойного события на одном кластере не зависит от его размера, а зависит от массы ПЧД. Также, как видно из (2.15), зависит от количества ПЧД в кластере, что будет еще раз явно показано ниже.

2.3 ВОЗМОЖНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЛИНЗИРОВАНИЯ НА КЛАСТЕРЕ

Классифицированы возможные проявления кластерной структуры ПЧД в эффекте микролинзирования:

- 1) по форме сигнала, то есть искажению временного профиля сигнала. Однако поскольку предсказать конкретную форму сигнала сложно, поэтому точного ответа нет. Одним из простых факторов, влияющих

на форму профиля, является экранировка соседних ПЧД, когда события накладываются друг на друга из-за взаимного влияния соседних ПЧД;

- 2) по временному интервалу между событиями микролинзирования на одной звезде. Так как ПЧД сосредоточены плотно, одна звезда может давать повторные события;
- 3) по угловому и временному интервалам между событиями микролинзирования, события линзирования могут быть одиночными, обычной формы, но они могут быть сгруппированы в пространстве и времени.

Получены численные оценки ослабления ограничения на основе эффекта простого экранирования (на основе работ [22] и [23]) (рисунок 2.2). Под незаэкранированными ПЧД подразумеваем часть ПЧД в кластере, которая лежит в области $\tau < 0.1$, поскольку эффект искажения профиля события проявляется при $\tau \ll 1$ [22]. Учитывая эту долю, можно ослабить ограничения МАСНО, поставленные на плотность ПЧД (рисунок 2.3). Однако стоит отметить, что ослабления ограничений имеют место, когда эффект от кластеризации существенен, что является менее вероятным случаем, поскольку для реализации данного эффекта требуются более экстремальные параметры кластера.

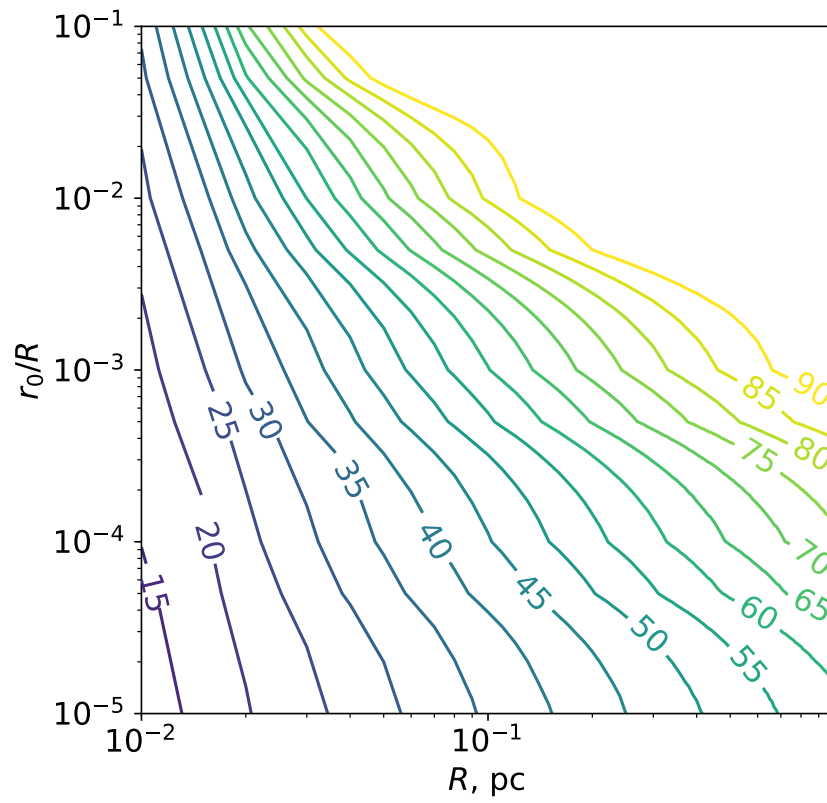


Рисунок 2.2 — Доля незаэкранированных ПЧД, где R — радиус кластера, $\frac{r_0}{R}$ — отношение радиуса кора к радиусу кластера

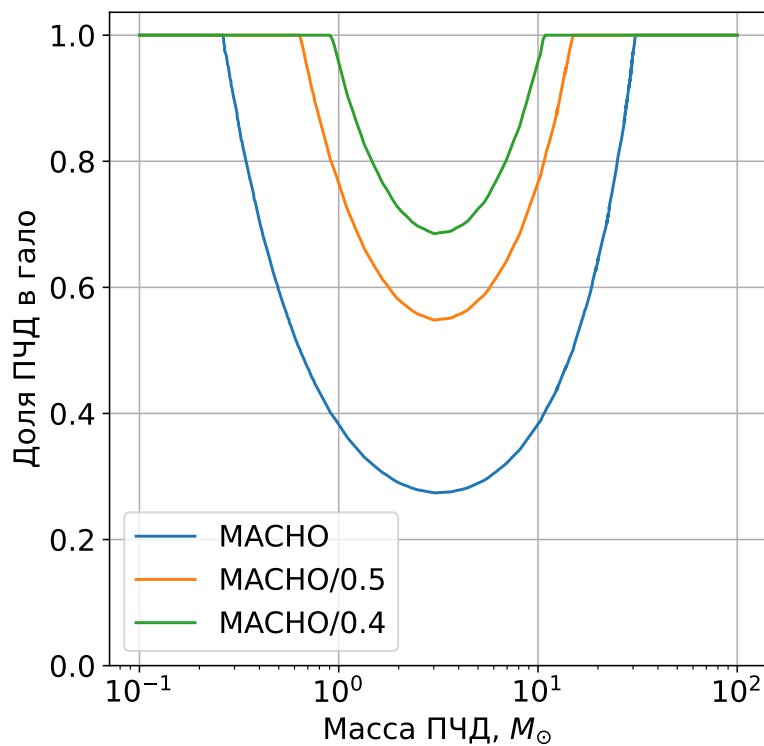


Рисунок 2.3 — Ослабленные ограничения МАСНО

2.4 ПРОВЕРКА МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ПО ВОСПРОИЗВЕДЕНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ МАСНО

Посчитаем вероятность линзирования для одиночных ПЧД, распределенных в гало по профилю Наварро-Френка-Уайта. Для этого возьмем формулу (2.13) и обобщим ее на случай распределения линз по расстоянию до них:

$$n_\theta \rightarrow \frac{dn_\theta}{dD} dD, \quad (2.17)$$

$$\frac{dn_\theta}{dD_d} = \frac{n(D_d) \cdot 4\pi D_d^2}{\theta_{\text{sky}}^2}. \quad (2.18)$$

Тогда вероятность события линзирования для одиночных ПЧД задается соотношением:

$$N_1 = \frac{N_{\text{star}} t}{t_{10}} \int_0^{D_s} n(D_d) \frac{4\pi D_d^2}{\theta_{\text{sky}}^2} \theta_E(D_d) \frac{vt_{10}}{D_d} dD_d, \quad (2.19)$$

где $N_{\text{star}} \cdot t = 1.19 \cdot 10^7 \cdot 10$ лет, $n(D_d)$ – концентрация ПЧД, $n(D_d) = \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{m_{\text{PВН}}}$, ρ_{NFW} – профиль Наварро-Френка-Уайта [21].

$$\theta_{\text{sky}}^2 = \frac{(2 \cdot 180)^2}{\pi} \approx 41253 \text{ кв. гр.} \quad (2.20)$$

$$\theta_E = \sqrt{2r_\odot \frac{D_s - D_d}{D_d D_s} \frac{m_{\text{PВН}}}{M_\odot}} = \sqrt{2r_\odot \left(\frac{1}{D_d} - \frac{1}{D_s} \right) \frac{m_{\text{PВН}}}{M_\odot}}, \quad (2.21)$$

где $v = 200$ км/с, $D_s = 50$ кпк.

Считая, что $m_{\text{PВН}} = M_\odot$, вероятность события линзирования для

одинокных ПЧД вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{\rho_0}{m_{\text{ПВН}}} \frac{4\pi}{\theta_{\text{sky}}^2} \sqrt{2r_{\odot} \frac{m_{\text{ПВН}}}{M_{\odot}}} vt \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)^2 \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^{50} \frac{D_d \left(\frac{1}{D_d} - \frac{1}{50} \right)^{1/2} dD_d}{\frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20} \left(1 + \frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20} \right)^2} = \\
&= 7.9 \cdot 10^{-6}. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Домножим на число звезд $N_{\text{star}} = 1.19 \cdot 10^7$, за которыми наблюдает МАСНО и получим количество событий микролинзирования:

$$N_1 \cdot N_{\text{star}} = 7.9 \cdot 10^{-6} \cdot 1.19 \cdot 10^7 = 93.8. \quad (2.23)$$

Согласно эксперименту МАСНО, доля темных компактных объектов гало (ПЧД) составляют 20% от всей скрытой массы, тогда ожидаемое количество событий микролинзирования составит $93.8/5 \approx 19$, что согласуется с их результатами.

Рассмотрим другой профиль плотности [20]:

$$\rho_H(R) = \rho_0 \frac{R_0^2 + a^2}{R^2 + a^2}, \quad (2.24)$$

где $\rho_0 = 0.0079 \frac{M_{\odot}}{\text{пк}^3}$ – локальная плотность гало, $R_0 = 8.5$ кпк – расстояние от центра Галактики до Солнца, $a = 5$ кпк. В этом случае вероятность события линзирования для одиночных ПЧД задается соотношением:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{\rho_0 (R_0^2 + a^2)}{m_{\text{ПВН}}} \frac{4\pi vt}{\theta_{\text{sky}}^2} \sqrt{2r_{\odot} \frac{m_{\text{ПВН}}}{M_{\odot}}} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)^2 \int_0^{D_s} \frac{D_d}{R^2 + a^2} \sqrt{\frac{1}{D_d} - \frac{1}{D_s}} dD = \\
&= 0.83 \cdot 10^{-5}. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Домножим на число звезд $N_{\text{star}} = 1.19 \cdot 10^7$, за которыми наблюдает МАСНО и получим число событий микролинзирования:

$$N_1 \cdot N_{\text{star}} = 0.83 \cdot 10^{-5} \cdot 1.19 \cdot 10^7 = 98.8. \quad (2.26)$$

Видим, что формулы (2.23) и (2.26) дают одинаковый результат.

2.5 ВЕРОЯТНОСТЬ ПОВТОРНОГО СОБЫТИЯ НА КЛАСТЕРЕ ПЧД

Предположим, что на кластере ПЧД произошло событие микролинзирования. Посчитаем вероятность повторного события на этом же кластере N'_1

$$\begin{aligned} N'_1 &= \int_0^{\theta_{\text{cl}}} \frac{l}{\lambda} n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta = l \int_0^{\theta_{\text{cl}} \rightarrow \theta_{\text{max}}} n_{\text{PBH}}^\theta \theta_{\text{E}} n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta \cdot \frac{\pi\theta_{\text{E}}^2}{\pi\theta_{\text{E}}^2} = \\ &= \frac{l}{\pi\theta_{\text{E}}} \int_0^{\theta_{\text{max}}} n_{\text{star}} \tau(\theta) 2\pi\theta d\theta, \quad (2.27) \end{aligned}$$

где $\lambda = (n_{\text{PBH}}^\theta \theta_{\text{E}})^{-1}$ – средняя длина свободного пробега фоновой звезды относительно эффекта линзирования, $\tau = n_{\text{PBH}}^\theta \pi\theta_{\text{E}}^2$ – оптическая толщина кластера, n_{PBH}^θ – угловая концентрация ПЧД.

С другой стороны, вероятность повторного события можно вычислить по следующей формуле:

$$\begin{aligned} N'_1 &= \int_0^{\theta_{\text{max}}} \frac{l}{\lambda} n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta = l \int_0^{\theta_{\text{max}}} n_{\text{PBH}}^\theta \theta_{\text{E}} n_{\text{star}} 2\pi\theta d\theta = l\theta_{\text{E}} n_{\text{star}} N_{\text{PBH}} = \\ &= l\theta_{\text{E}} n_{\text{star}} N_{\text{PBH}} \frac{\pi\theta_{\text{E}}^2}{\pi\theta_{\text{E}}^2} \frac{\pi\theta_{\text{cl}}^2}{\pi\theta_{\text{cl}}^2} = l\theta_{\text{E}} \frac{\tau N_{\text{star}}}{\pi\theta_{\text{E}}^2} = \tau \frac{l}{\pi\theta_{\text{E}}} N_{\text{star}}. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Видно, что формула (2.28) с точностью до π совпадает с формулой (2.13). Так же можно отметить, что полученная формула (2.28) не чувствительна к профилю распределения ПЧД в кластере, поскольку размеры кластера малы.

2.6 КОЛИЧЕСТВО КЛАСТЕРОВ НА ФОНЕ БМО

Проведем оценку числа кластеров ПЧД, попадающих в объем выделяемый телесным углом, под которым наблюдается БМО с Земли:

$$N = \int_0^{D_s} \Delta\Omega \frac{\rho_{\text{NFW}}(D_d)}{M_{\text{cl}}} D_d^2 dD_d, \quad (2.29)$$

где $\Delta\Omega$ – телесный угол, под которым видно БМО с Земли, $D_s = 50$ кпк – расстояние до БМО от Земли, $M_{\text{cl}} = 10^4 M_{\odot}$ – масса кластера.

Угловые размеры БМО составляют $10.75^\circ \times 9.17^\circ$. Тогда

$$\Delta\Omega = 10.75^\circ \cdot 9.17^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 = 0.03 \text{ ср.} \quad (2.30)$$

Таким образом, количество кластера, попадающий в телесный угол БМО, определяется соотношением:

$$\begin{aligned} N &= \Delta\Omega \frac{\rho_0}{M_{\text{cl}}} \int_0^{D_s} \frac{D_d^2 dD_d}{\frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20} \left(1 + \frac{\sqrt{D_d^2 + 8.5^2 - 2.48D_d}}{20} \right)^2} = \\ &= 7.8 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.7 ПЕРИОД МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ ЛИНЗИРОВАНИЯ ОДНОЙ ЗВЕЗДЫ НА КЛАСТЕРЕ ПЧД

Вычислим T – период между событиями линзирования одной звезды на кластере ПЧД несколькими способами для проверки.

Первый способ:

$$T_1 = \frac{\theta_E D_d}{\tau v}, \quad (2.32)$$

где $\tau = n_{\text{РВН}}^\theta \pi \theta_{\text{Е}}^2$ – оптическая толщина кластера, v – линейная скорость звезды.

Второй способ:

$$T_2 = \frac{1}{n_{\text{РВН}} \theta_{\text{Е}} \omega}, \quad (2.33)$$

где $\omega = \frac{v}{D_{\text{д}}}$ – угловая скорость звезды, $n_{\text{РВН}} = \frac{N_{\text{РВН}}}{\pi \theta_{\text{кл}}^2}$ – угловая концентрация ПЧД, $\theta_{\text{кл}} = \frac{R}{D_{\text{д}}}$ – угловой размер кластера.

Сравним формулы (2.32) и (2.33)

$$T_1 = \frac{\theta_{\text{Е}} D}{\tau v} = \frac{\theta_{\text{Е}}}{\tau \omega} = \frac{\theta_{\text{Е}}}{n_{\text{РВН}} \pi \theta_{\text{Е}}^2 \omega} = \frac{1}{n_{\text{РВН}} \pi \theta_{\text{Е}} \omega} = \frac{T_2}{\pi}. \quad (2.34)$$

Видно, что формулы формулы (2.32) и (2.33) совпадают с точностью до π .

Вычислим период первым способом:

$$T_1 = \frac{\theta_{\text{Е}} D_{\text{д}}}{\tau v} = \frac{\theta_{\text{Е}} D_{\text{д}}}{N_{\text{РВН}} \frac{\pi \theta_{\text{Е}}^2}{\pi \theta_{\text{кл}}^2} v} = \frac{R^2}{N_{\text{РВН}} \theta_{\text{Е}} D_{\text{д}} v} = 1.19 \cdot 10^4 \text{ лет}. \quad (2.35)$$

Найдем средний период между событиями линзирования с учетом всех кластеров на фоне БМО:

$$\langle T_1 \rangle = \frac{T_1}{N} = \frac{1.19 \cdot 10^4 \text{ лет}}{7.8 \cdot 10^4} = 0.15 \text{ лет}. \quad (2.36)$$

Период, вычисленный вторым способом, будет в π раз больше:

$$T_2 = \pi T_1 = 3.74 \cdot 10^4 \text{ лет}. \quad (2.37)$$

Тогда и средний период между событиями линзирования с учетом всех кластеров на фоне БМО, посчитанный вторым способом будет в π раз больше:

$$\langle T_2 \rangle = \pi \langle T_1 \rangle = 0.48 \text{ лет}. \quad (2.38)$$

Обратимся к наблюдательным данным: наблюдалось одно двойное событие с временным интервалом 85 – 90 дней с угловым разрешением,

которое в среднем включает один кластер [23]. Тогда вероятность такого события при условии, что кластеры объясняют всю скрытую массу, составляет

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{90 \text{ дней}}{0.15 \text{ лет}}\right) = 0.81. \quad (2.39)$$

Это событие становится очень вероятным, но оно наблюдается одно из 20, что позволяет поставить ограничения на долю кластеров среди всех ПЧД, если нет другого объяснения двойных событий.

2.8 ПЕРИОД МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ ДЛЯ ОДИНОЧНЫХ ПЧД

Оценим период между событиями линзирования для одиночных ПЧД. С учетом всех ПЧД ответ будет отличаться от (2.36) в η раз (из формул (2.9) и (2.10))

$$T_{\text{РВН}} = \frac{T_1}{\eta} = \frac{0.15 \text{ лет}}{0.03} = 50 \text{ лет}. \quad (2.40)$$

Выбор между гипотезами требует дальнейшего статистического анализа данных наблюдений.

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа была посвящена исследованию эффектов гравитационного микролинзирования звезд в БМО на кластере первичных черных дыр.

В ходе данной работы были классифицированы возможные проявления кластерной структуры ПЧД в эффекте микролинзирования. Проявления были разделены на следующие: искаженные временные профили событий, которые имели бы место при тесном расположении линз на небе (их наложении); кратные события для одной звезды; сгруппированные события по времени и расстоянию между ними. Также было получено много характеристик эффекта линзирования разными способами для выработки и проверки методики расчета эффекта. Следующие величины были оценены:

- 1) оптическая толщина кластера, посчитанная несколькими способами;
- 2) эффективный радиус, от которого зависит эффект профиля плотности;
- 3) оптическая толщина (прозрачность) неба для двух случаев: одиночных ПЧД и в виде кластеров;
- 4) количество звезд, испытавших эффект микролинзирования на кластере;
- 5) период между событиями линзирования для двух случаев (одиночных ПЧД и в виде кластера);

Получена вероятность двойного события, как для кластерного, так и для одиночного распределения ПЧД. Также было получено, что факт наблюдаемого двойного события в эксперименте МАСНО имеет существенное значение для двух гипотез (кластерного и одиночного распределения ПЧД) и требует дальнейшего статистического анализа. Таким образом, этот факт в дальнейшем позволит наложить ограничения на параметры кластера ПЧД.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 6. — P. 061102. — arXiv: [1602.03837 \[gr-qc\]](#).
2. Did LIGO detect dark matter? / S. Bird [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 20. — P. 201301. — arXiv: [1603.00464 \[astro-ph.CO\]](#).
3. *Clesse S., García-Bellido J.* The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: measuring their mass distribution with Advanced LIGO // Phys. Dark Univ. — 2017. — Vol. 15. — P. 142–147. — arXiv: [1603.05234 \[astro-ph.CO\]](#).
4. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 / M. Sasaki [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, no. 6. — P. 061101. — arXiv: [1603.08338 \[astro-ph.CO\]](#) ; — [Erratum: Phys.Rev.Lett. 121, 059901 (2018)].
5. *Carr B., Kuhnel F., Sandstad M.* Primordial Black Holes as Dark Matter // Phys. Rev. D. — 2016. — Vol. 94, no. 8. — P. 083504. — arXiv: [1607.06077 \[astro-ph.CO\]](#).
6. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // Sov. Astron. — 1967. — Vol. 10. — P. 602.
7. *Hawking S.* Gravitationally collapsed objects of very low mass // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1971. — Vol. 152. — P. 75.
8. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: [1807.06590 \[astro-ph.CO\]](#).

9. *Deng H., Vilenkin A., Yamada M.* CMB spectral distortions from black holes formed by vacuum bubbles // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2018. — Vol. 07. — P. 059. — arXiv: [1804.10059 \[gr-qc\]](#).
10. *Afshordi N., McDonald P., Spergel D. N.* Primordial black holes as dark matter: The Power spectrum and evaporation of early structures // *Astrophys. J. Lett.* — 2003. — Vol. 594. — P. L71–L74. — arXiv: [astro-ph/0302035](#).
11. First-order phase transitions as a source of black holes in the early universe / M. Y. Khlopov [et al.] // *Grav. Cosmol.* — 2000. — Vol. 6. — P. 153–156.
12. *Rubin S. G., Khlopov M. Y., Sakharov A. S.* Primordial black holes from nonequilibrium second order phase transition // *Grav. Cosmol.* / ed. by M. Y. Khlopov, M. E. Prokhorov, A. A. Starobinsky. — 2000. — Vol. 6. — P. 51–58. — arXiv: [hep-ph/0005271](#).
13. *Rubin S. G., Sakharov A. S., Khlopov M. Y.* The Formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2001. — Vol. 91. — P. 921–929. — arXiv: [hep-ph/0106187](#).
14. Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries / T. Nakamura [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 1997. — Vol. 487. — P. L139–L142. — arXiv: [astro-ph/9708060](#).
15. Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation / K. Ioka [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 1998. — Vol. 58. — P. 063003. — arXiv: [astro-ph/9807018](#).
16. *Kaiser N.* On the Spatial correlations of Abell clusters // *Astrophys. J. Lett.* — 1984. — Vol. 284. — P. L9–L12.
17. *Animali C., Vennin V.* Clustering of primordial black holes from quantum diffusion during inflation. — 2024. — arXiv: [2402.08642 \[astro-ph.CO\]](#).
18. *Paczynski B.* Gravitational microlensing by the galactic halo // *Astrophys. J.* — 1986. — Vol. 304. — P. 1–5.

19. *Захаров А. Ф.* Гравитационные линзы и микролинзы. — Янус-К, 1997. — С. 330.
20. The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations / C. Alcock [et al.] // *Astrophys. J.* — 2000. — Vol. 542. — P. 281–307. — arXiv: [astro-ph/0001272](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0001272).
21. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* The Structure of cold dark matter halos // *Astrophys. J.* — 1996. — Vol. 462. — P. 563–575. — arXiv: [astro-ph/9508025](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9508025).
22. *Тощенко К. А.* Влияние кластеризации первичных черных дыр на наблюдательные ограничения доли компактных объектов Гало // На стадии подготовки. —
23. MACHO project limits on black hole dark matter in the 1-30 solar mass range / R. A. Allsman [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2001. — Vol. 550. — P. L169. — arXiv: [astro-ph/0011506](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0011506).